# Chapitre 4 : Dénombrabilité et sommation.

## I Ensembles dénombrables.

**Définition.** Un ensemble $\Omega$ est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

**Proposition :** Un ensemble $\Omega$ est au plus dénombrable si et seulement si il existe une surjection $f : \mathbb{N} \to \Omega$, ce qui équivaut à l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega$ telle que $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Preuve :**
($\Rightarrow$) * Si $\Omega$ est fini de cardinal $N$, constitué des éléments $a_1, \dots, a_N$, il suffit de définir $a_n = a_N$ pour tout $n \geq N$.

* Si $\Omega$ est dénombrable il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$. Il suffit de définir $a_n = \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) * Si $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fini on a bien $\Omega$ au plus dénombrable.

* Si $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est infini on définit, pour pour tout $a \in \Omega$, $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = a\}$, et $\mathbb{N}_\Omega = \{n_a : a \in \Omega\}$. $\Omega$ est en bijection avec $\mathbb{N}_\Omega$, et l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\Omega$ définie par

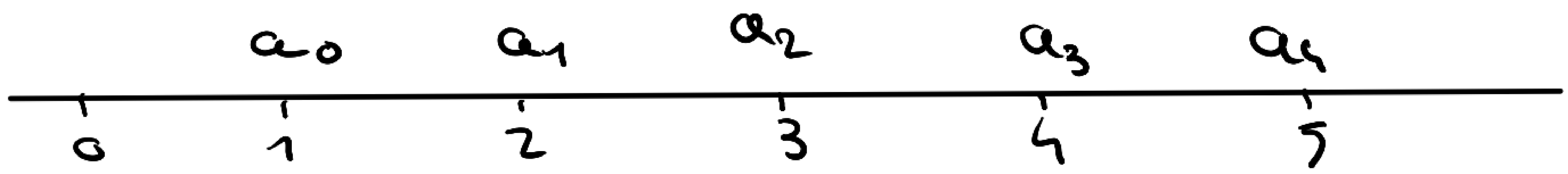
$$\begin{cases} \varphi(0) = \min(\mathbb{N}_\Omega) \\ \varphi(n+1) = \min\left(\mathbb{N}_\Omega \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}\right), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est bijective. Donc $\Omega$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, $\Omega$ est dénombrable.

**Exemples:** * $\mathbb{N}^*$ est dénombrable

$$\phi : \begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$ est bijective de réciproque

$$\phi^{-1} : \begin{aligned} \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto k-1 \end{aligned}$$



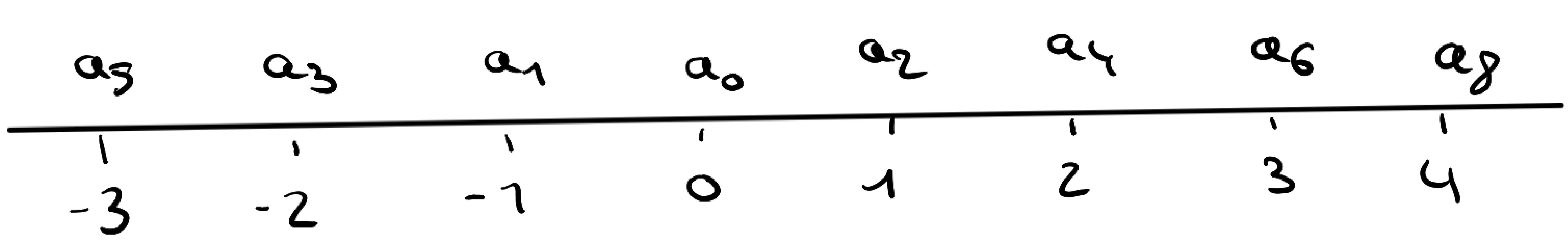

$\mathbb{N}^* = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

* $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

$$\phi : \begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\phi^{-1} : \begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$




$\mathbb{Z} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Théorème.** Si $\Omega$ est au plus dénombrable, toute partie de $\Omega$ est au plus dénombrable.

