

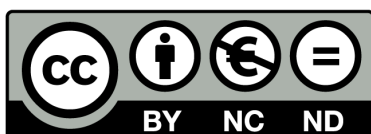
METHODES ENERGETIQUES

METHODE DES ELEMENTS FINIS

Département Génie Mécanique et Productique

Dimensionnement Des Structures

R5 MMP 02



Michel MASSENZIO

Méthodes énergétiques

1. Introduction
 - Ressort
 - Dualité forces-déplacements
2. Energie de déformation élastique
 - Principe de conservation de l'énergie
 - Travail des actions extérieures
 - Energie de déformation
3. Flexibilité
 - Matrice de flexibilité
 - Théorème de Maxwell-Mohr
 - Théorèmes de Castigliano
 - Systèmes isostatiques / hyperstatiques
4. Rigidité
 - Matrice de rigidité

Méthode des éléments finis

1. Introduction
 - Notion de maillage, d'éléments finis et de nœuds
 - Degrés de libertés
 - Interpolation
2. Matrice de rigidité d'un élément libre
 - Matrice d'interpolation des déplacements
 - Matrice d'interpolation des déformations
 - Matrice des contraintes
 - Matrice de rigidité
3. MEF appliquée aux poutres
 - Sollicitations simples
 - Matrice de rigidité d'un élément libre
 - Transformation des coordonnées par rotation du repère
 - Assemblage
4. Exemple

Le document est volontairement aéré afin d'être annoté : ne pas hésiter à écrire sur le poly !
--

METHODES ENERGETIQUES

Département Génie Mécanique et Productique

Dimensionnement Des Structures

R5 MMP 02



Michel MASSENZIO

Méthodes énergétiques

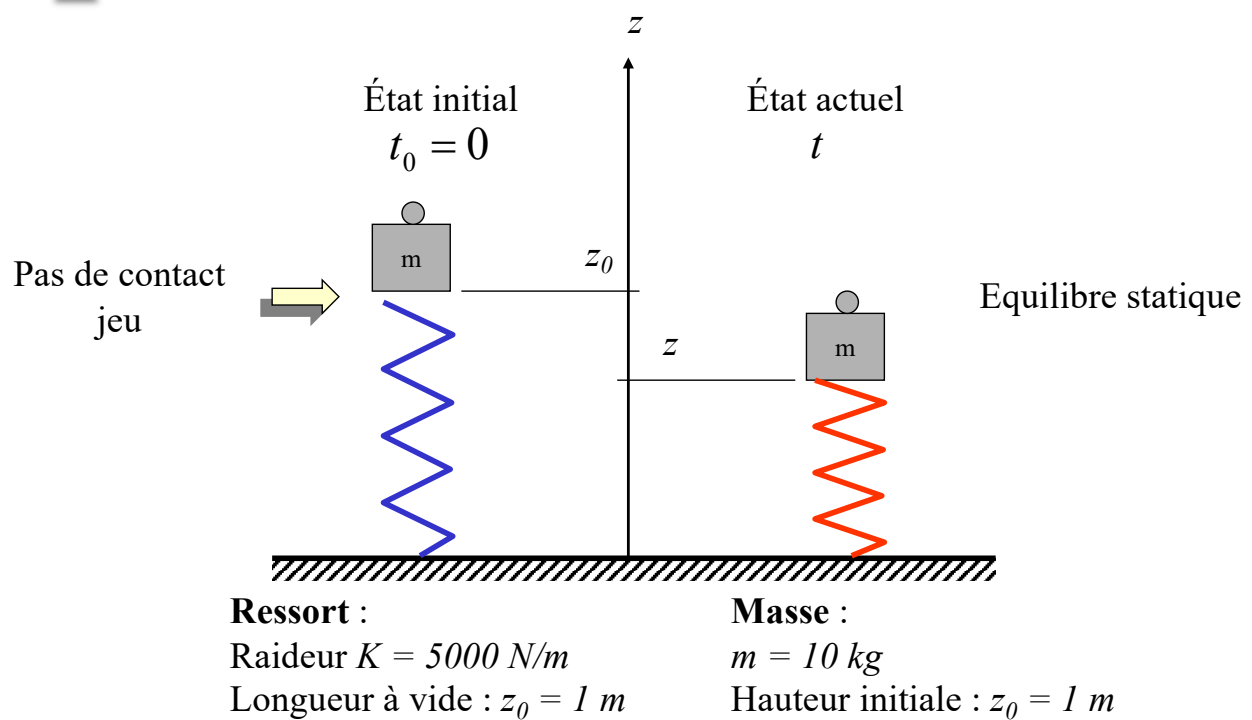
1. Introduction
 - Ressort
 - Dualité forces-déplacements
2. Energie de déformation élastique
 - Principe de conservation de l'énergie
 - Travail des actions extérieures
 - Energie de déformation
3. Flexibilité
 - Matrice de flexibilité
 - Théorème de Maxwell-Mohr
 - Théorèmes de Castigliano
 - Systèmes isostatiques / hyperstatiques
4. Rigidité
 - Matrice de rigidité

1. INTRODUCTION

1. INTRODUCTION

1.1 Energie de déformation d'un ressort

▲ Ressort : Structure élastique linéaire



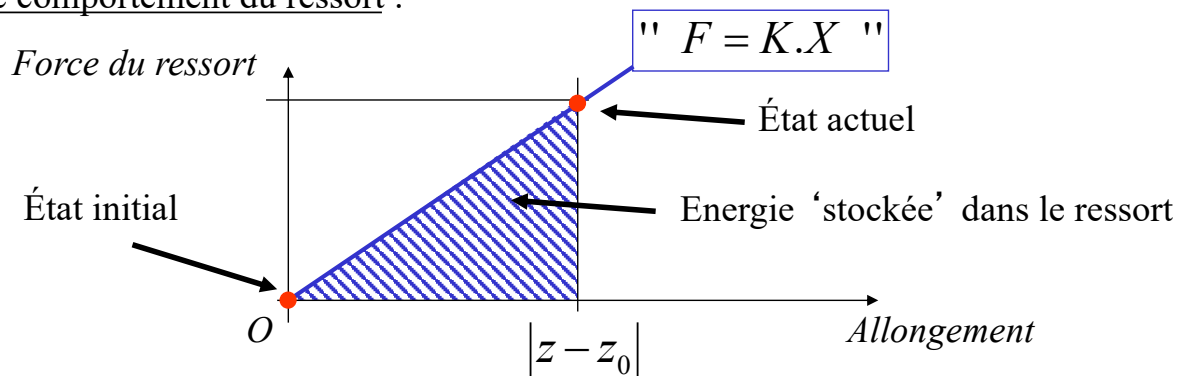
Mise en équilibre (état actuel) :

Actions $m \cdot g = K \cdot |z - z_0|$

Poids de la masse m   'Allongement' du ressort

Déplacements $|z - z_0| = \frac{m \cdot g}{K}$

Loi de comportement du ressort :



Energie potentielle de la masse :

État initial : $W_0^m = 1/2 \cdot m \cdot g \cdot z_0$

État actuel : $W^m = 1/2 \cdot m \cdot g \cdot z$

Différence : $\Delta W^m = 1/2 \cdot m \cdot g \cdot (z - z_0)$

$\Delta W^m = 0,5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0,02 = 1 \text{ Joule}$

Energie potentielle du ressort :

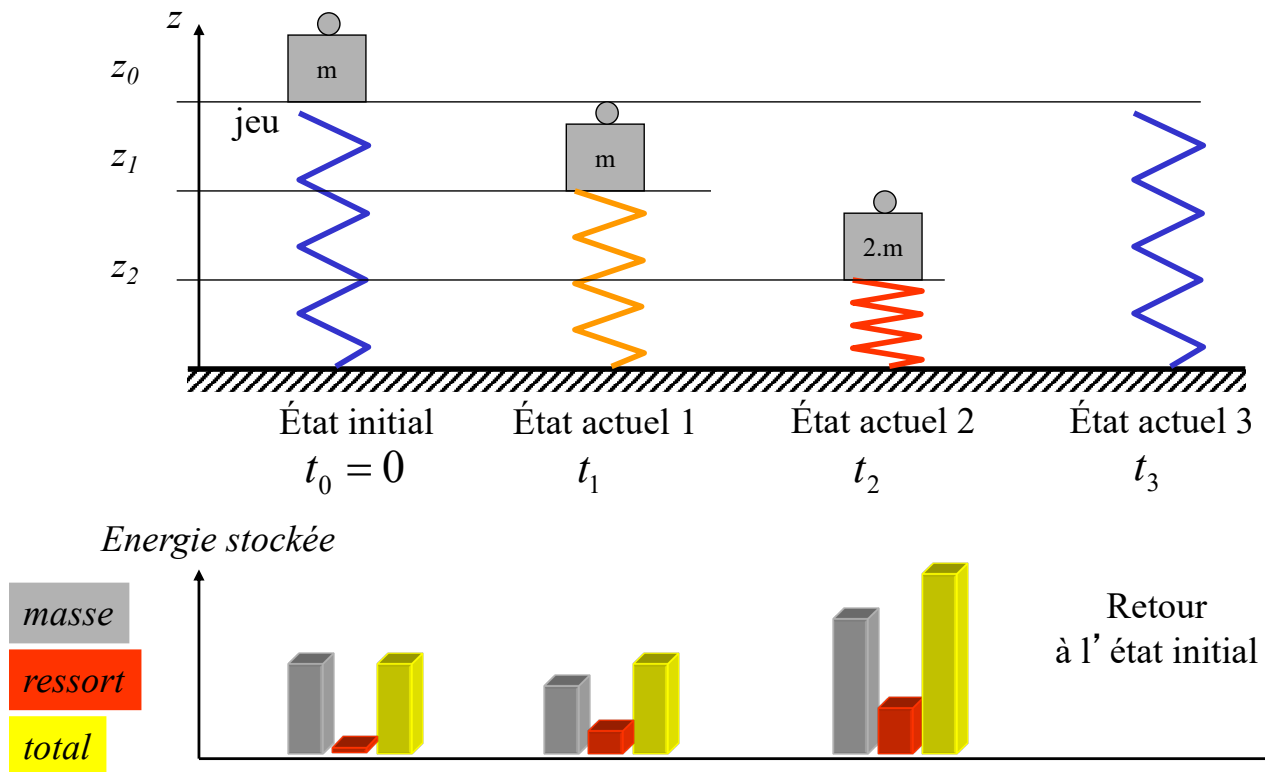
État initial : $W^R = 0$

État actuel : $W^R = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (z - z_0)^2$

$\Delta W^R = 0,5 \cdot 5000 \cdot 0,02^2 = 1 \text{ Joule}$

Différence
d' énergie potentielle
=
Energie 'stockée'
dans le ressort
(sous forme élastique)

Linéarité - Elasticité :



1.2 Généralisation

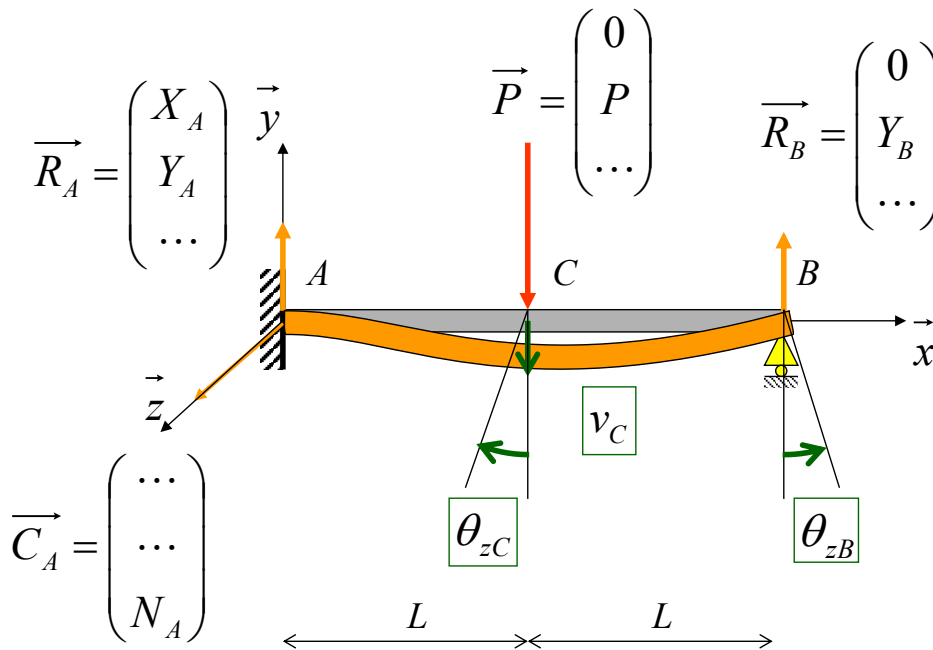
Système considéré : Structure élastique linéaire

Ressort		Structure élastique linéaire
Masse		Actions extérieures

Energie stockée dans le ressort		Energie de déformation élastique de la structure
Variation d'énergie potentielle de la masse		Travail ou énergie des actions extérieures

1.3 Dualité Forces-Déplacements

Exemple : structure plane



Méthode des forces

1. Inconnues primaires : statiques
(actions extérieures sur la structure réactions aux limites)
 - o Calcul des 4 inconnues statiques : X_A, Y_A, Y_B, N_A
2. Inconnues secondaires : cinématiques
(déplacements)
 - o Calcul des 3 inconnues cinématiques : $v_C, \theta_{zC}, \theta_{zB}$

Méthode de Maxwell-Mohr (charge unité)
Méthode de Castigliano

**Méthode des déplacements**

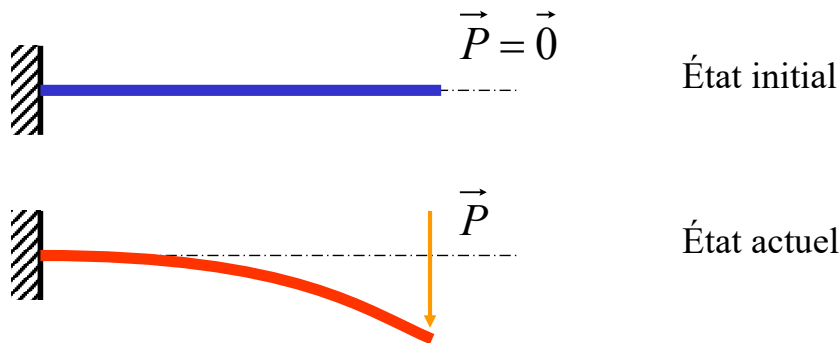
1. Inconnues primaires : cinématiques
(déplacements)
 - o Calcul des 3 inconnues cinématiques : v_C , θ_{zC} , θ_{zB}
2. Inconnues secondaires : statiques
(actions extérieures sur la structure réactions aux limites)
 - o Calcul des 4 inconnues statiques : X_A , Y_A , Y_B , N_A

