Chapitre 5 : Probabilités discrètes

I Espace de probabilité discret.

Un univers Ω est dit discret s'il est au plus dénombrable.

Définition : une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers Ω discret est une application

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \mathbb{P}(A)$$

satisfaisant

* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
* pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux disjoints, où I est fini ou dénombrable, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Comme dans le cas fini, définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω discret revient à considérer une famille de poids $\left(p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})\right)_{\omega\in\Omega}$ satisfaisant $p_\omega \geq 0$ pour tout $\omega\in\Omega$ et $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

somme infinie si Ω de cardinal infini

Dans ce cas, pour tout évènement A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

somme infinie si A de cardinal infini.

Exemple: $\Omega = \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

On a bien $p_n \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2} = 1.$$

Si $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n \text{ pair}\}$,

$$P(A) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Les pptés vues dans le cas fini (proba d'une union, passage au complémentaire, conditionnement...) restent vraies dans le cas discret.

Prop : Soit (Ω, P) un espace de probabilité discret et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante ($A_n \subset A_{n+1}$ pour toute $n \in \mathbb{N}$) et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements décroissante ($B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Alors 1) $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

2) $\lim P(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

Preuve.

1) On définit $C_0 = A_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Alors

* les C_i sont deux à deux disjoints

si $i < j$, $C_i \subset A_{j-1}$ et

$$C_i \cap C_j \subset \underbrace{A_{j-1} \cap C_j}_{= A_{j-1} \cap (A_j \setminus A_{j-1})} = \emptyset$$

* on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

En effet, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset A_n$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Soit maintenant $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. Mais

$$A_n = A_n \setminus A_{n-1} \cup A_{n-1} = C_n \cup \underbrace{(A_{n-1} \setminus A_{n-2})}_{C_{n-1}} \cup A_{n-2}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{n} C_n.$$

Donc il existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\omega \in C_k$

et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

2 à 2 disjoints

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(C_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(C_k)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2) On passe au complémentaire :
on définit $A_n = B_n^c$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

et $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \mathbb{P}(A_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

II Variables aléatoires discrètes

1) Définition

Déf : On appelle v.a. discrète toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité discret.

L'ensemble E des valeurs possibles de X est au plus dénombrable, et on appelle loi de X la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E associée à la famille $\left(p_x = \mathbb{P}(X=x)\right)_{x \in E}$.

2) Lois discrètes classiques.

* Loi géométrique

X est de loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Si l'on considère un schéma de Bernoulli de n épreuves indépendantes avec proba de succès p, alors la proba de l'événement "le premier succès a lieu à la $k^{ième}$ expérience" avec $k \in \{1, ..., n\}$ est

$$\underbrace{(1-p)\times(1-p)\times(1-p)\times\ldots(1-p)}_{k-1 \text{ fois}}\times p = (1-p)^{k-1}p.$$

Ex : on lance un dé à six faces équilibré jusqu'à obtenir un 6, et on note X le nbre de lancers. Alors $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{6})$.

Rq : La modélisation rigoureuse de cette infinité de lancers de dés sort du cadre de ce cours ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable).

* Loi de Poisson.

X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Utile pour modéliser un nombre d'événements dans un intervalle de temps (arrivées, connexions à un serveur) le nombre d'impuretés dans un cable ....

Théorème (événements rares). Soient $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0,1]$ et un réel $\lambda > 0$ tels que $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Preuve :

On a

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\times n\times n\cdots\times n} \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^{n-k}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} (1-p_n)^{n-k}$$

et $(1-p_n)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln(1-p_n)\right)$

$$= \exp\left((n-k)\left(-p_n + \underset{n\to\infty}{o}(p_n)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-p_n(n-k) + \underset{n\to+\infty}{o}(np_n)\right)$$

$$= \exp\left(-\lambda + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

On a bien

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

III. Espérance.

Une v.a. discrète n'admet pas toujours d'espérance

<u>Ex:</u> Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et satisfait $\mathbb{P}(X=n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$), alors la famille

$$\left(n\mathbb{P}(X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{6}{\pi^2 n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ n'est pas sommable.