**Preuve.** Si $\Omega$ est fini, ses parties sont finies.

Si $\Omega$ est dénombrable, soit $A$ une partie de $\Omega$, $y \in A$ fixé, et $f$ la surjection

$$f : \Omega \to A$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ y & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Il existe $\phi : \mathbb{N} \to \Omega$ bijective, et $f \circ \phi : \mathbb{N} \to A$ est surjective, donc $A$ est au plus dénombrable.

**Corollaire.** S'il existe une injection de $\Omega$ dans $\mathbb{N}$ alors $\Omega$ est au plus dénombrable.

Proposition : Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, alors elle est finie si majorée et dénombrable sinon.

Preuve.

Si $A$ est majorée par $M \in \mathbb{N}$ alors $|A| \leq M+1$.

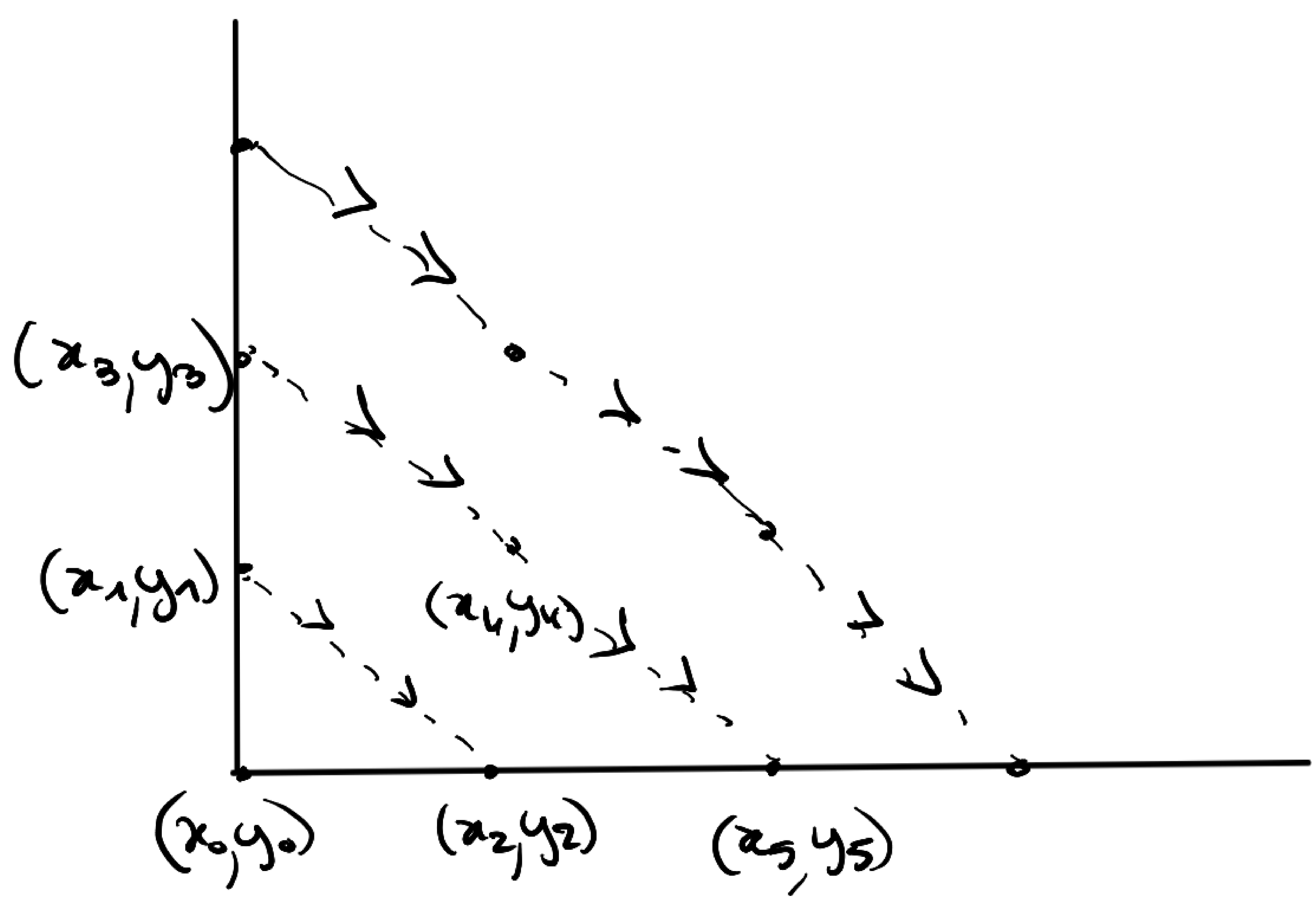
Supposons que $A$ n'est pas majorée. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit. On pose $a_0 = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a défini $a_0, a_1, \dots, a_n$. L'ensemble $A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ est non vide (sinon $A$ serait majorée) et minorée et on pose $a_{n+1} = \min(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\})$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas de cardinal fini.