Méthode du déplacement unité
Méthode des éléments finis

2. ENERGIE DE DEFORMATION ELASTIQUE

2.1 Principe de conservation de l' énergie

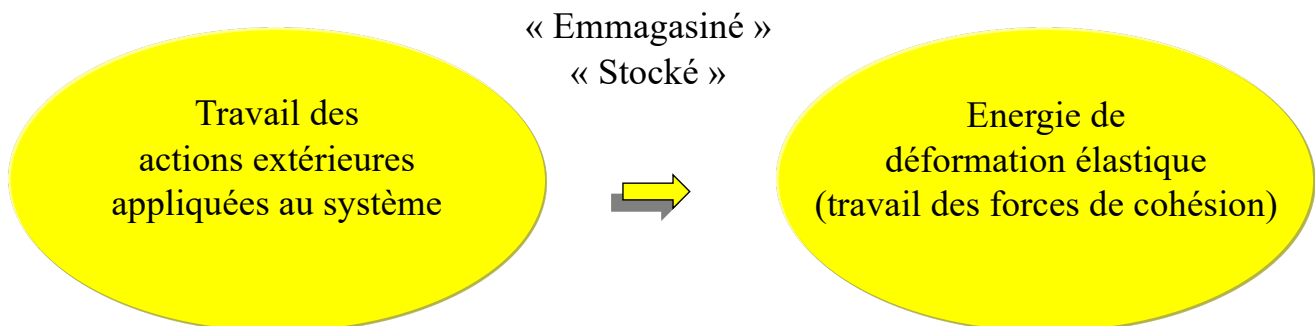
2.1.1 Hypothèses



- Déformation isotherme (effets thermiques négligés)
- Dissipation interne négligée (amortissement)
- Action extérieure appliquée lentement (temps infini – effets d' inertie négligés))

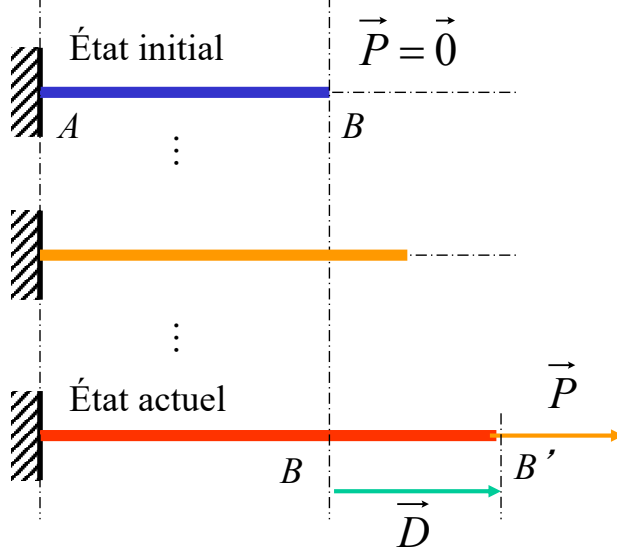
2.1.2 Principe de conservation de l' énergie

$$W_{ext} = W_{def}$$

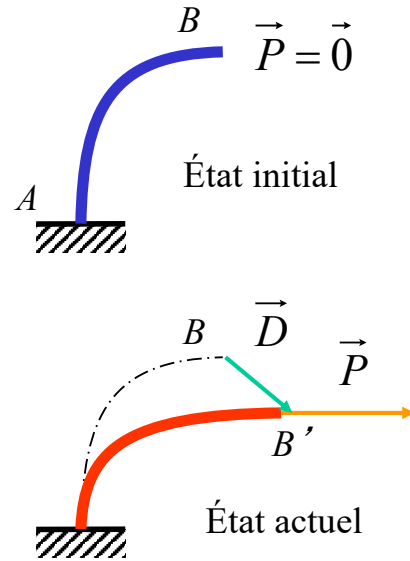


2.2 Travail des actions extérieures

2.2.1 Travail d'une force

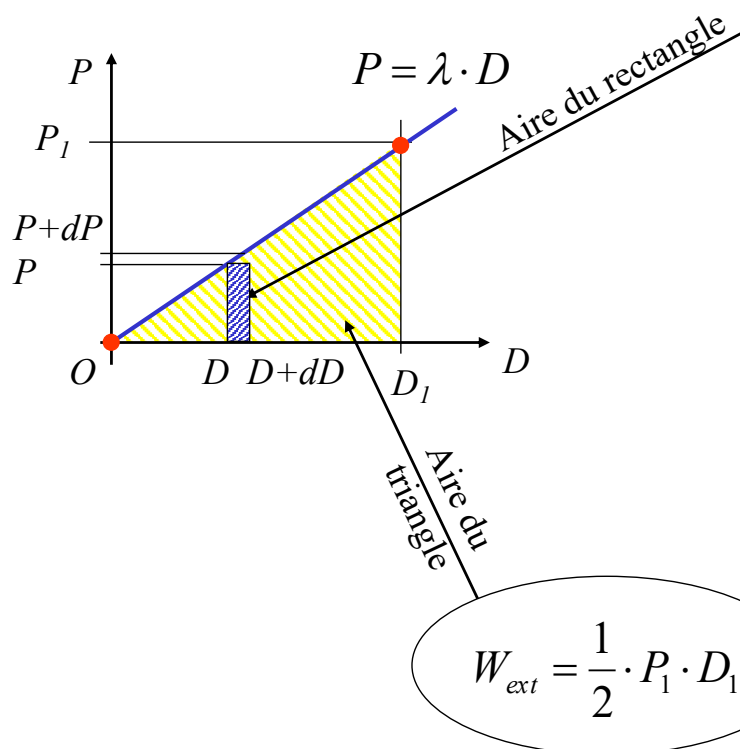


$\vec{P}$: Force appliquée au point B
 $\vec{D}$: Déplacement du point B



$\vec{P}$ & $\vec{D}$ ne sont pas
Forcément colinéaires

Relation force / déplacement



$$dW_{ext} = P \cdot dD$$

$$W_{ext} = \int_0^{D_1} P \cdot dD$$

$$W_{ext} = \int_0^{D_1} \lambda \cdot D \cdot dD$$

$$W_{ext} = \left[\frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot D^2 \right]_0^{D_1}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot D_1^2$$

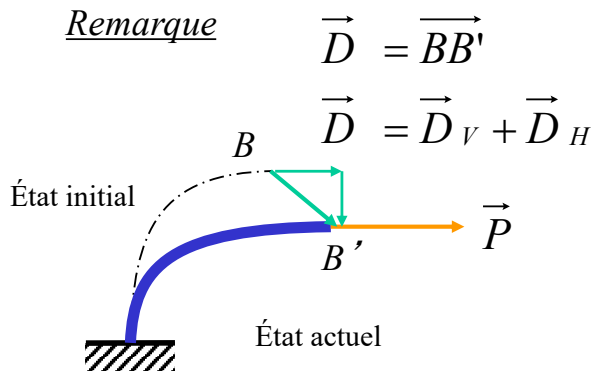
Synthèse : travail d'une force extérieure

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D}$$

en Joules (J)

Force appliquée en B (N)

Déplacement correspondant (m)
(seul le déplacement // à P est intéressant)



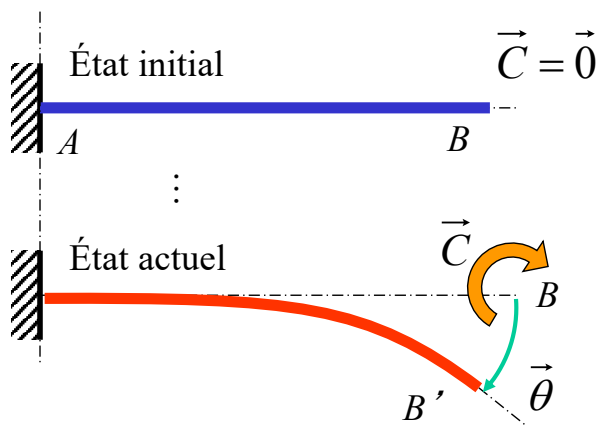
$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D} \quad \text{Produit scalaire}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \|P\| \cdot \|D\| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{D})$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot D_H$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [D]$$

2.2.2 Travail d'un couple



$\vec{C}$: Couple appliqué au point B

$\vec{\theta}$: Rotation du point B

Par analogie avec § 2.2.1 :

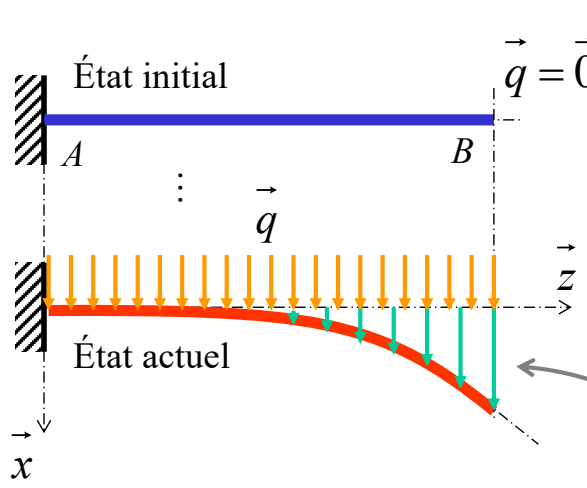
$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{C} \cdot \vec{\theta}$$

en Joules (J)

Couple appliqué en B (N.m)

Rotation correspondante (rad)
(seule la rotation // à C est intéressante)

2.2.3 Travail d'une charge répartie



État initial

État actuel

$\vec{q} = \vec{0}$

$\vec{q}$: Force linéique appliqué sur la poutre (N/m)

$$dW_{ext} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot dz \cdot x$$

$$W_{ext} = \int \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot dz$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \underbrace{\int x \cdot dz}_{\text{Aire sous la déformée}}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot S$$

en Joules (J)

Charge linéique (N/m)

Aire sous la déformée (m²)
(pas de signification physique)

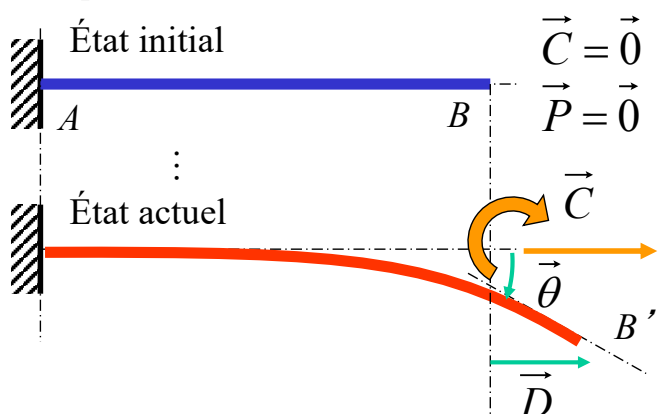
2.2.4 Superposition

$$W_{ext}^{total} = \sum_{i=1}^n W_{ext}^i$$

$$W_{ext}^{total} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot [P_i]^T \cdot [D_i]$$

n : nombre d'action extérieures appliquées à la structure

Exemple



État initial

État actuel

$\vec{C} = \vec{0}$

$\vec{P} = \vec{0}$

$\vec{C}$

$\vec{P}$

$\vec{\theta}$

$\vec{D}$

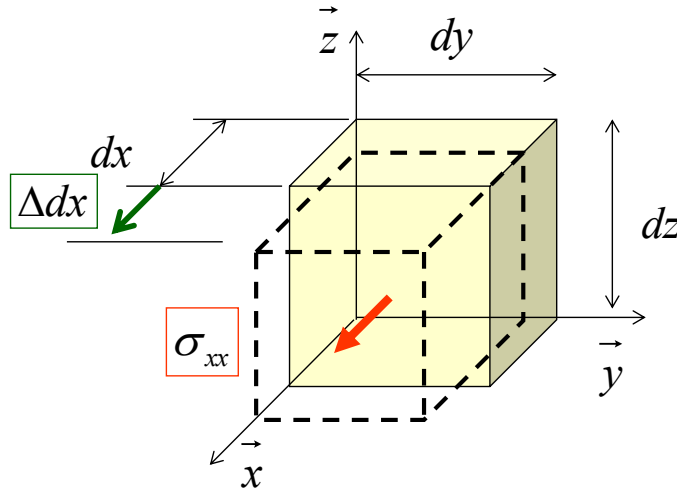
B'

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{C} \cdot \vec{\theta} + \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D}$$

2.3 Energie de déformation élastique

2.3.1 Energie associée à une contrainte normale

Cube élémentaire : $dx \times dy \times dz$



Face avant : σ_{xx} constant

Force : $\sigma_{xx} \cdot dA$

$$\sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz$$

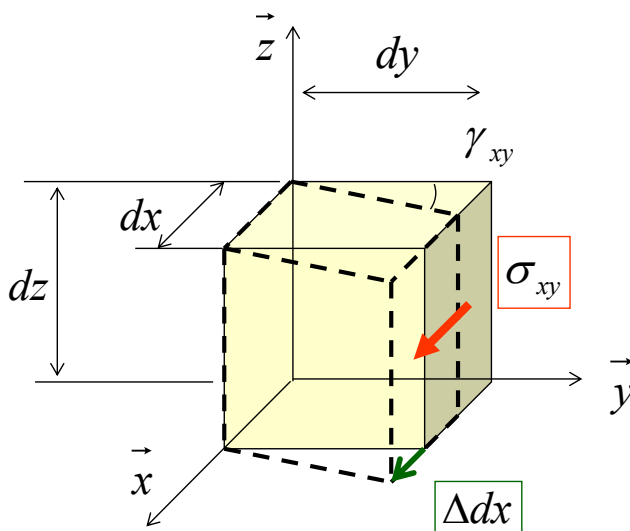
Déplacement : $\Delta dx = \varepsilon_{xx} \cdot dx$

Avec: $dW_{def} = dW_{ext}$

$$dW_{def} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} \cdot dV$$

2.3.2 Energie associée à une contrainte tangentielle

Cube élémentaire : $dx \times dy \times dz$



Face droite : σ_{xy} constant

Force : $\sigma_{xy} \cdot dA$

$$\sigma_{xy} \cdot dx \cdot dz$$

Déplacement : $\Delta dx = \gamma_{xy} \cdot dy$

Avec: $dW_{def} = dW_{ext}$

$$dW_{def} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy} \cdot dV$$

2.3.3 Cas général : énergie associée à un état de contrainte 3D

Etat de contrainte :

