# Chapitre 3 Variables aléatoires, cas fini

## I Variable aléatoire et loi d'une variable aléatoire

**Définition.** Soit $\Omega$ un univers fini. On appelle variable aléatoire (v.a.) toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple :** on lance 3 fois un dé.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^3$.

$$X : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) & \longmapsto & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \end{array}$$

donne la somme des résultats des trois lancers.

En général on utilise les lettres majuscules de la fin de l'alphabet pour les v.a.

Notations probabilistes :

Pour $x$ une valeur possible de $X$ on note

$$\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$

Pour $A$ une partie de $\mathbb{R}$,

$$\{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

Définition (loi d'une v.a. finie). Soit $(\Omega, P)$ un espace de probabilité fini et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_N\}$ où $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle loi de $X$ la probabilité $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_N\}) \to [0,1]$ définie par la famille de poids

$$\left(p_{x_i} = \mathbb{P}(X = x_i)\right)_{i \in \{1, \dots, N\}}.$$

Rq : on a bien $p_{x_i} = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, .., N\}$, et

$$\sum_{i=1}^{N} p_{x_i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\underset{\text{deux à deux disjoints}}{=} \mathbb{P}\left( \bigcup_{i=1}^{N} \{X = x_i\} \right)$$

$$= \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

## II Lois usuelles de variables aléatoires, espace fini.

* Loi uniforme.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\{x_1, .., x_N\}$, $N \in \mathbb{N}^*$, est de loi uniforme (on note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, .., x_N\})$)

si $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{N}$ pour tout $i \in \{1, .., N\}$.

Ex : on lance 1 dé équilibré. $X$ résultat du lancer. $X \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,6\})$.

* Loi de Bernoulli.

Soit $p \in [0,1]$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est de loi de Bernoulli de paramètre $p$ (on note $X \sim \mathcal{B}(p)$) si $X$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, et

$$\begin{cases} P(X=1) = p \\ P(X=0) = 1-p \end{cases}.$$

Permet de modéliser une expérience avec comme résultat possible un succès $(X=1)$ ou un échec $(X=0)$, et avec probabilité de succès $p$ (épreuve de Bernoulli).

* <u>Loi Binomiale.</u>

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit la loi binomiale de paramètres $N$ et $p$ (on note $X \sim \mathcal{B}(N,p)$) si $X$ est à valeurs dans $\{0,1,\dots,N\}$ et

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

pour tout $k \in \{0,1,\dots,N\}$.

C'est la loi du nombre $X$ de succès lorsque l'on répète $n$ fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p$.

<u>Exemple</u> : on lance 10 fois un dé à six faces équilibré, manière indépendante. Soit $X$ le nombre de 6 obtenu. $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.

* Loi hypergéométrique.

Une urne contient $N$ boules indiscernables au toucher, donc $K$ rouges $(K \leq N)$ et $N-K$ blanches. On tire sans remise $n$ boules $(n \leq N)$.

$X$ désigne le nombre de boules rouges tirées. Les valeurs possibles de $X$ sont les entiers $k$ satisfaisant $k \leq n$, $k \leq K$, $k \geq 0$

et $n-k \leq N-K \Leftrightarrow n-N+K \leq k$, i.e.

$\max(0, n-N+K) \leq k \leq \min(n, K)$.

Pour tout $\max(0, n-N+K) \leq k \leq \min(n, K)$ on a

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

# III Couples, vecteurs aléatoires et indépendance.

Pour deux v.a.r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$, on utilisera la notation

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) := \mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Définition: soient deux variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_m\}$. La loi du couple $(X, Y)$ est la probabilité

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_m\}) \longrightarrow [0,1]$$

définie par la famille de poids

$$\left(p_{x_i, y_j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)\right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}}$$

Rq : on a bien $0 \leq p_{x_i, y_j} \leq 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{Y = y_j\}\right)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \{X = x_i, Y = y_j\}\right)$$

$$\underset{\text{2 à 2 disjoints}}{=} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

Etant donnée la loi d'un couple $(X, Y)$ de variables aléatoires, les lois de $X$ et $Y$ sont appelée lois <u>marginales</u>. On a de plus

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Ex : $(X,Y)$ couple de v.a. à valeurs dans $\{0,1\}^2$ de loi donnée par

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$ $\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$

On peut représenter cette loi par le tableau

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 1/6 |
| 1 | 1/4 | 1/4 |

X est à valeurs dans $\{0,1\}$, avec

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{2}$.