A est donc dénombrable.

<u>Proposition</u> : $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

<u>Preuve</u>.




L'application

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(p,q) \longmapsto \sum_{i=0}^{p+q} i + q = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$$

est une bijection (voir TD).

Corollaire : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Preuve.

L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & \begin{cases} p/q & \text{si } q \neq 0 \\ 0 & \text{si } q = 0 \end{cases} \end{array}$$

est une surjection, et $\mathbb{Z}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}^2$ et donc avec $\mathbb{N}$. De plus $\mathbb{Q}$ est infini puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Proposition Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles au plus dénombrables, alors

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est au plus dénombrable.

Preuve.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une surjection $\varphi_n : \mathbb{N} \to A_n$. L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ (n,k) & \longmapsto & \varphi_n(k) \end{array}$$

est surjective.

<u>Proposition</u>. Tout produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

<u>Preuve</u>. Soient $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ des ensembles au plus dénombrables. Montrons que $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ est au plus dénombrable.

Il existe des surjections $\varphi_k : \Omega_k \to \mathbb{N}$.

Ainsi
$$f : \mathbb{N}^2 \to \Omega_1 \times \Omega_2$$
$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (\varphi_1(\omega_1), \varphi_2(\omega_2))$$

est une surjection. Donc $\Omega_1 \times \Omega_2$ est au plus dénombrable

Mais alors, puisque $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \underbrace{(\Omega_1 \times \Omega_2)}_{\text{au plus dénombrable}} \times \underbrace{\Omega_3}_{\text{au plus dénombrable}}$

le même raisonnement implique que $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ au plus dénombrable, une récurrence simple donne le résultat de la proposition.

<u>Rq</u> : L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \{k \in \mathbb{N} : a_k = 1\} \end{array}$$

est une bijection.

<u>Proposition</u>. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable.

Cette proposition est un cas particulier du théorème plus général suivant.

<u>Théorème</u>. Soit $E$ un ensemble. Il n'existe pas de surjection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Preuve.

Soit $E$ un ensemble. Supposons qu'il existe une surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$.

On définit l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$, et soit $x_0$ un antécédent de $A$ par $f$ ($x_0$ existe puisque l'on a supposé $f$ surjective).

On remarque que si $x_0 \in A$, par définition de $A$, $x_0 \notin f(x_0) = A$.
D'autre part, si $x_0 \notin A$, par définition de $A$ $x_0 \in f(x_0) = A$.

On a donc $x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \notin A$.

C'est absurde.

Théorème. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Preuve.

On montre que $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

On montre que tout sous-ensemble dénombrable de $]0,1[$ est strictement inclus dans $]0,1[$.

Soit $A$ une partie dénombrable de $]0,1[$ ayant pour éléments $(a_n)_{n\geq 1}$. Chaque $a_n$ a une écriture décimale

$$a_n = 0{,}a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4} \ldots$$

où les $(a_{ni})_{i\geq 1}$ peuvent éventuellement être nuls à partir d'un certain rang.

On définit le nombre

$$x = 0{,}x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$$

comme suit : pour tout $i \geq 1$

$$x_i = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad a_{ii} \neq 4 \\ 3 & \text{si} \quad a_{ii} = 4 \end{cases}$$

On a $x \in ]0,1[$ et $x \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $A$ est strictement inclus dans $]0,1[$.