3 contraintes normales
3 contraintes tangentielles

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

Etat de déformation :

3 déformations normales
3 distorsions

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Théorème de superposition :

$$dW_{def} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]^T \cdot [\varepsilon] \cdot dV$$

Intégration sur le volume :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} [\sigma]^T \cdot [\varepsilon] \cdot dV$$

Prise en compte de la loi de comportement (Hooke) : $[\varepsilon] = [C]^{-1} \cdot [\sigma]$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} [\sigma]^T \cdot [C]^{-1} \cdot [\sigma] \cdot dV$$

$$[\sigma]^T \cdot [C]^{-1} \cdot [\sigma] =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & [\sigma]^T \cdot [C]^{-1} \cdot [\sigma] \dots \\
 &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}] \cdot \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11}) \\ \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ 2(1+\nu)\sigma_{12} \\ 2(1+\nu)\sigma_{23} \\ 2(1+\nu)\sigma_{31} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{2\nu}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \frac{1}{G}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)
 \end{aligned}$$

$$W_{def} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{1}{E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{2\nu}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \frac{1}{G}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right) \cdot dV$$

2.3.4 Cas particuliers

2.3.4.1 Energie associée à une contrainte plane

Etat de contrainte :

2 contraintes normales
1 contrainte tangentielle

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 \end{bmatrix}$$

Etat de déformation :

3 déformations normales
1 distorsion

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} = 0 \\ \gamma_{31} = 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{1}{E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - \frac{2\nu}{E} \cdot \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{1}{G} \cdot \sigma_{12}^2 \right) \cdot dV$$

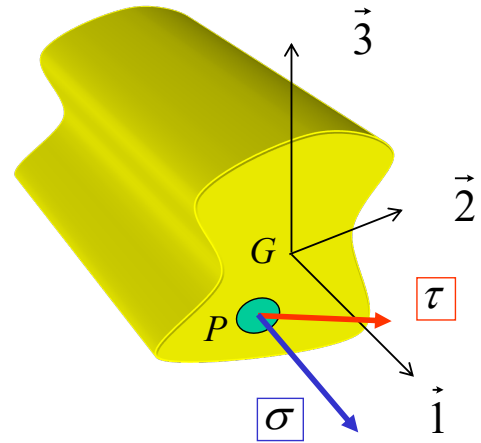
2.3.4.2 Energie associée à une poutre

Etat de contrainte :

1 contrainte normale

1 contrainte tangentielle

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} = \sigma \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{12} = \tau \\ \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 \end{bmatrix}$$



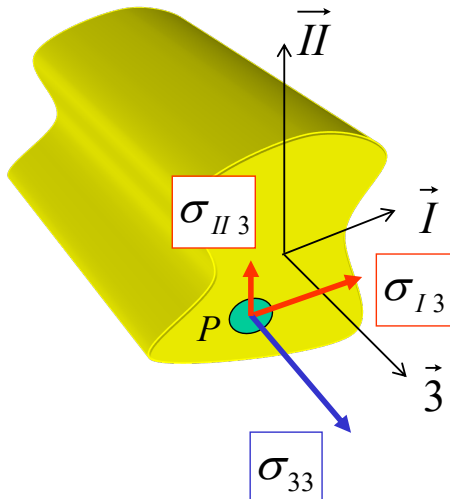
$$W_{def} = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) \cdot dV$$

3. FLEXIBILITE

3.1 Energie de déformation en fonction du torseur de section

3.1.1 Torseur de section

Dans les axes
principaux d'inertie



Etat de contrainte :

• Contrainte normale

$$\sigma = \sigma_{33} = \frac{N_3}{A} - \frac{M_{II}}{I_{II}} \cdot x_I + \frac{M_I}{I_I} \cdot x_{II}$$

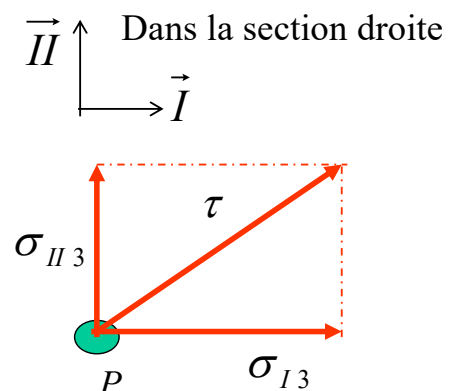
Traction / compression
Flexion autour de II
Flexion autour de I

• Contrainte tangentielle

$$\sigma_{I3} = \frac{T_I}{A} - \frac{M_3}{I_G} \cdot x_{II}$$

$$\sigma_{II3} = \frac{T_{II}}{A} + \frac{M_3}{I_G} \cdot x_I$$

Effort tranchant Moment de torsion



$$\tau = \sqrt{\sigma_{I3}^2 + \sigma_{II3}^2}$$

3.1.2 Energie de déformation

$$W_{def} = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) \cdot dV$$

1 On reporte

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leftarrow \sigma_{33}^2 \\ \tau^2 &\leftarrow \sigma_{I3}^2 + \sigma_{II3}^2 \end{aligned}$$

2 On décompose l'intégration

$$\iiint_V (\dots) \cdot dV = \int_L (\dots) \cdot \left[\iint_A (\dots) \cdot dA \right] \cdot dz$$

Termes constants dans la section droite Termes fonction de x_I & x_{II}

3 On identifie

$$A = \iint_A dA \quad \text{Aire de la section droite}$$

$$Q_I = \iint_A x_{II} \cdot dA = 0 \quad Q_{II} = \iint_A x_I \cdot dA = 0 \quad \text{Moments statiques}$$

$$I_I = \iint_A x_{II}^2 \cdot dA \quad I_{II} = \iint_A x_I^2 \cdot dA \quad \text{Inerties flexion}$$

$$I_{III} = \iint_A x_I \cdot x_{II} \cdot dA = 0 \quad I_G = \iint_A (x_I^2 + x_{II}^2) \cdot dA \quad \text{Inerties torsion Section circulaire}$$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) \cdot dV$$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{\sigma_{33}^2}{E} + \frac{\sigma_{I3}^2}{G} + \frac{\sigma_{II3}^2}{G} \right) \cdot dV$$

1 : On reporte

$$W_{def} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{\left(\frac{N_3}{A} - \frac{M_{II}}{I_{II}} \cdot x_I + \frac{M_I}{I_I} \cdot x_{II} \right)^2}{E} + \frac{\left(\frac{T_I}{A} - \frac{M_3}{I_G} \cdot x_{II} \right)^2}{G} + \frac{\left(\frac{T_{II}}{A} + \frac{M_3}{I_G} \cdot x_I \right)^2}{G} \right) \cdot dV$$

$$W_{def}^{\sigma} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{1}{E} \cdot \left[\left(\frac{N_3}{A} \right)^2 + \left(\frac{M_{II}}{I_{II}} \cdot x_I \right)^2 + \left(\frac{M_I}{I_I} \cdot x_{II} \right)^2 - 2 \cdot \frac{N_3}{A} \cdot \frac{M_{II}}{I_{II}} \cdot x_I + 2 \cdot \frac{N_3}{A} \cdot \frac{M_I}{I_I} \cdot x_{II} - 2 \cdot \frac{M_I \cdot M_{II}}{I_I \cdot I_{II}} \cdot x_I \cdot x_{II} \right] \right) \cdot dV$$

2 : On décompose

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0} \left(\frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N_3}{A} \right)^2 \right) \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_L \left(\frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N_3}{A} \right)^2 \right) \cdot \left[\int_A dA \right] \cdot dz$$

$$= \int_L \frac{(N_3)^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dz$$

3 : On identifie

▲ Energie de déformation pour une poutre

$$W_{def} = \int_L \left(\frac{T_I^2}{2GA} + \frac{T_{II}^2}{2GA} + \frac{N_3^2}{2EA} + \frac{M_I^2}{2EI_I} + \frac{M_{II}^2}{2EI_{II}} + \frac{M_3^2}{2GI_G} \right) \cdot dz$$

Remarque :

'' composante du torseur de section au carré ''

$$W_{def} = \int_L \left(\dots + \frac{\text{Charge}^2}{2 \cdot \text{Matériau} \cdot \text{Inertie}} + \dots \right) \cdot dz$$

'' Elasticité du matériau : ''
E si contrainte normale
G si contrainte tangentielle

'' géométrie section droite : ''
A si force
I si couple

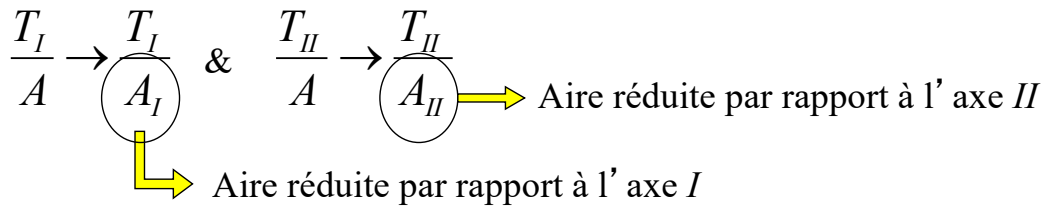
▲ Energie de déformation dans un treillis

Principe de superposition :

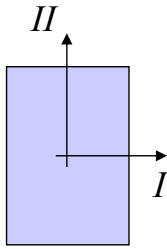
$$W_{def} = \sum_{i=1}^{nb \text{ poutres}} W_{def}^i$$

3.1.3 Corrections éventuelles à apporter

3.1.3.1 Cas du cisaillement

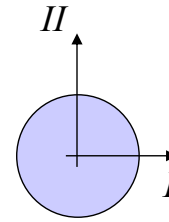


Section rectangulaire



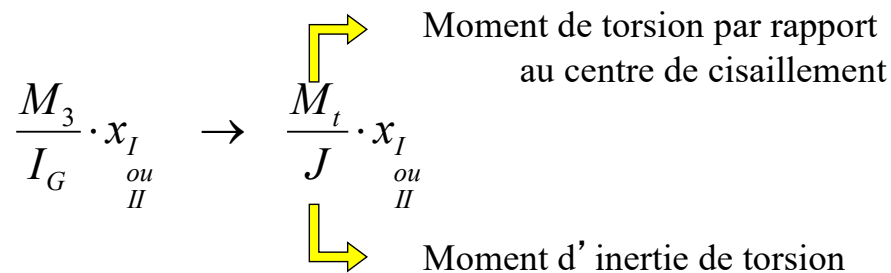
$$A_I = A_{II} = \frac{5}{6} \cdot A$$

Section circulaire



$$A_I = A_{II} = \frac{9}{10} \cdot A$$

3.1.3.2 Cas de la torsion



Centre de cisaillement : point par lequel il faut faire passer les efforts pour qu'il n'y ait pas de torsion (si axe de symétrie : sur l'axe)

Important dans le cas des profils minces ouverts

$J = I_G$ Pour les sections circulaires
sinon -> formulaires

$M_t = M_3$ Pour les sections épaisses

3.2 Méthode de Clapeyron

3.2.1 Définition

▲ Energie de déformation dans une poutre

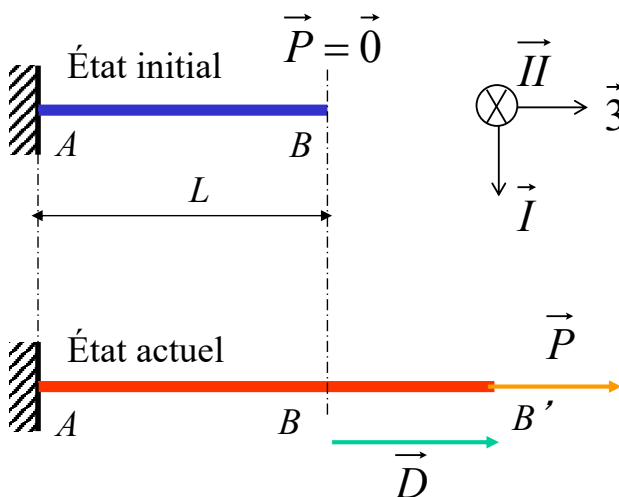
$$W_{def} = \int_L \left(\frac{T_I^2}{2GA} + \frac{T_{II}^2}{2GA} + \frac{N_3^2}{2EA} + \frac{M_I^2}{2EI_I} + \frac{M_{II}^2}{2EI_{II}} + \frac{M_3^2}{2GI_G} \right) \cdot dz$$

▲ Travail des actions extérieures :

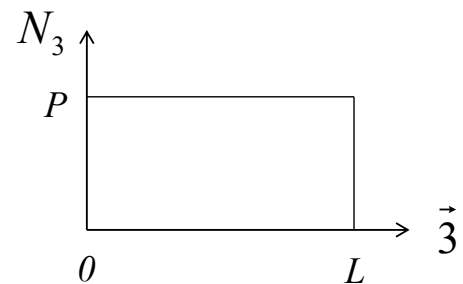
$$W_{ext}^{Force} = \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D} \quad W_{ext}^{couple} = \frac{1}{2} \cdot \vec{C} \cdot \vec{\theta}$$

▲ Principe de conservation de l'énergie : $W_{ext} = W_{def}$

3.2.2 Exemple 1



1 Torseur de section



$T_I \ T_{II} \ M_I \ M_{II} \ M_3 \ : \ nuls$

$\vec{P}$: Force appliquée au point B

$\vec{D}$: Déplacement du point B

2 Energie de déformation

$$W_{def} = \int_L \left(\frac{N_3^2}{2 E A} \right) \cdot dz = \left(\frac{P^2}{2 E A} \right) \cdot \int_0^L dz$$

$$= \frac{P^2 \cdot L}{2 E A}$$

3 Travail des forces extérieures

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D}$$

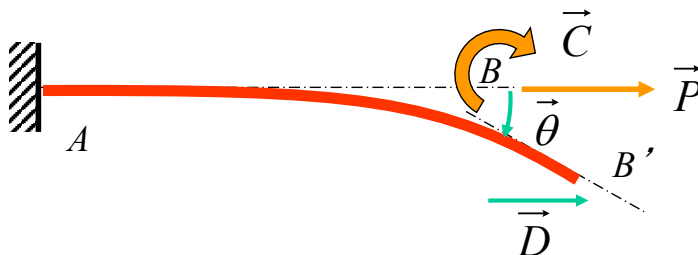
$$= \frac{1}{2} \cdot P \cdot D$$

4 Conservation de l'énergie

Relation effort – déplacement associé

$$\frac{P^2 \cdot L}{2 E A} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot D \quad \text{Soit :} \quad P = \frac{E A}{L} \cdot D$$