<u>Définition</u> Soit X une v.a. discrètes ayant pour valeurs possibles $\{x_i, i \in I\}$ où les x_i sont distincts. Alors l'espérance de X est bien définie si la famille

$$\left(|x_i| \, \mathbb{P}(X=x_i)\right)_{i\in I}$$ est sommable

et dans ce cas on la note $\mathbb{E}[X]$ et on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i\in I} x_i \, \mathbb{P}(X=x_i).$$

Proposition Soient X une v.a. discrète ayant pour valeurs possibles $\{x_i, i \in I\}$ où les x_i sont distincts et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Alors $Y = f(X)$ admet une espérance si et seulement si la famille

$$\left(|f(x_i)| \, P(X = x_i) \right)_{i \in I} \text{ est sommable}$$

et dans ce cas

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i \in I} f(x_i) P(X = x_i).$$

Preuve :

Notons $\{y_j : j \in J\}$ les valeurs possibles de Y, où les y_j sont distincts.

Alors
$$|y_j| \, P(Y = y_j) = |y_j| \sum_{\substack{i \in I \\ f(x_i) = y_j}} P(X = x_i)$$
$$= \sum_{i \in I} |f(x_i)| \, P(X = x_i)$$

Donc, par sommation par paquet,
$\left(|g_j| \mathbb{P}(Y=y_j)\right)_{j\in J}$ est sommable
si et seulement si $\left(|f(x_i)| \mathbb{P}(X=x_i)\right)_{i\in I}$
l'est, et à nouveau par sommation par paquet

$$\sum_{j\in J} y_j \mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i\in I} f(x_i) \mathbb{P}(X=x_i).$$

<u>Rq</u> Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ sous-ensembles discrets de $\mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction, $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ admet une espérance si et seulement si la famille

$$\left(|f(x_1, \dots, x_n)| \mathbb{P}(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)\right)_{(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\dots\times E_n}$$ est sommable

et dans ce cas

$$\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\dots\times E_n} f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{P}(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$$

L'espérance dans le cas discret est linéaire, comme dans le cas fini.

<u>Définition</u> : soit X une v.a. discrète et $p \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle, s'il existe, $\mathbb{E}\left[|X|^p\right]$ le moment d'ordre p de X.

<u>Rq</u> : si $0 < p < q$, puisque l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^p \leq 1 + |x|^q$, alors si X admet un moment d'ordre q alors X admet un moment d'ordre p.

<u>Rq</u> : On peut en fait démontrer l'inégalité de Jensen suivante : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et X et $\varphi(X)$ admettent une espérance,

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Puisque $\varphi : x \longmapsto |x|^{q/p}$ est convexe $(q/p > 1)$

$$\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{q/p} \leq \mathbb{E}\left[\left(|X|^p\right)^{q/p}\right] = \mathbb{E}\left[|X|^q\right].$$

Définition: Soit X une v.a discrète admettant un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}[X^2]$ existe). On définit la variance $\mathrm{Var}(X)$ de X par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Définition: Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2. On définit la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right]$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Rq: si X et Y admettent un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}[XY]$ est bien défini puisque

$$|XY| \leq \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2}.$$

On peut également justifier l'existence de $\mathbb{E}[XY]$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

<u>Proposition</u>: si $X:\Omega\to\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ sont deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2,

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

<u>Preuve</u> (utilisant C.S. pour les sommes finies)

Supposons que X prend ses valeurs dans $E_1 \subset \mathbb{R}$ discret et Y dans $E_2 \subset \mathbb{R}$ discret.

Soit $J \subset E_1 \times E_2$ fini. Il existe $J_1 \subset E_1$, $J_2 \subset E_2$ finis tels que

$$J \subset J_1 \times J_2$$

On a

$$\sum_{(x,y)\in J} |xy|\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{(x,y)\in J} |x|\sqrt{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}\; |y|\sqrt{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}$$

C.S. cas fini

$$\leq \sqrt{\sum_{(x,y)\in J}\left(|x|\sqrt{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}\right)^2}\sqrt{\sum_{(x,y)\in J}\left(|y|\sqrt{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}\right)^2}$$

termes positifs

$$\leq \sqrt{\sum_{x\in J_1} x^2 \underbrace{\sum_{y\in J_2}\mathbb{P}(X=x,Y=y)}_{\leq \mathbb{P}(X=x)}}\sqrt{\sum_{y\in J_2} y^2 \underbrace{\sum_{x\in J_1}\mathbb{P}(X=x,Y=y)}_{\leq \mathbb{P}(Y=y)}}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{x\in E_1} x^2\, \mathbb{P}(X=x)}\sqrt{\sum_{y\in E_2} y^2\, \mathbb{P}(Y=y)}$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

Les propriétés démontrées pour la variance dans le cas fini restent vraies dans le cas discret. Cela repose en particulier sur la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : Soit Ω un univers discret, $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et $X_1, \dots, X_n$ des v.a sur Ω à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ discrets et indépendantes (vérifient, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$
$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$).
Alors pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathbb{E}[f_1(X_1) \dots f_n(X_n)]$ et $\mathbb{E}[f_k(X_k)]$ existent pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}[f_1(X_1) \dots f_n(X_n)] = \mathbb{E}[f_1(X_1)] \dots \mathbb{E}[f_n(X_n)].$$