<u>Rq</u>: on peut montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et donc avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, en utilisant en particulier l'écriture en base 2.

## II Familles sommables.

Dans cette section $I$ est un ensemble dénombrable.

### 1) Familles sommables positives.

**Définition.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexés par $I$. $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i\in J} u_i \ : J\subset I, \text{ fini} \right\}$$

est majoré. On note alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{ \sum_{i\in J} u_i : J\subset I, J \text{ fini} \right\}$$

**Proposition** : Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, et dans ce cas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

Preuve.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, comme pour tout $N\in\mathbb{N}$ l'ensemble $\{0,1,\dots,N\}$ est fini,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n\in\{0,\dots,N\}} u_n \leq \sup\left\{\sum_{n\in J} u_n : J \text{ fini}, J\subset\mathbb{N}\right\}$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

- Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, pour tout $J\subset\mathbb{N}$ fini il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $J\subset\{0,\dots,N\}$, et on a

$$\sum_{n\in J} u_n \leq \sum_{n\in\{0,\dots,N\}} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Donc $\left\{\sum_{n\in J} u_n : J\subset\mathbb{N}, J \text{ fini}\right\}$ est majoré par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Cor. Si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ CV, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Théorème (sommation par paquets)

On suppose que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ où les $I_i$ sont deux à deux disjoints. Alors une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i\in I_n} u_i \right)$ converge.

Preuve.

- Supposons $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $J_n \subset I_n$ avec $J_n$ fini, comme $J_n \subset I$,

$$\sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i .$$

Donc $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

De plus, pour $N\in\mathbb{N}$ et $J_0, \dots, J_N$ sous-ensembles finis de $I_0, \dots, I_N$ respectivement,

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i ,$$

puisque $J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_N \subset I$ et est fini.

En passant successivement au sup sur les $J_k$ finis, pour $k = 0, \dots, N$ on en déduit

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{i \in I_n} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i .$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$ est donc convergente et satisfait

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i .$$

- Réciproquement, si les $(u_i)_{i \in I_n}$ sont sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$ converge, pour tout $J \subset I$ fini il existe des indices $n_1, \dots, n_m$ tels que