3.2.3 Exemple 2



Même démarche
que exemple 1

$$W_{def} = \frac{P^2 \cdot L}{2 E A} + \frac{C^2 \cdot L}{2 E I_t} \quad W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \vec{C} \cdot \vec{\theta} + \frac{1}{2} \cdot \vec{P} \cdot \vec{D}$$

$$\hookrightarrow \frac{P^2 \cdot L}{2 E A} + \frac{C^2 \cdot L}{2 E I_t} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot P \cdot D$$

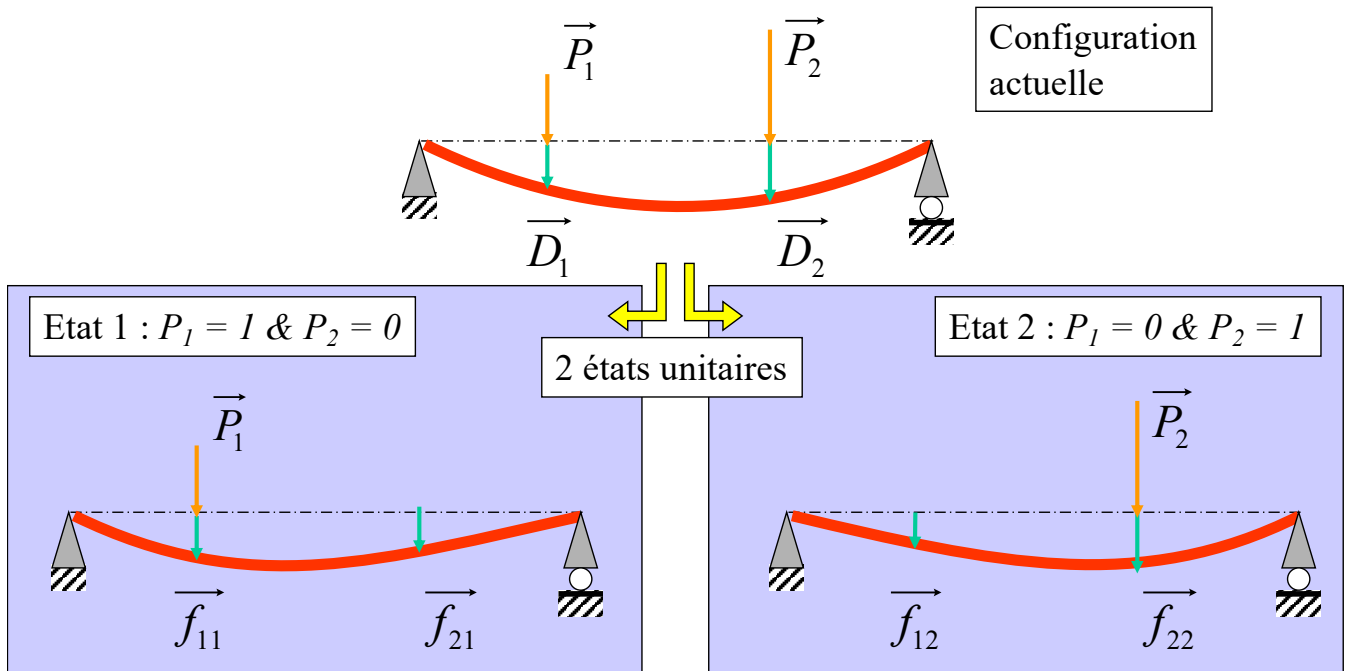
1 seule équation mais 2 actions & 2 déplacements associés

$\hookrightarrow$ Clapeyron intéressant quand une seule action

3.3 Méthode de Maxwell – Mohr

3.3.1 Matrice de flexibilité ou matrice de souplesse

3.3.1.1 Définition (exemple de référence)



Notation

$\vec{f}_{ij}$

ou

f_{ij}

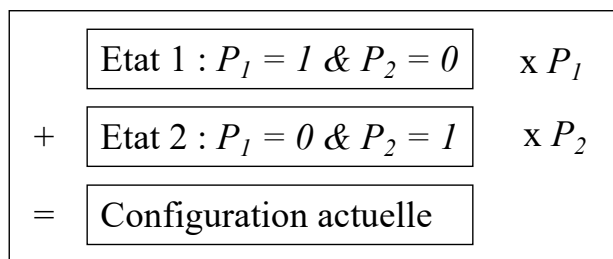
Déplacement en i



Dû à une action unitaire en j



Principe de superposition (système linéaire)



$$\begin{aligned} & f_{11} \times P_1 \\ & + f_{12} \times P_2 \\ & = D_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{21} \times P_1 \\ & + f_{22} \times P_2 \\ & = D_2 \end{aligned}$$

▲ Matrice de flexibilité

Sous forme
matricielle :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Vecteur
déplacements
généralisés Vecteur
charges
généralisés

Généralisation à n actions extérieures sur une structure quelconque (linéaire) :

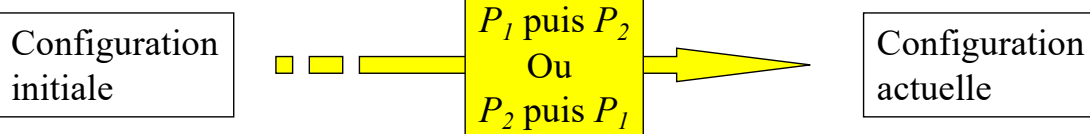
$$[D] = [f] \cdot [P]$$

Avec la matrice de flexibilité :
carrée ($n \times n$)

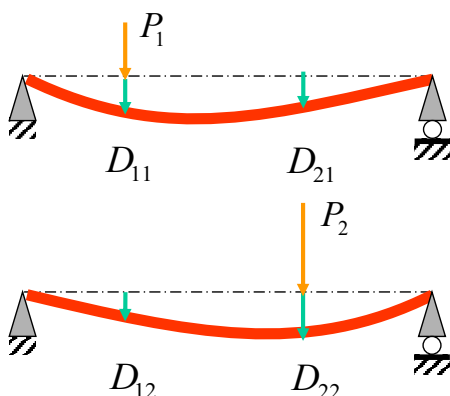
f_{ij} aussi appelé coefficient d'influence

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ & f_{ij} & \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{bmatrix}$$

3.3.1.2 Théorème de Maxwell-Betti



▲ P_1 puis P_2



• P_1

Energie stockée : $W_1 = 1/2 \cdot P_1 \cdot D_{11}$

• Puis P_2

Energie stockée : $W_2 = 1/2 \cdot P_2 \cdot (D_{22} - D_{21})$

Total : $W = 1/2 \cdot P_1 \cdot D_{11} + 1/2 \cdot P_2 \cdot (D_{22} - D_{21})$

▲ P_2 puis P_1

• P_2 Energie stockée : $W_1 = 1/2 \cdot P_2 \cdot D_{22}$

• Puis P_1 Energie stockée : $W_2 = 1/2 \cdot P_1 \cdot (D_{11} - D_{12})$

$$\text{Total : } W = 1/2 \cdot P_2 \cdot D_{22} + 1/2 \cdot P_1 \cdot (D_{11} - D_{12})$$

▲ Synthèse

Energie de déformation actuelle indépendante de l'ordre du chargement

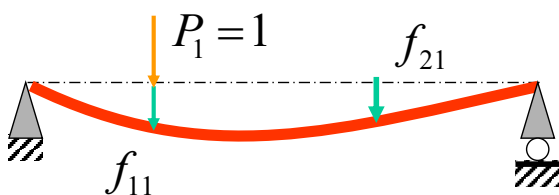
$$W = 1/2 \cdot P_1 \cdot D_{11} + 1/2 \cdot P_2 \cdot (D_{22} - D_{21}) = 1/2 \cdot P_2 \cdot D_{22} + 1/2 \cdot P_1 \cdot (D_{11} - D_{12})$$

$$\text{Soit : } 1/2 \cdot P_1 \cdot D_{12} = 1/2 \cdot P_2 \cdot D_{21}$$

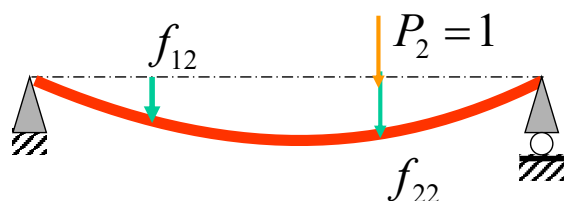
Pour P_1 & P_2 chargements unitaires : $f_{21} = f_{12}$

$$f_{21} = f_{12}$$

Déplacement projeté
sur P_2 dû à P_1 unitaire



Déplacement projeté
sur P_1 dû à P_2 unitaire



▲ Généralisation

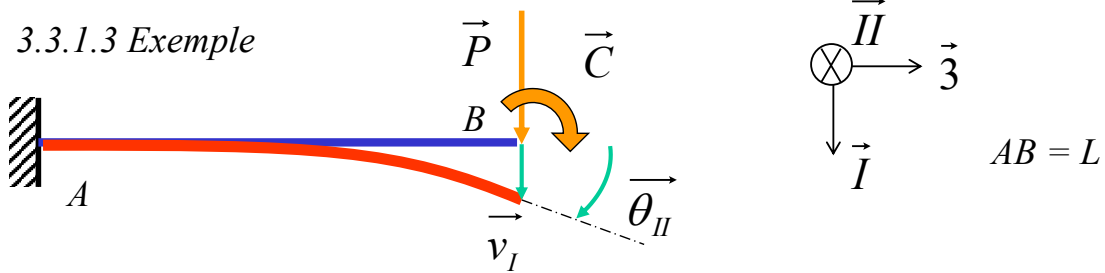
La matrice de flexibilité est symétrique

$$f_{ij} = f_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}^T$$

Remarque : résultat valable pour toute structure linéaire (pas seulement poutres)

3.3.1.3 Exemple



$$Mf_{II} = E \cdot I_{II} \cdot \frac{d^2 v_I(z)}{dz^2}$$

$$\theta_{II} = \frac{dv_I(z)}{dz}$$

$$v_I(L) = P \cdot \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I_{II}} + C \cdot \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}}$$

$$\theta_{II}(L) = P \cdot \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}} + C \cdot \frac{L}{E \cdot I_{II}}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} v_I \\ \theta_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I_{II}} & \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}} \\ \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}} & \frac{L}{E \cdot I_{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}$$

3.3.2 Travail des actions extérieures en fonction de la matrice de flexibilité

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^{nb \text{ actions}} \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot D_i \quad \& \quad D_i = \sum_{j=1}^{nb \text{ actions}} f_{ij} \cdot P_j$$

Sous forme matricielle :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [D] \quad \& \quad [D] = [f] \cdot [P]$$

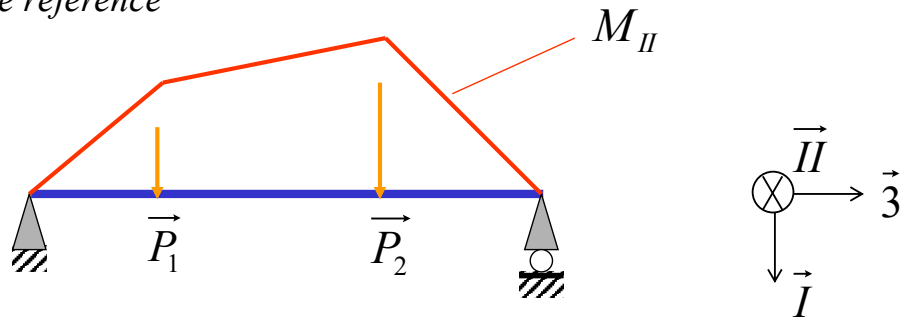
Soit :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [f] \cdot [P]$$

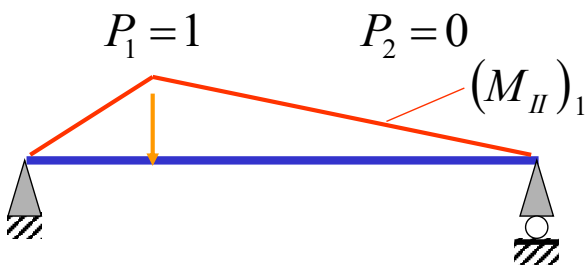
3.3.3 Calcul des termes de la matrice de flexibilité

3.3.3.1 Exemple de référence

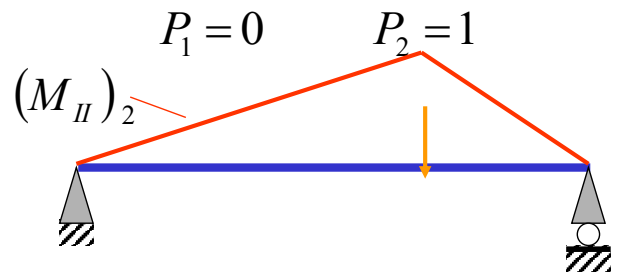
Configuration
initiale



Etat unitaire 1



Etat unitaire 2



▲ Principe de linéarité & de superposition

$$M_{II} = (M_{II})_1 \cdot P_1 + (M_{II})_2 \cdot P_2$$

Moment fléchissant config. initiale ← ← Moment fléchissant État unitaire 1

▲ Energie de déformation

$$W_{def} = \int_L \left(\frac{M_{II}^2}{2 E I_{II}} \right) \cdot dz$$

$$W_{def} = P_1^2 \cdot \int_L \frac{(M_{II})_1^2}{2 E I_{II}} \cdot dz + P_2^2 \cdot \int_L \frac{(M_{II})_2^2}{2 E I_{II}} \cdot dz$$

$$+ 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \int_L \frac{(M_{II})_1 \cdot (M_{II})_2}{2 E I_{II}} \cdot dz$$



Travail des forces extérieures

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [f] \cdot [P]$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P_1 \quad P_2] \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

avec $f_{12} = f_{21}$

$$W_{ext} = P_1^2 \cdot f_{11} \cdot \frac{1}{2} + P_2^2 \cdot f_{22} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot f_{12} \cdot \frac{1}{2}$$



Identification

$$f_{11} = \int_L \frac{(M_{II})_1^2}{E I_{II}} \cdot dz$$

$$f_{22} = \int_L \frac{(M_{II})_2^2}{E I_{II}} \cdot dz$$

$$f_{12} = \int_L \frac{(M_{II})_1 \cdot (M_{II})_2}{E I_{II}} \cdot dz$$

3.3.3.2 Généralisation

$$f_{ij} = \int_L \left(\frac{(T_I)_i \cdot (T_I)_j}{G A} + \frac{(T_{II})_i \cdot (T_{II})_j}{G A} + \frac{(N_3)_i \cdot (N_3)_j}{E A} + \frac{(M_I)_i \cdot (M_I)_j}{E I_I} + \frac{(M_{II})_i \cdot (M_{II})_j}{E I_{II}} + \frac{(M_3)_i \cdot (M_3)_j}{G I_G} \right) \cdot dz$$