Donc $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

D'autre part $Y \sim \mathcal{B}(5/12)$.

<u>Définition</u>. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $\Omega$, à valeurs respectivement dans des parties finies $E_1, \ldots, E_n$ de $\mathbb{R}$.
La loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est la probabilité

$$P_{(X_1, \ldots, X_n)} : \mathcal{P}(E_1 \times \ldots \times E_n) \longrightarrow [0,1]$$

associée à la famille de poids

$$\left( p_{x_1, \ldots, x_n} = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \right)_{(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n}$$

Définition Soient $n \geq 1$ et $X_1 \dots X_n$ des variables aléatoires sur $\Omega$, à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$ des parties finies de $\mathbb{R}$.
$X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes si, pour tous $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Exemple : dans le cas d'un schéma de Bernoulli de $n$ expériences indépendantes de proba de succès $p$, si l'on note $X_i$ la v.a. valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ expérience a pour résultat un succès et 0 si son résultat est un échec, alors $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et

$$\underbrace{S_n}_{\text{nbr de succès.}} = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$$

<u>Proposition</u> : en gardant les notations de la définition précédente, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi pour toutes parties $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}$,

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n)$$

<u>Preuve</u>.

Pour simplifier on se limite au cas $n=2$.

Il est clair que si $P(X \in A, Y \in B) = P(A)P(B)$ pour tous $A, B \subset \mathbb{R}$, alors $X$ et $Y$ sont indépendantes.

Supposons maintenant $X$ et $Y$ indépendants.

Soient $A, B$ des parties de $\mathbb{R}$.

Puisque $P(X \in A) = P(Y \in A \cap E_1)$ on peut se ramener au cas où $A$ et $B$ sont finis, de la forme $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

↑ 2 à 2 distincts

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

On a

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = a_i, Y \in B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)$$

$$\underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = a_i)\mathbb{P}(Y = b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = a_i) \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(Y = b_j)$$

$$= \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B).$$

<u>Corollaire</u>. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions, alors les v.a $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

<u>Ex</u>: si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $X^2$ et $Y^3$ sont indépendants.

Preuve

Pour toutes parties $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(f_1(X_1) \in A_1, \dots, f_n(X_n) \in A_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_1 \in f_1^{-1}(A_1), \dots, X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right)$$

$$\left(f_i(X_i)\right)^{-1}(A_i) = X_i^{-1}\left(f_i^{-1}(A_i)\right)$$

$$\underset{\text{indep. des } X_i}{=} \mathbb{P}\left(X_1 \in f_1^{-1}(A_1)\right) \times \dots \times \mathbb{P}\left(X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(f_1(X_1) \in A_1\right) \times \dots \times \mathbb{P}\left(f_n(X_n) \in A_n\right)$$

On en déduit que $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

## IV Espérance, variance.

**Définition** (espérance) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les $x_i$ sont distincts. L'espérance de $X$ est le réel

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Il s'agit de la moyenne des $x_i$ pondérée par les poids $\mathbb{P}(X=x_i)$. $\mathbb{E}[X]$ ne dépend que de la loi de $X$.

Ex: si $X \sim \mathcal{B}(p)$, on a avec $p \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$$
$$\mathbb{P}(X=1) = p$$

On obtient $\mathbb{E}[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p$
$= p$.

Rq: si $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{E}[X] \geq 0$
si pour $a, b \in \mathbb{R}$ $x_i \in [a,b]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{E}[X] \in [a,b]$.

<u>Proposition</u> : Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ (où les $x_i$ sont distincts) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, la v.a. $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ a pour espérance

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

<u>Preuve</u>. Si l'on pose $Y = f(X)$, $Y$ est une variable aléatoire finie, prenant ses valeurs dans $f(\{x_1, \dots, x_n\})$, de cardinal $m \geq 1$. Notons $y_1, \dots, y_m$ ces valeurs.

Par définition

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{m} y_i \, \mathbb{P}(Y = y_i).$$

Mais, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned}\{Y = y_i\} &= \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\} \\ &= \{\omega \in \Omega : f(X)(\omega) = y_i\} \\ &= \bigcup_{\substack{x \text{ antécédent} \\ \text{de } y_i \text{ par } f}} \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{\substack{x \text{ antécédent} \\ \text{de } y_i \text{ par } f}} \{X = x\}.$$

deux à deux disjoints.