$$J = \bigcup_{k=1}^{m} (J \cap I_{n_k}),$$

et on a

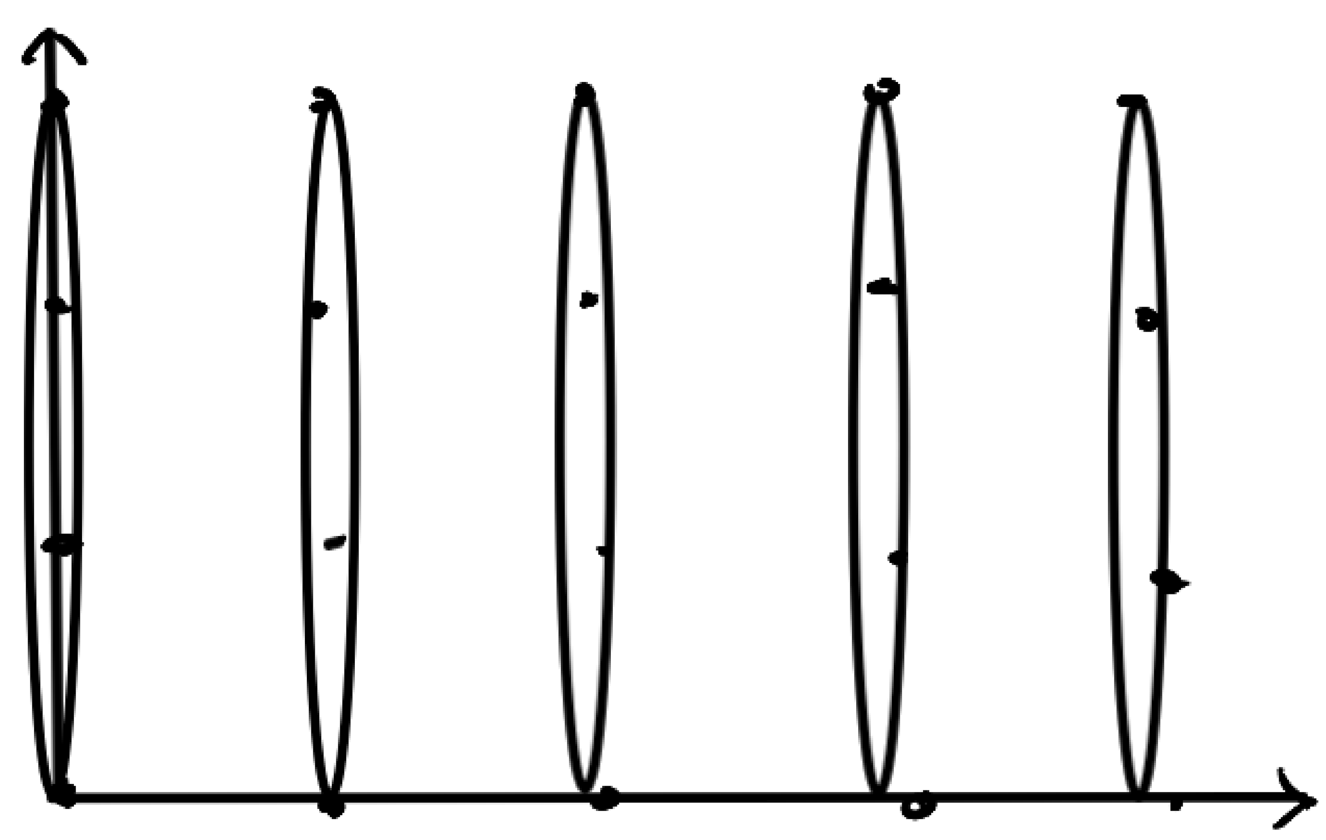
$$\sum_{i \in J} u_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in J \cap I_{n_k}} u_i \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in I_{n_k}} u_i \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i$$

Donc $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et

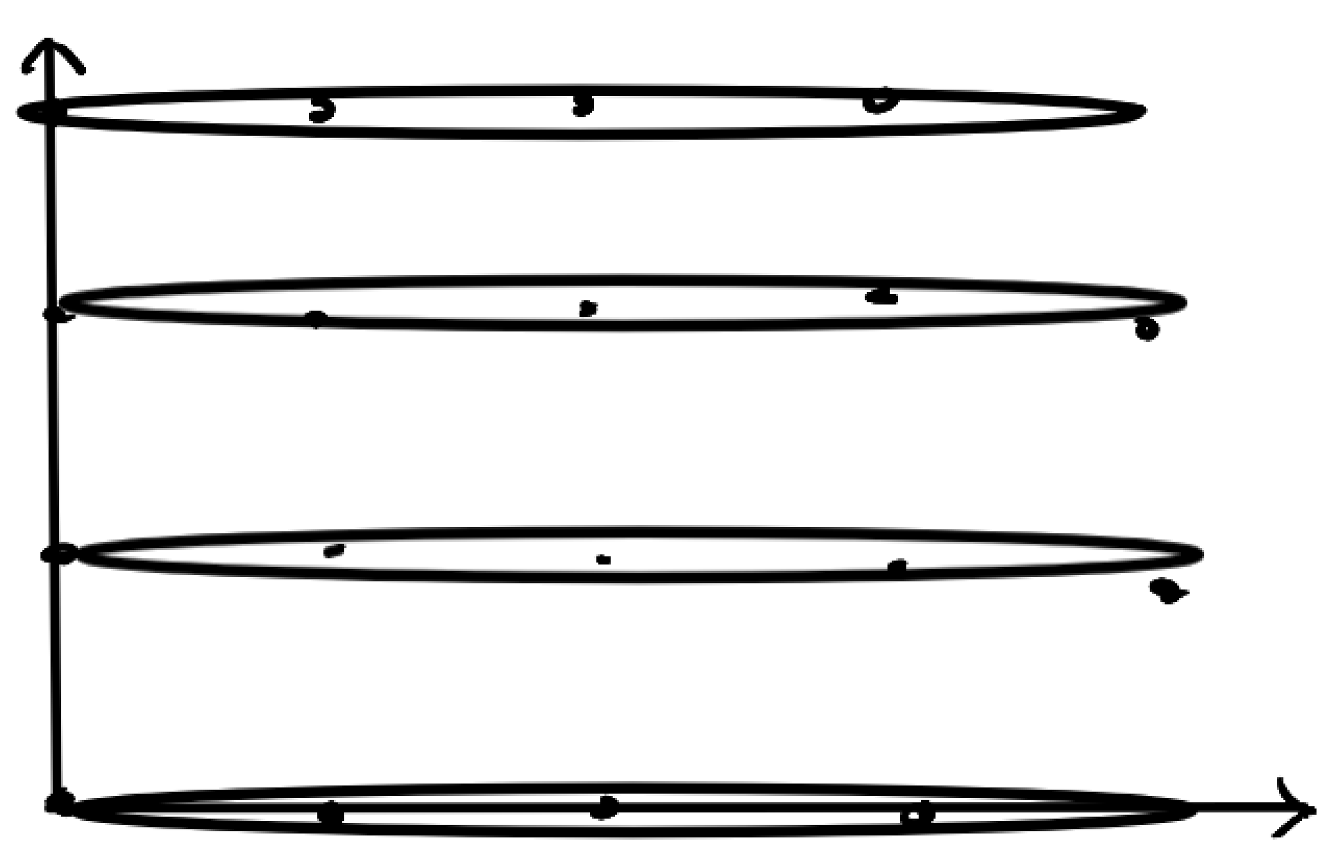
$$\sum_{i \in I} u_i \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} u_i .$$