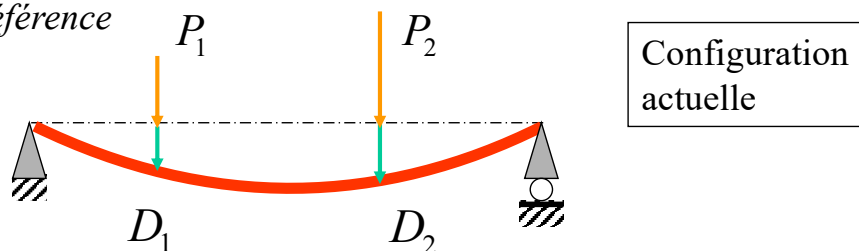


Analogie avec l' énergie stockée dans une poutre, mais ici :

- Pas de facteur $\frac{1}{2}$
- Les efforts internes sont calculés pour une charge unitaire $(X)_i$: effort interne pour état i unitaire

3.4 Méthode de Castigliano

3.4.1 Exemple de référence



Maxwell – Mohr :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \left| \quad W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P_1 \quad P_2] \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \right.$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [f] \cdot [P] \quad \left| \quad W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot f_{11} \cdot P_1^2 + f_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot f_{22} \cdot P_2^2 \right.$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot f_{11} \cdot P_1^2 + f_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot f_{22} \cdot P_2^2$$

▲ Premier théorème de Castigliano

$$D_1 = f_{11} \cdot P_1 + f_{12} \cdot P_2$$

$$D_1 = \frac{\partial W_{ext}}{\partial P_1}$$

$$D_2 = f_{21} \cdot P_1 + f_{22} \cdot P_2$$

$$D_2 = \frac{\partial W_{ext}}{\partial P_2}$$

▲ Deuxième théorème de Castigliano

$$f_{11} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P_1^2} \quad f_{22} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P_2^2} \quad f_{12} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P_1 \partial P_2}$$

3.4.2 Généralisation

▲ Premier théorème de Castigliano

Détermination
des déplacements

$$D_i = \frac{\partial W_{ext}}{\partial P_i}$$

▲ Deuxième théorème de Castigliano

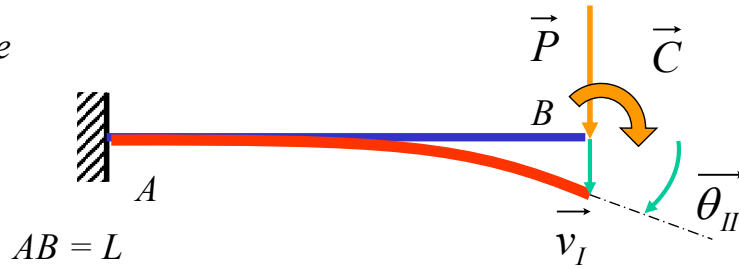
Détermination
des termes de flexibilité

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P_i \partial P_j}$$

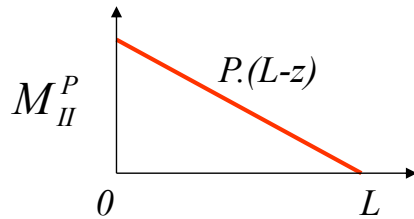


L' énergie de déformation est l' énergie réelle (pas une énergie calculée pour des états unitaires comme avec Maxwell – Mohr)

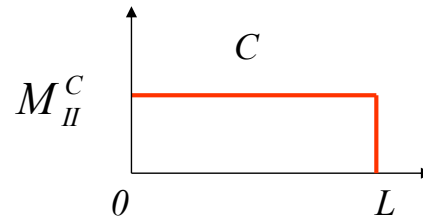
3.4.3 Exemple



▲ Détermination des efforts internes



Moment fléchissant dû à P



Moment fléchissant dû à C

Rq: efforts tranchants négligés

▲ Energie de déformation

$$W_{def} = \int_0^L \left(\frac{(M_{II}^P + M_{II}^C)^2}{2 E I_{II}} \right) \cdot dz$$

$$W_{def} = \int_0^L \left(\frac{(P(L-z) + C)^2}{2 E I_{II}} \right) \cdot dz$$

$$W_{def} = \frac{1}{2 E I_{II}} \int_0^L (P^2(L-z)^2 + C^2 + 2PC(L-z)) \cdot dz$$

$$W_{def} = \frac{1}{2 E I_{II}} \left\{ \left[-\frac{1}{3} P^2 (L-z)^3 \right]_0^L + \left[-PC(L-z)^2 \right]_0^L + \left[C^2 \cdot z \right]_0^L \right\}$$

$$W_{def} = \frac{\frac{1}{3} P^2 L^3 + P C L^2 + C^2 \cdot L}{2 E I_{II}}$$

▲ Déplacements

$$v_I = \frac{\partial W_{ext}}{\partial P} = \frac{P L^3}{3 E I_{II}} + \frac{C L^2}{2 E I_{II}}$$

$$\theta_{II} = \frac{\partial W_{ext}}{\partial C} = \frac{P L^2}{2 E I_{II}} + \frac{C L}{E I_{II}}$$

▲ Matrice de flexibilité

$$f_{11} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P^2}$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial P \partial C}$$

$$f_{22} = \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial C^2}$$

$$\begin{bmatrix} v_I \\ \theta_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I_{II}} & \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}} \\ \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot I_{II}} & \frac{L}{E \cdot I_{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}$$

3.5 Systèmes hyperstatiques

3.5.1 Système hyperstatique externe

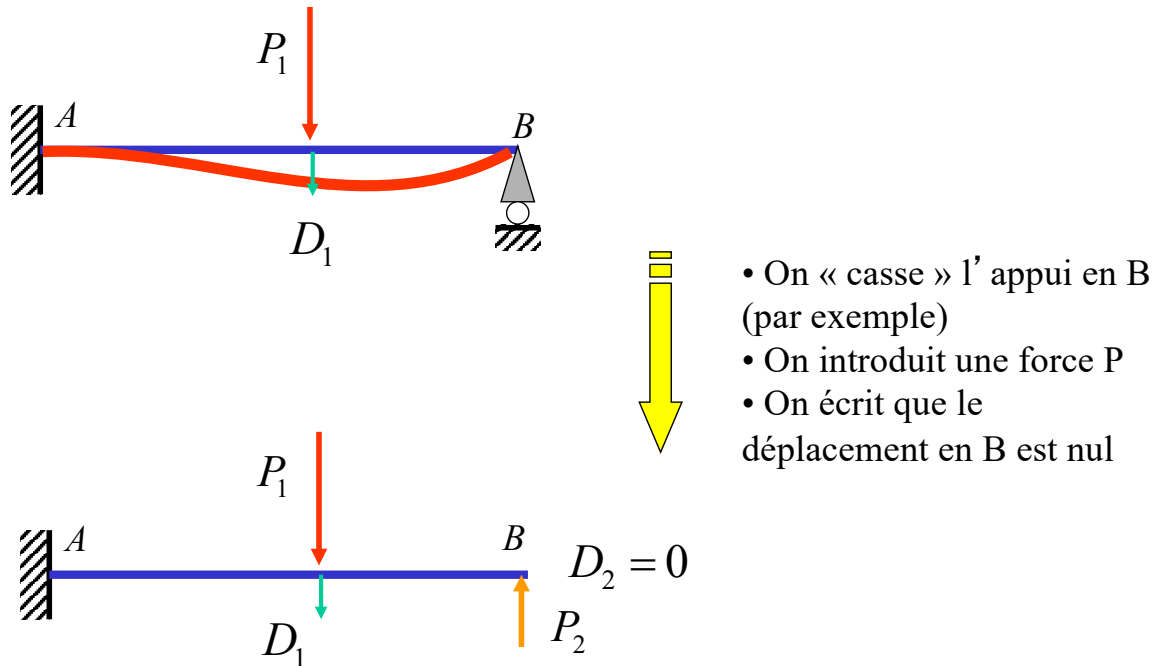
▲ Système hyperstatique externe

Nombre d'inconnues de liaison supérieur au nombre d'équations de la statique

▲ Principe de résolution

- On « casse » des liaisons afin de se ramener à un système isostatique
- Pour chaque degré de liberté introduit (ou degré de liaison « cassé »), on introduit une charge généralisée
si ddl translation -> force
si ddl rotation -> couple
- On écrit que les déplacements des degrés de liberté introduits sont nuls

▲ Exemple



3.5.2 Système hyperstatique interne

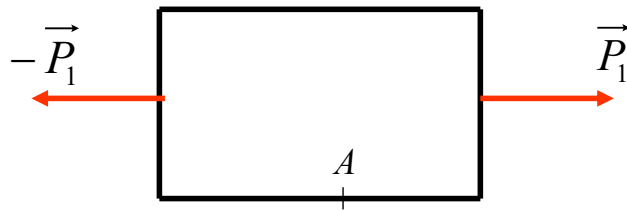
▲ Système hyperstatique interne

On ne peut pas calculer les composantes du torseur de section

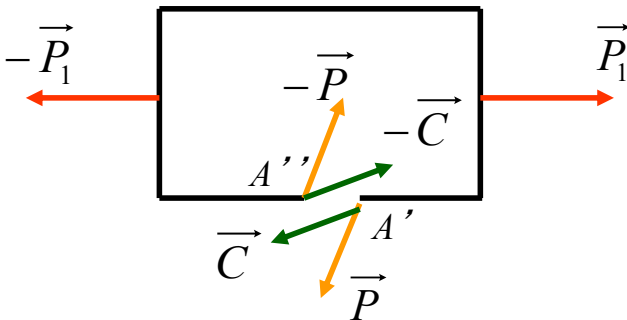
▲ Principe de résolution

- On « coupe » des poutres
- Pour chaque coupure, on introduit un torseur (une force et un couple) à chacune des extrémités coupées & On écrit que les torseurs introduits sont opposés
- On raccorde les extrémités coupées en écrivant que les déplacements y sont égaux

Exemple



- On « coupe » en A
- On introduit un torseur en A' & A''
- On écrit que les déplacements en A' et A'' sont égaux



4. RIGIDITE

4.1 Flexibilité et rigidité d' une structure

▲ Matrice de flexibilité de la structure

$$[D] = [f] \cdot [P]$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Déplacement
(translation,
rotation)

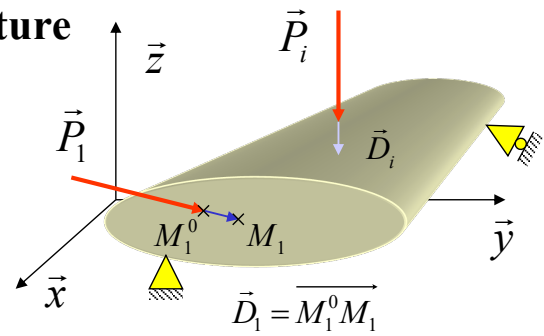
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

Charge
(force, couple)

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & f_{ij} & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

Maxwell-Mohr
ou Castigliano

f_{ij} : déplacement généralisé D_i provoqué
par une charge P_j unitaire seule



Énergie de déformation

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [f] \cdot [P] \quad \text{Expression en fonction de la matrice de flexibilité \& des charges extérieures}$$

▲ Matrice de rigidité de la structure

On inverse la matrice de flexibilité :

$$[P] = [f]^{-1} \cdot [D]$$

$$[K] = [f]^{-1}$$

$$[P] = [K] \cdot [D]$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & k_{ij} & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

k_{ij} : Charge généralisée P_i provoquée
par un déplacement D_j unitaire seul

Matrice de rigidité
Carrée ($n \times n$) symétrique

Énergie de déformation

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [P]^T \cdot [f] \cdot [P] \quad \text{avec} \quad [P] = [K] \cdot [D]$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot ([K] \cdot [D])^T \cdot [f] \cdot ([K] \cdot [D])$$

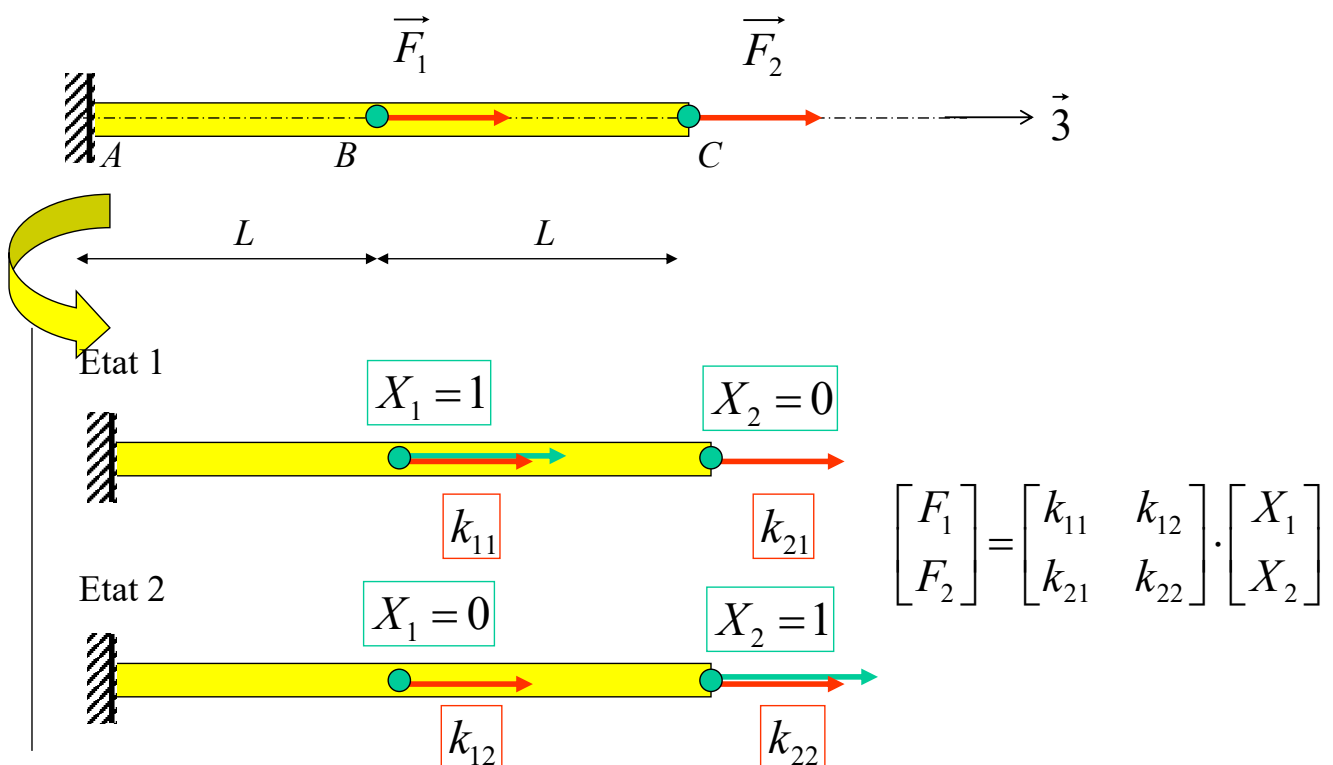
$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [D]^T \cdot [K]^T \cdot [f] \cdot [K] \cdot [D] \quad \text{Avec} \quad [K] = [K]^T$$

et $[K] \cdot [f] = [I]$

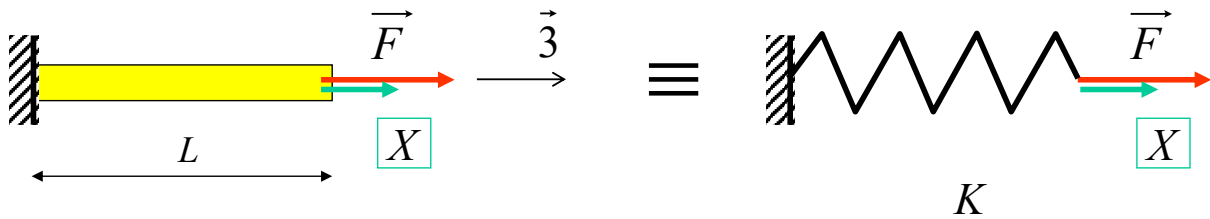
$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot [D]^T \cdot [K] \cdot [D]$$