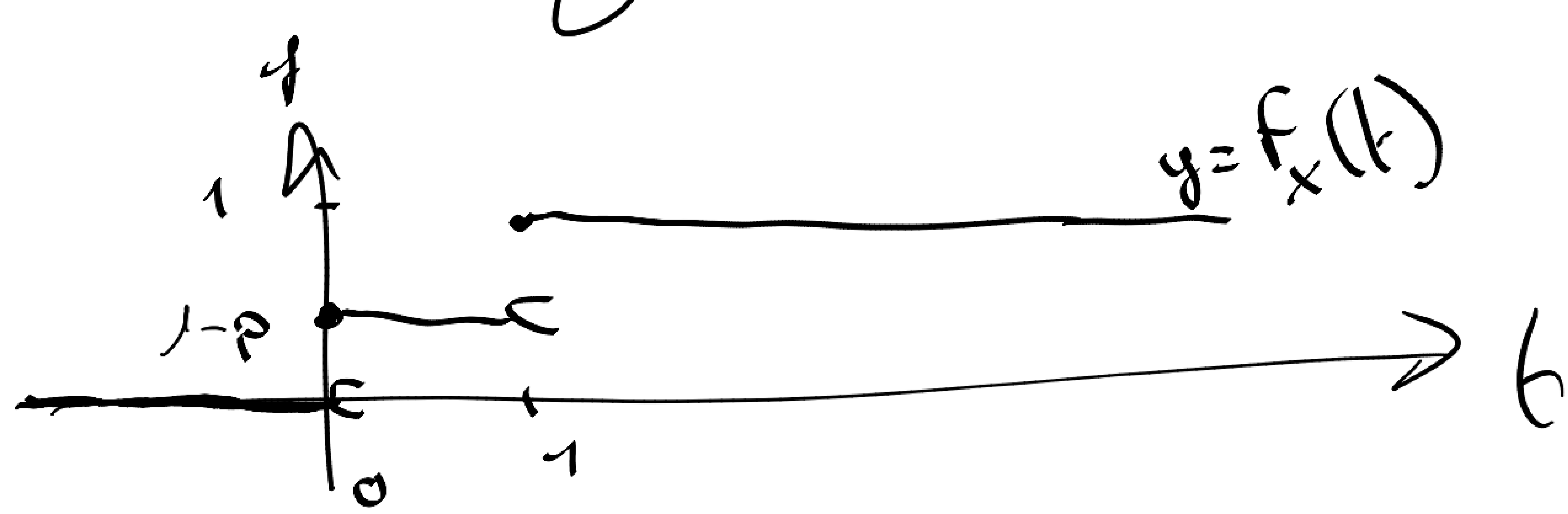
IV Fonction de répartition.

__Définition :__ Soit Ω un univers discret, P une probabilité sur Ω et X une v.a. sur Ω, prenant ses valeurs dans une partie discrète E de $\mathbb{R}$. La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{\substack{x \in E \\ x \leq t}} \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

__Ex :__ si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-p & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$



Proposition la fonction de répartition d'une v.a discrète est croissante, est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point (on dit qu'elle est c.à.d.l.à.g), vérifie $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$ et caractérise la loi de X.

Preuve.

- Si $s, t \in \mathbb{R}$ avec $s < t$, on a $\{X \leq s\} \subset \{X \leq t\}$ et donc

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \leq s)}_{= F_X(s)} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X \leq t)}_{= F_X(t)}.$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels satisfaisant $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$. On définit $B_n = \{X \leq t_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq t_n\} = \{X \leq t\}$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}(B_n)}_{= F_X(t_n)} = \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)}_{= F_X(t)}$.

Donc F_X est continue à droite en t.

Soit maintenant une suite croissante $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels satisfaisant $s_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$, et définissons $A_n = \{X \leq s_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

On a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq s_n\} = \{X < t\}$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{= F_X(s_n)} = \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)}_{= \mathbb{P}(X < t)}$

Donc F_X admet $\mathbb{P}(X<t)$ pour limite à droite en t.