Exemple : si $I = \mathbb{N}^2$, $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ famille de réels positifs sommables.

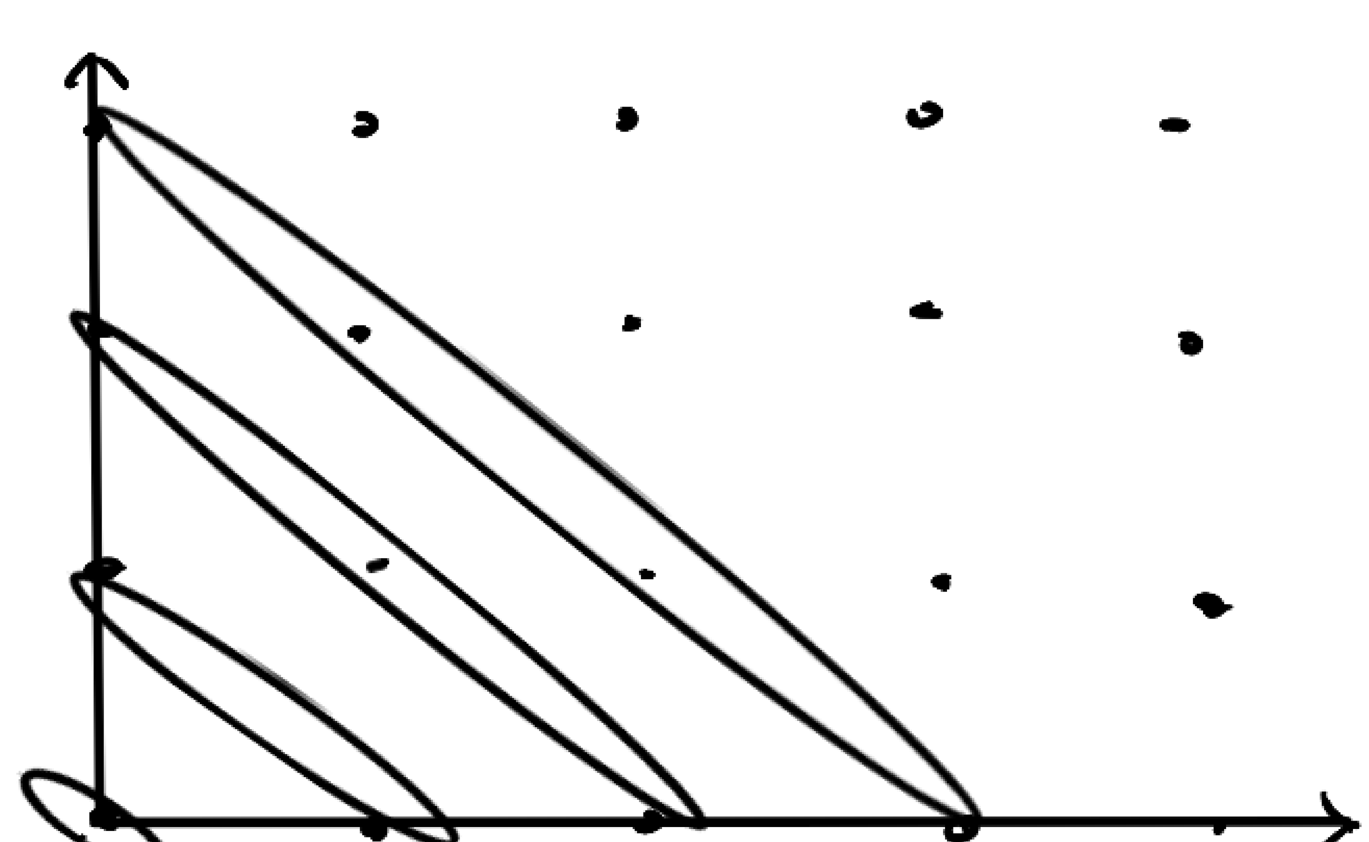
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} u_{ij}$$