Expression en fonction de la matrice de raideur & des déplacements

4.2 Méthode du déplacement unité (exemple)



Rigidité en traction / compression



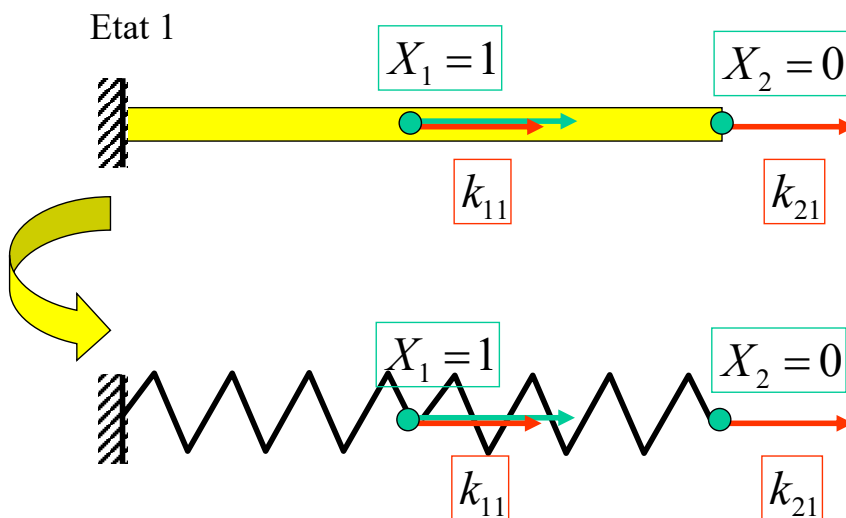
$$W_{def} = \frac{F^2 \cdot L}{2 E A}$$

$$F = K \cdot X$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot X$$

$$K = \frac{E A}{L}$$

$$F = \frac{E A}{L} \cdot X$$



$$F_1 = k_{11}$$

$$F_2 = k_{21}$$

Soit :

$$k_{11} = \frac{E A}{L}$$

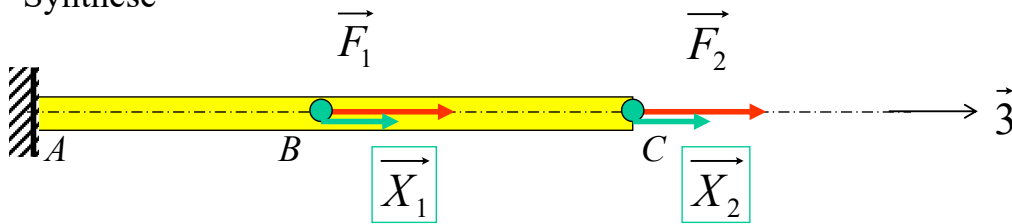
$$k_{21} = -\frac{E A}{L}$$

De même, état 2 :

$$k_{22} = \frac{E A}{L}$$

$$k_{12} = -\frac{E A}{L}$$

Synthèse



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

METHODE DES ELEMENTS FINIS

Département Génie Mécanique et Productique
Dimensionnement Des Structures

R5 MMP 02

Méthode des éléments finis

1. Introduction

- Notion de maillage, d'éléments finis et de nœuds
- Degrés de libertés
- Interpolation

2. Matrice de rigidité d'un élément libre

- Matrice d'interpolation des déplacements
- Matrice d'interpolation des déformations
- Matrice des contraintes
- Matrice de rigidité

3. MEF appliquée aux poutres

- Sollicitations simples
- Matrice de rigidité d'un élément libre
- Transformation des coordonnées par rotation du repère
- Assemblage

4. Exemple

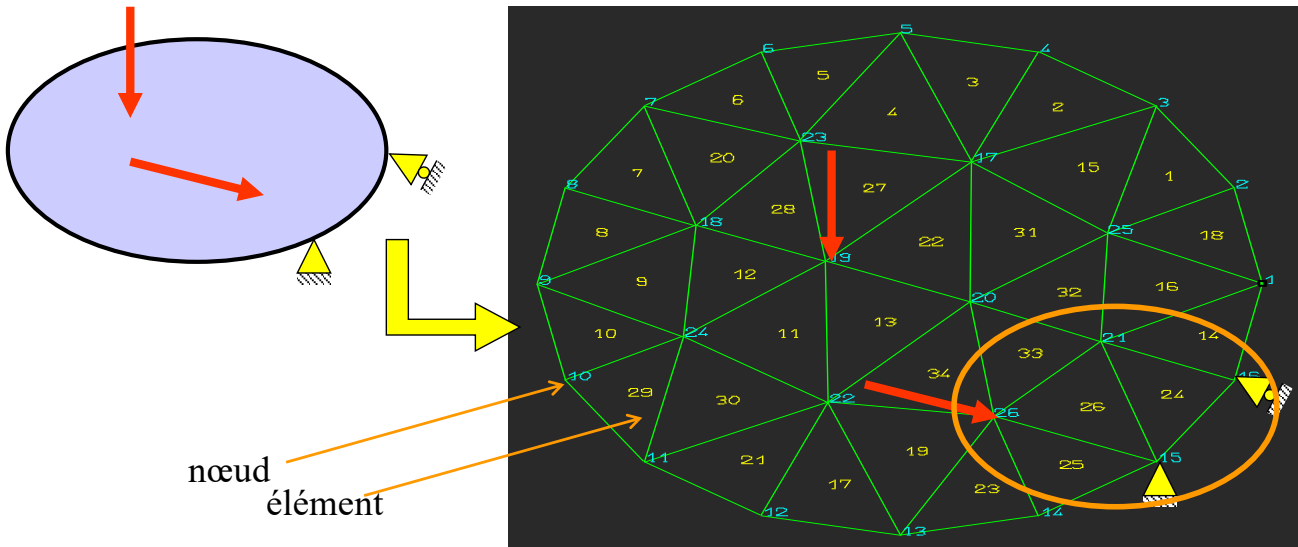
1. INTRODUCTION

1.1 Notion de maillage, d'éléments finis et de nœuds

 Maillage de la structure : discrétisation de la structure réelle en éléments de forme géométrique simple

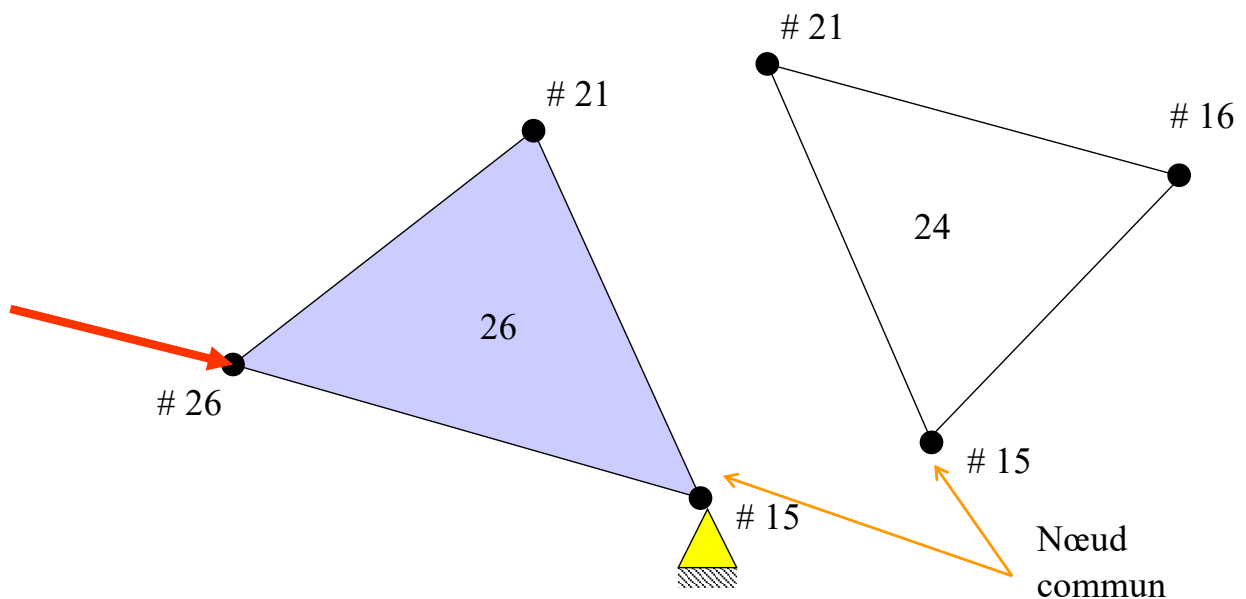
Structure réelle continue

Structure maillée



Elément n° 26 (triangle à 3 nœuds)
Constitué des nœuds # 15, # 21 et # 26

Charges extérieures et liaisons appliquées sur les nœuds du maillage

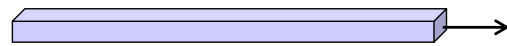




Forme de l'élément : fonction du milieu à mailler (dimension 1D 2D 3D)

1D : poutres

La ligne moyenne caractérise la géométrie de la poutre, la section droite devient un paramètre de l'élément



Théorie des poutres



ligne moyenne

+



Section droite



Discretisation

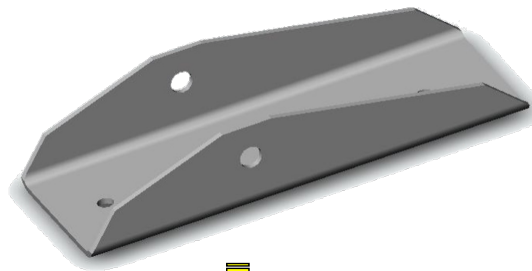


*Elément :
Segment droit*

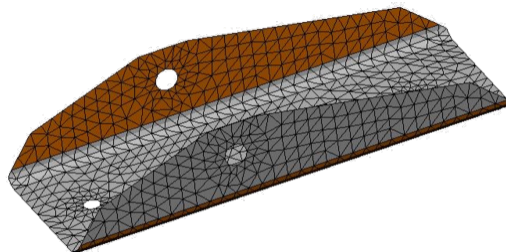
« Chaîne constituée de mailles (les éléments) »

2D : plaques

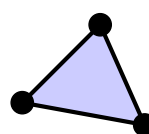
(idem : membranes, coques, contraintes planes, déformations planes, problèmes axisymétriques)



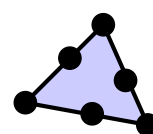
Théorie des plaque + discrétisation



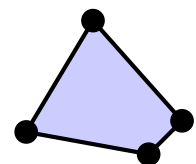
Eléments :



Triangle
3 nœuds



Triangle
6 nœuds



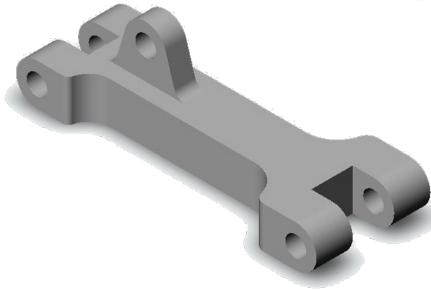
Quadrangle

La surface moyenne caractérise la géométrie de la plaque, l'épaisseur devient un paramètre de l'élément

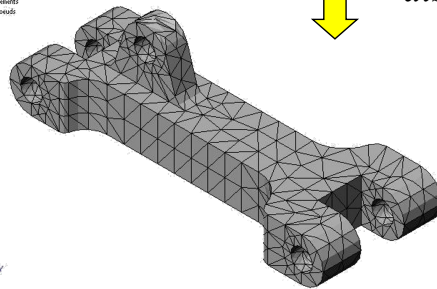
« Puzzle constitué de pièces (les éléments) »

3D : volumes

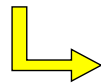
Cas général : tout le volume est discrétisé



238 éléments
440 nœuds

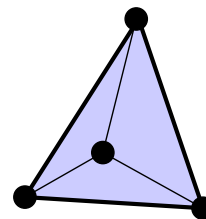


discrétisation

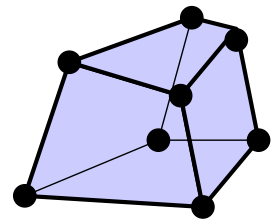


Eléments :

« Jeux de construction
Briques Lego ® »



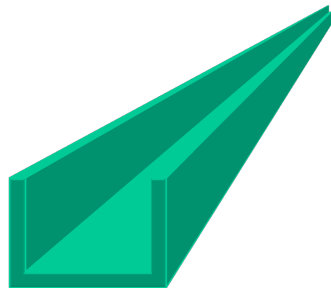
Tétraèdre



Hexaèdre

Choix de la modélisation

Structure réelle

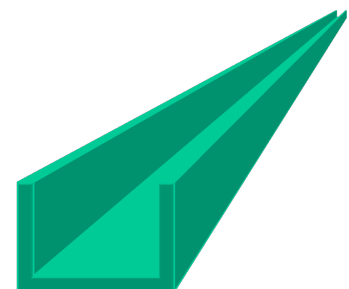
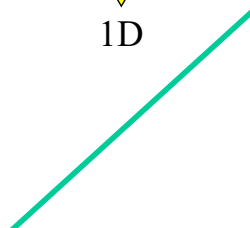
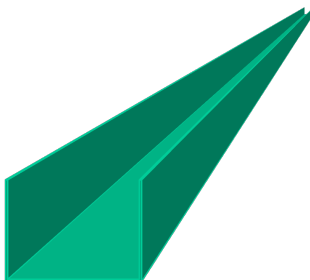