Les points de discontinuité de F_X sont donc les valeurs possibles de la v.a. discrète X, et par un tel point de discontinuité x,

$$P(X=x) = P(X \leq x) - P(X<x)$$

$$= F_X(t) - \lim_{s \to t^-} F_X(t).$$

- Supposons maintenant $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante avec $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Cette fois

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \leq s_n\} = \Omega$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{P(A_n)}_{=F_X(s_n)} = P(\Omega) = 1.$$

Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante avec $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \leq t_n\} = \emptyset$$

et $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{P(B_n)}_{=F_X(t_n)} = P(\emptyset) = 0.$$

V Fonction génératrice.

Définition : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

On définit la fonction génératrice de X (notée G_X) par pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n).$$

Rq : * $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n)$ est une série entière, son rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+$ est le réel tel que

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n) \text{ converge absolument si } -R<t<R \\ \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n) \text{ diverge grossièrement si } t<-R \text{ ou } t>R. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|t^n \mathbb{P}(X=n)| \leq \mathbb{P}(X=n),$$

la série $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n)$ converge absolument pour tout $t \in [-1,1]$.

Le rayon de convergence R de cette série vérifie toujours $R \geq 1$.

* G_X est bien définie en -1 et en 1, et donc sur $[-1,1]$, avec

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

$$G_X(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \mathbb{P}(X \text{ pair}) - \mathbb{P}(X \text{ impair})$$

* $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$.

Exemples : * si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_X(t) = 1-p+pt$$

* si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a pour tout $t \in [-1,1]$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}$$

* si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in$, si $t \in [-1,1]$

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n (1-p)^{n-1} p$$

$$= pt \sum_{k=0}^{+\infty} t^k (1-p)^k$$

$$= \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

<u>Proposition</u>. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G_X, G_X est C^∞ sur $]-1,1[$, continue sur $[-1,1]$ et satisfait, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

En particulier, deux v.a. X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont la même fonction génératrice si et seulement si elles ont la même loi.

<u>Preuve</u>

Puisque G_X est définie par une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ elle est C^∞ sur $]-1,1[$ et satisfait, pour tout $t \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$

$$G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^{n-k}\,\mathbb{P}(X=k)$$

En particulier,

$$G_X^{(k)}(0) = k!\,\mathbb{P}(X=k).$$

De plus, puisque pour tout $t \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|t^n \mathbb{P}(X=n)| \leq \mathbb{P}(X=n),$$

terme général d'une série convergente

la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \mathbb{P}(X=n)$ est normalement convergente et donc absolument convergente sur $[-1,1]$. Puisque $t \mapsto t^n \mathbb{P}(X=n)$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[-1,1]$.

Proposition. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ alors G_X est C^k sur $[-1,1]$ et sa $k^{\text{ième}}$ dérivée à gauche en 1 (que l'on note $G_X^{(k)}(1)$) vérifie

$$G_X^{(k)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-k+1)]$$

En particulier, si X admet un moment d'ordre 1,

$$E[X] = G_X'(1),$$

si X admet un moment d'ordre 2,

$$\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.$$

Preuve.

On sait que G_X est C^∞ sur $]-1,1[$ et satisfait pour tout $t \in]-1,1[$

$$G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^k P(X=k)$$

Puisque, pour tout $t \in [-1,1]$ et $k \geq n$

$$|n(n-1)\dots(n-k+1)t^n P(X=n)| \leq n(n-1)\dots(n-k+1) P(X=n)$$

terme général d'une série convergente

la série de fonctions $\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)t^n P(X=n)$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$.

Pour tout $n \geq k$, les fonctions

$$t \longmapsto n(n-1)\dots(n-k+1)\, t^n\, \mathbb{P}(X=n)$$

sont continues sur $[-1,1]$ et donc la série de fonctions

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, t^n\, \mathbb{P}(X=n)$$

est continue sur $[-1,1]$. Ainsi,

$$G_X^{(k)}(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, \mathbb{P}(X=n)$$
$$= \mathbb{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right].$$

On conclut par le théorème de "limite de la dérivée" : si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et satisfait $f'(t) \underset{t\to 1^-}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable à gauche en 1 et satisfait $f'(1) = \ell$.

Si X a un moment d'ordre 1 on trouve bien

$$G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$$

Si X a un moment d'ordre 2 on obtient

$$G_X''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X],$$

et donc

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2. \end{aligned}$$

<u>Proposition</u>: Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, de fonctions génératrices G_X et G_Y, alors pour tout $t \in [-1,1]$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t).$$

Preuve

Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$
\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}\left[t^{X+Y}\right] \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} t^{i+j} \underbrace{\mathbb{P}(X=i, Y=j)}_{=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} t^i \mathbb{P}(X=i) \sum_{j\in\mathbb{N}} t^j \mathbb{P}(Y=j) \\
&= G_X(t)\, G_Y(t).
\end{aligned}
$$