$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} u_{ij}$$



$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{ij} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{k\,n-k}$$



## 2) Familles sommables de réels.

**Définition.** Une famille de réels $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

**Proposition.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$ pour tout $i\in I$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, et définit dans ce cas

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- .$$

**Preuve:**
Il suffit de remarquer que, pour tout $J\subset I$ fini,

$$\sum_{i\in J} |u_i| = \sum_{i\in J} u_i^+ + \sum_{i\in J} u_i^- .$$

En décomposant en partie positive et négative on retrouve la sommation par paquets

<u>Théorème</u> : on suppose que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ où les $I_n$ sont deux à deux disjoints. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels sommables. Alors $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n} u_i$ est absolument convergente et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n} u_i = \sum_{i \in I} u_i .$$

Propriétés. Soient $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels sommables.

- Linéarité. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $(u_i+\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i$$

- positivité : si $u_i \geq 0$ pour tout $i\in I$, alors $\sum_{i\in I} u_i \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u_i = 0$ pour tout $i \in I$.

- inégalité triangulaire.

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$$

- Théorème de Fubini : $(u_i v_j)_{(i,j)\in I^2}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I^2} u_i v_j = \sum_{i\in I} u_i \sum_{j\in I} v_j .$$

Preuve du dernier point.

Si $J \subset I^2$ est fini, on a $J \subset \{0,1,\dots,N\}^2$ pour $N$ assez grand, et donc

$$\sum_{(i,j)\in J} |a_i v_j| \leq \sum_{(i,j)\in\{0,\dots,N\}^2} |a_i v_j| = \sum_{i\in\{0,\dots,N\}} |a_i| \sum_{j\in\{0,\dots,N\}} |v_j|$$

$$\leq \sum_{i\in I} |a_i| \sum_{j\in I} |v_j|$$

Donc $(a_i v_j)_{(i,j)\in I^2}$ est sommable.

Soit $\phi : \mathbb{N} \to I$ bijective.

Par sommation par paquets, en décomposant $I^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (I \times \{\phi(n)\})$, on obtient

$$\sum_{(i,j)\in I^2} a_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I} a_i v_{\phi(n)}\right)$$

$$\underset{\text{lin}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(v_{\phi(n)} \sum_{i\in I} a_i\right) = \sum_{j\in I} \left(\sum_{i\in I} a_i\right) v_j$$

$$\underset{\text{lin}}{=} \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} v_j .$$