Modèle MEF

2D

3D

1D

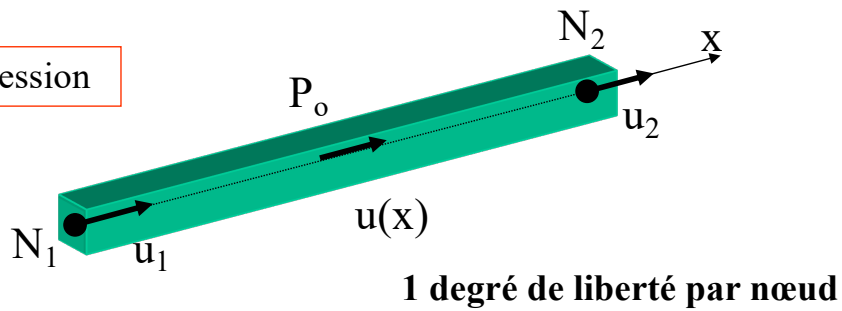


1.2 Degrés de liberté

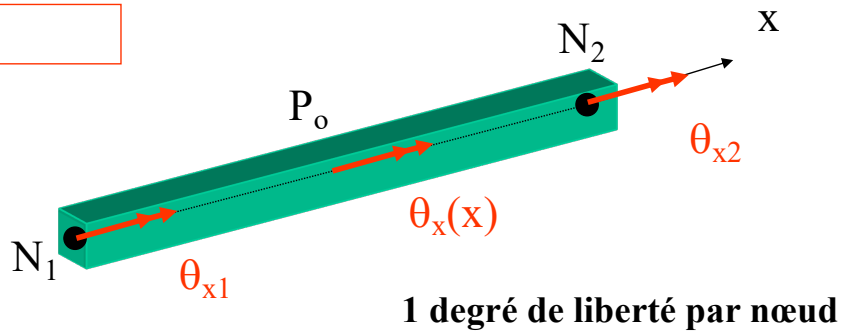
Choix des déplacements

1D : poutres

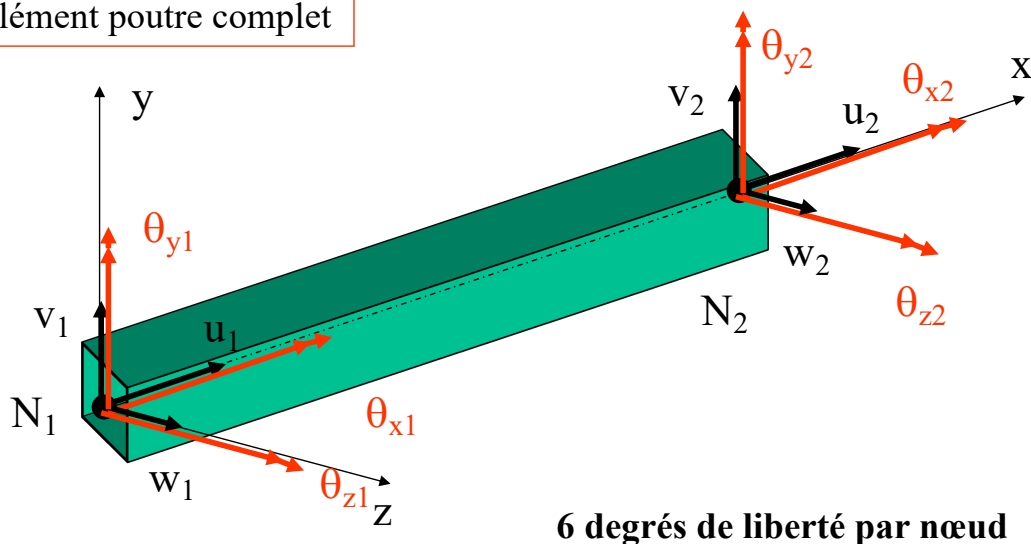
Traction / compression



Torsion



Élément poutre complet



u : traction-compression

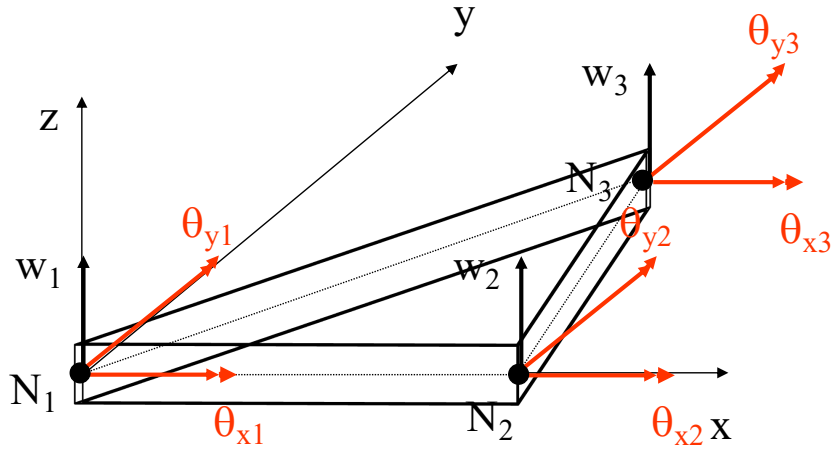
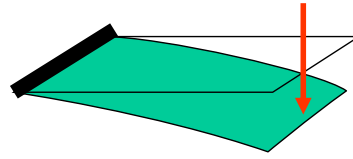
v, θ_z : flexion plane (x,y)

θ_x : torsion

w, θ_y : flexion plane (x,z)

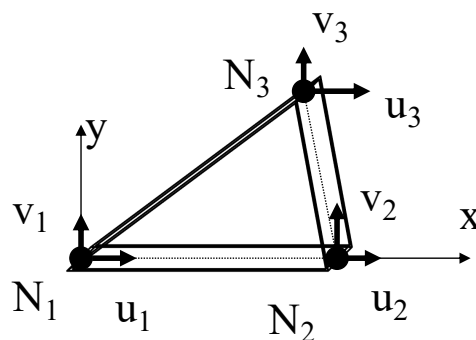
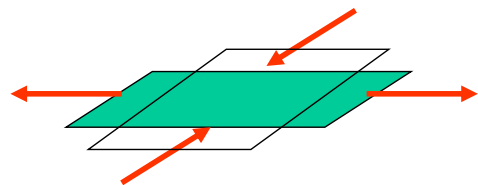
2D : plaques en flexion

3 degrés de liberté par nœud



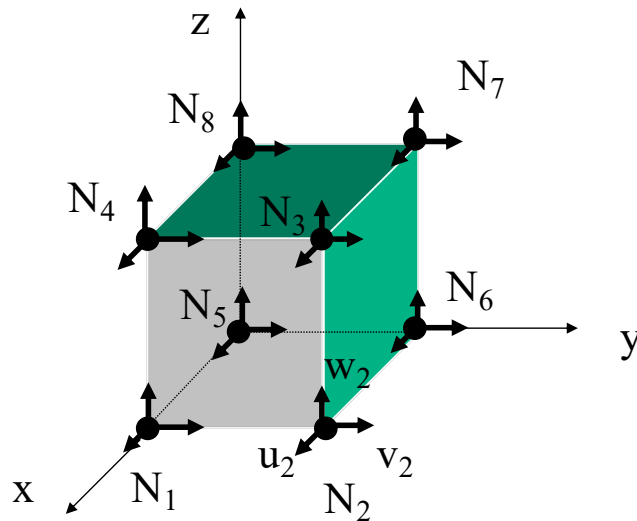
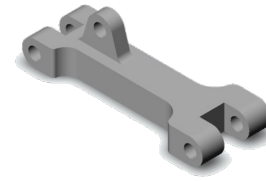
2D : plaques en membrane

2 degrés de liberté par nœud



3D : volumes

3 degrés de liberté par nœud
Seules les translation sont modélisées



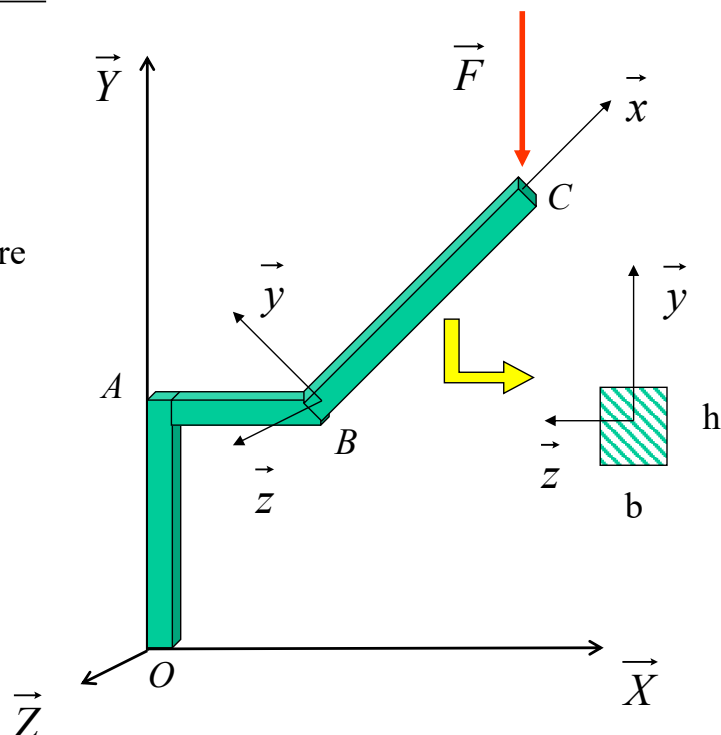
Repères locaux et globaux

$$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

Repère global de la structure

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Repère local de l'élément



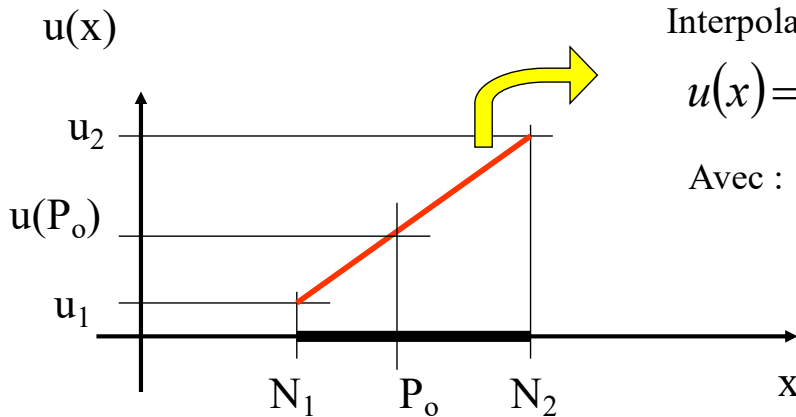
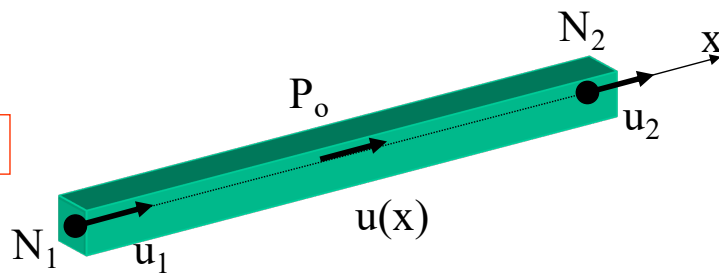
1.3 Interpolation



Problématique

1D : poutres

Traction / compression



Interpolation linéaire :

$$u(x) = a \cdot x + b$$

Avec :

$$\begin{cases} u(N_1) = u_1 \\ u(N_2) = u_2 \end{cases}$$



Interpolation polynomiale

Expression du déplacement dans l'élément fini en fonction des déplacements aux nœuds. La fonction classiquement polynomiale est conditionnée par :

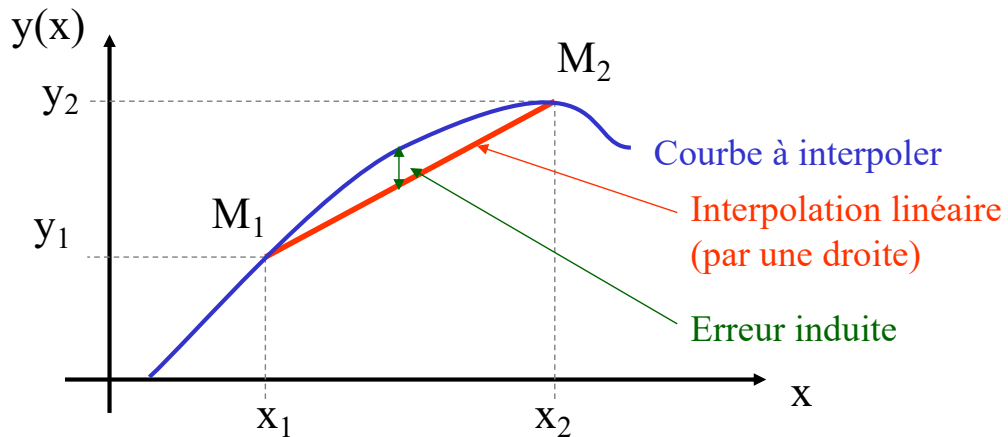
- La dimension de l'élément (1D, 2D, 3D)
- Le nombre de nœud de l'élément
- Le nombre de degrés de libertés par nœud.