On a donc

$$\mathbb{P}(Y = y_i) = \sum_{\substack{x \text{ antécédent} \\ \text{de } y_i \text{ par } f}} \mathbb{P}(X = x)$$

et ainsi

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x \text{ antécédent} \\ \text{de } y_i \text{ par } f}} \underbrace{y_i}_{= f(x)} \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \text{ valeur} \\ \text{possible de } X}} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

<u>Exemple</u>: si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p.$$

$$\mathbb{E}[e^{2X}] = e^{2\times 0} \times (1-p) + e^{2\times 1} p$$
$$= 1-p+e^2 p = 1+(e^2-1)p$$

<u>Rq</u>: Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a sur $\Omega$ à valeurs dans des ensembles finis $E_1, \dots, E_n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction, la même démonstration donne la formule

$$\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{x_1 \in E_1} \dots \sum_{x_n \in E_n} f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

<u>Proposition</u> (Linéarité). Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. finies et $a, b, c \in \mathbb{R}$

Alors
$$\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$$
$$\mathbb{E}[aX+cY] = a\mathbb{E}[X] + c\mathbb{E}[Y]$$

Preuve.

En notant $x_1, \dots, x_n$ les valeurs possibles de $X$
$y_1, \dots, y_m$ les valeurs possibles de $Y$

On a

$$\mathbb{E}[aX+b] = \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b)\, \mathbb{P}(X = a_i)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbb{P}(X = a_i) + b \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$= a\, \mathbb{E}[X] + b$$

De plus,

$$\mathbb{E}[aX+bY] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(ax_i+by_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a x_i \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b y_j \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{=\mathbb{P}(X=x_i)}$$

$$+ b \sum_{j=1}^{m} y_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{=\mathbb{P}(Y=y_j)}$$

$$= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Exemple : si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants, de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

et $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = np$.

Définition (variance) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. finie. La variance de $X$ est le réel positif

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

On appelle écart-type de $X$ la racine carrée de la variance de $X$.

Rq : on a bien

$$\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + (\mathbb{E}[X])^2\right]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Ex : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathbb{E}[X^2] = p$ et donc $\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

Rq : La variance et l'écart type de $X$ mesure la dispertion de $X$ autour de sa moyenne.

Proposition. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. finie et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\text{Var}(aX+b) &= \mathbb{E}\left[\left(aX+b-\mathbb{E}[aX+b]\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(aX+\cancel{b}-a\mathbb{E}[X]-\cancel{b}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[a^2\left(X-\mathbb{E}[X]\right)^2\right] \\ &= a^2\text{Var}(X).\end{aligned}$$

<u>Définition:</u> Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a finies. On appelle covariance de $X$ et $Y$ le réel

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

<u>Rq:</u> $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.

<u>Prop.</u> Si $X, Y$ sont deux v.a. finies sur $\Omega$,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. finies sur $\Omega$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

<u>Preuve</u> (pour $n=2$)

On a

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}\left[\left(X+Y-\mathbb{E}[X+Y]\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X] + Y - \mathbb{E}[Y]\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)^2 + 2\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right) + \left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y).$$

<u>Proposition</u>: Si $X$ et $Y$ sont deux v.a.f.r.s sur $\Omega$ <u>indépendantes</u>, et $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)]$$

Preuve :

On note $x_1, \dots, x_n$ les valeurs possibles de $X$

$y_1, \dots, y_m$ les valeurs possibles de $Y$

On a

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i)g(y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$\underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i)g(y_j)\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}(X=x_i)\right) \sum_{j=1}^{m} g(y_j)\mathbb{P}(Y=y_j)$$

$$= \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)].$$

Corollaire. Si $X$ et $Y$ sont deux v.a. finies sur $\Omega$ indépendantes, alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

Preuve.
Si $X$ et $Y$ sont indépendantes,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]$$
$$\underset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}\big[X-\mathbb{E}[X]\big]\,\mathbb{E}\big[Y-\mathbb{E}[Y]\big]$$
$$\underset{\text{linéarité}}{=} \big(\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]\big)\big(\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[Y]\big)$$
$$= 0.$$

Corollaire. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. finies sur $\Omega$ indépendantes

$$\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \dots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Ex : si $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

et $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \dots + \mathrm{Var}(X_n)$

$$= np(1-p).$$