1D : poutres (milieu de dimension 1)

Polynôme fonction d'une seule variable d'espace : x (position sur la ligne moyenne)

	Nb de terme	Degré Polynôme	Interpolation	Fonction
1	1	0		α_1
x	2	1	Linéaire	$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x$
x^2	3	2	Quadratique	$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$
x^3	4	3	Cubique	$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3$
x^4	5	4	4 ^{ème} degré	$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 + \alpha_5 \cdot x^4$

Retour sur l'interpolation linéaire



Equation de la fonction d'interpolation : $y(x) = a \cdot x + b$

Avec :

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{aligned} a &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ b &= \frac{y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Fonction d'interpolation en fonction des déplacements aux nœuds :

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2}$$

Ecriture « élément finis » de la fonction d'interpolation :

en fonction des déplacements aux nœuds

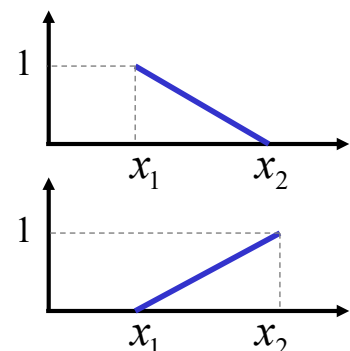
$$y(x) = N_1(x) \cdot y_1 + N_2(x) \cdot y_2$$

Avec :

Fonctions d'interpolation
Ou
Fonctions de forme

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$N_2(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$$



2D : plaques, membranes... (milieu de dimension 2)

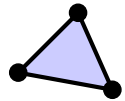
Polynôme fonction de deux variables d'espace : x et y (position dans un plan)

Polynôme complet

Triangle de Pascal	Nb de terme	Degré Polynôme	Interpolation
1	1	0	
$x \quad y$	3	1	Linéaire
$x^2 \quad xy \quad y^2$	6	2	Quadratique
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	10	3	Cubique
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	15	4	4 ^{ième} degré

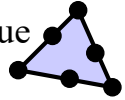
$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y$$

Interpolation linéaire
(polynôme complet)



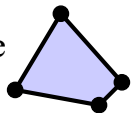
$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x y + \alpha_5 \cdot x^2 + \alpha_6 \cdot y^2$$

Interpolation quadratique
(polynôme complet)



$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x y$$

Interpolation bilinéaire
(polynôme incomplet)



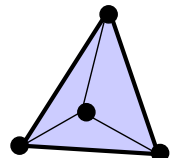
3D : volumes (milieu de dimension 3)

Polynôme fonction de trois variables d'espace : x , y et z (position dans l'espace)

Polynôme complet

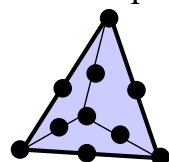
Triangle de Pascal	Nb de terme	Degré Polynôme	Interpolation
1	1	0	
$x \quad y \quad z$	4	1	Linéaire
$x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad yz \quad zx$	10	2	Quadratique
$x^3 \quad y^3 \quad z^3 \quad xy^2 \quad yz^2 \quad zx^2 \quad x^2y \quad y^2z \quad z^2x \quad xyz$	20	3	Cubique

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z \quad \text{Interpolation linéaire (polynôme complet)}$$



$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot z + \dots \quad \text{Interpolation quadratique (polynôme complet)}$$

$$\dots \alpha_5 \cdot x^2 + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 \cdot z^2 + \alpha_8 \cdot x y + \alpha_9 \cdot y z + \alpha_{10} \cdot z x$$



2. MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT LIBRE

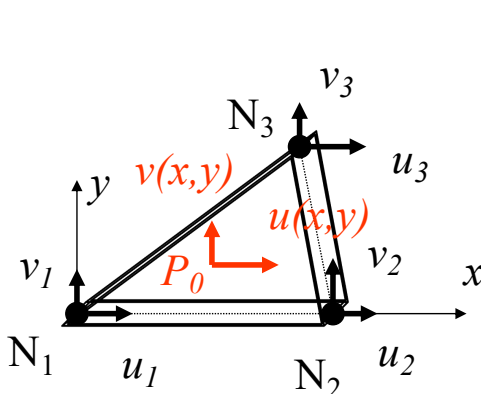
2. MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

2.1 Matrice d' interpolation des déplacements

▲ Objectif : interpolation du déplacement $[u]$ d'un point P_0 quelconque dans l'élément en *fonction des déplacements nodaux* $[D^e]$

$$[u] = [A] \cdot [D^e]$$

Exemple : plaques en membrane (2D)



$$P_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \rightarrow N_1 \\ \rightarrow N_2 \\ \rightarrow N_3 \end{matrix}$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ valeurs} \\ \text{connues par DDL} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Interpolation linéaire :} \\ u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \\ v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y \end{array}$$

Sous forme matricielle :

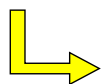
$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_1 + \alpha_3 \cdot y_1 \\ v_1 &= \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x_1 + \alpha_6 \cdot y_1 \quad \dots \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$



Inversion de la matrice

On obtient :

$$[u] = [A] \cdot [D^e]$$

$$[A]$$

Matrice d'interpolation
des déplacements

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Avec les polynômes d'interpolation :

$$N_1 = \frac{(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y}{(x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2)}$$

N_2 & N_3 par permutation circulaire

2.2 Matrice d'interpolation des déformations

Par dérivation de la matrice des déplacements $[u]$ on obtient la matrice des déformations $[\varepsilon]$

$$[\varepsilon] = [\partial] \cdot [u] \quad [\partial] \text{ Matrice des opérateurs différentiels}$$

Soit, avec $[u] = [A] \cdot [D^e]$

$$[\varepsilon] = [\partial] \cdot [A] \cdot [D^e]$$

$$[\varepsilon] = [B] \cdot [D^e]$$

$$[B] = [\partial] \cdot [A]$$

**Matrice d'interpolation des
déformations dans l'élément**

2.3 Matrice des contraintes

La loi de comportement permet décrire la matrice des contraintes $[\sigma]$
en fonction de la matrice des déformations $[\varepsilon]$

Matériau linéaire élastique isotrope : loi de Lamé

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] \quad [C] \text{ Matrice des constantes élastiques}$$

loi de Lamé
Cas général

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Soit, avec $[\varepsilon] = [B] \cdot [D^e]$
 $[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon]$

$$[\sigma] = [C] \cdot [B] \cdot [D^e]$$

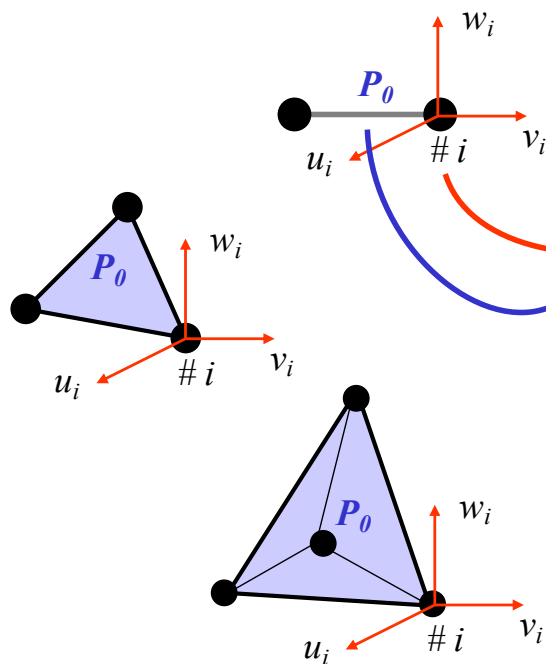
Contraintes dans l'élément
interpolées en fonction des
déplacements aux nœuds

Matrice des
constantes
élastiques

Matrice
d'interpolation
des déformations
dans l'élément

2.4 Matrice de rigidité élémentaire

▲ Synthèse des interpolations



$$[\varepsilon] = [\partial] \cdot [u]$$

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon]$$

Cours
élasticité
linéaire

$$[u] = [A] \cdot [D^e]$$

$$[\varepsilon] = [B] \cdot [D^e]$$

$$[\sigma] = [C] \cdot [B] \cdot [D^e]$$

Interpolation
dans l'élément
en fonction des
ddl aux noeuds

▲ Énergie de déformation dans l'élément en fonction des déplacement aux nœuds

Cours méthodes énergétiques

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} [\sigma]^T \cdot [\varepsilon] \cdot dV$$

Avec

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

+

Interpolation dans l'élément $[\varepsilon] = [B] \cdot [D^e]$ $[\sigma] = [C] \cdot [B] \cdot [D^e]$

=

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_e} [D^e]^T \cdot [B]^T \cdot [C]^T \cdot [B] \cdot [D^e] \cdot dV_e$$

$[D^e]$ Déplacements nodaux constants pour un élément,

$$W_{def} = \frac{1}{2} [D^e]^T \cdot \int_{V_e} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dV_e \cdot [D^e]$$

Par ailleurs :

$$W_{def} = \frac{1}{2} [D^e]^T \cdot [K^e] \cdot [D^e]$$

Matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dV_e$$

Propriétés : - Symétrique

- Singulière (déterminant nul, inversion impossible)

Explication physique : l'élément libre possède des mouvements de corps rigides, c à d il peut se déplacer sans se déformer (rigidité nulle donc flexibilité infinie).

3. MEF APPLIQUEE AUX POUTRES

3.1 Poutre droite à 2 nœuds - Sollicitations simples

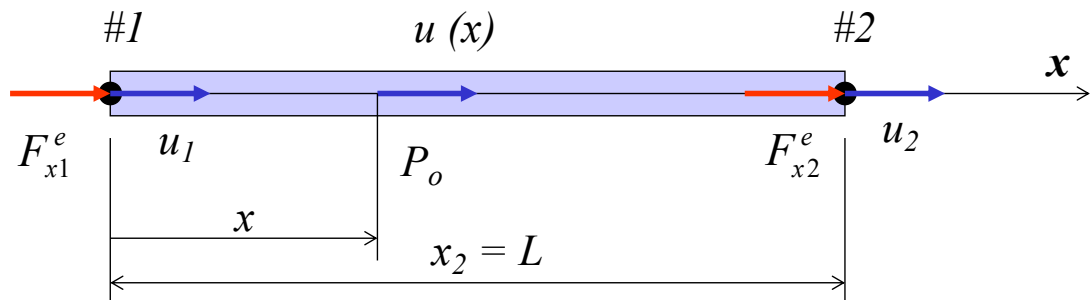


Traction – Compression

Théorie des poutres

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \\ \sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} [\varepsilon] = [\partial] \cdot [u] \\ [\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} [\partial] = \left[\frac{d}{dx} \right] \\ [C] = [E] \end{array} \right.$$

Elément e



Matrice d' interpolation des déplacements $[A]$

2 nœuds, 2 ddl : interpolation linéaire

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x \Rightarrow u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs aux nœuds

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0) = \alpha_1 \\ u_2 &= u(L) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Inversion

Matrice 2 x 2

$\frac{1}{\det}$ permutation

Changement de signe

Soit

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [D^e] \end{matrix}$$

 $[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$ Matrice d'interpolation des déplacements

Matrice d'interpolation des déformations $[B]$

$$[\partial] = \left[\frac{d}{dx} \right] \text{ Matrice des opérateurs différentiels}$$

$$[B] = [\partial] \cdot [A]$$

$$[B] = \left[\frac{d}{dx} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{d}{dx} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

 $[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ Matrice d'interpolation des déformations

Matrice de comportement du matériau $[C]$

$$[C] = [E]$$

Module d'Young

$$[C] = E$$

Matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = \int_{V_e} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot [E] \cdot [-1/L \quad 1/L] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = \int_{V_e} E \cdot \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot [-1/L \quad 1/L] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = E \cdot \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 \\ -1/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \int_{V_e} dV_e$$

$$[K^e] = E \cdot \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 \\ -1/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot A \cdot L$$

$$[K^e] = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre droite en traction compression

Relation efforts - déplacements

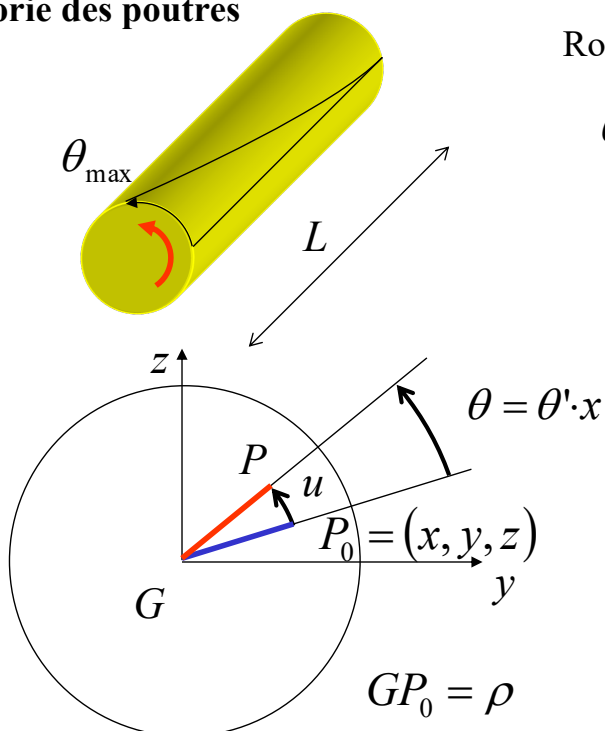
$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[P^e] = [K^e] \cdot [D^e]$$

Matériau, longueur de l'élément, section droite de l'élément

Torsion

Théorie des poutres



Rotation de la section située à l'abscisse x

$$\theta = \theta' \cdot x \quad \text{avec} \quad \theta' = \theta_{\max} / L$$

$$\vec{u} = \vec{\theta} \wedge \overrightarrow{GP_0}$$

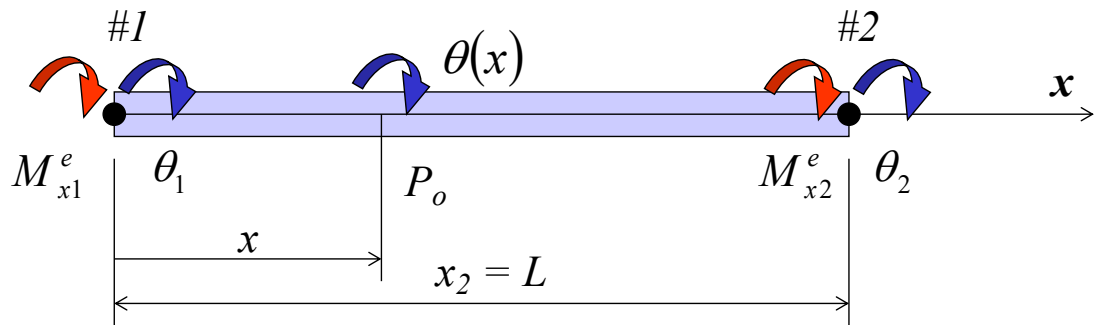
$$[u] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \cdot z \cdot \theta' \\ x \cdot y \cdot \theta' \end{bmatrix}$$

Distorsion $\gamma = \rho \cdot \theta'$

Loi de comportement (Lamé) $\tau = G \cdot \gamma$

Elément e



Matrice d' interpolation des déplacements $[A]$

Idem traction-compression

2 nœuds, 2 ddl : interpolation linéaire

$$\theta(x) = \alpha_2 \cdot x + \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \theta(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs aux nœuds

$$\theta_1 = \theta(0) = \alpha_1$$

$$\theta_2 = \theta(L) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \xRightarrow{\text{Inversion}} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Soit

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [D^e] \end{matrix}$$

 $[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$ Matrice d'interpolation des déplacements

Matrice d'interpolation des déformations $[B]$

$$\gamma = \rho \cdot \theta' \quad \gamma = \rho \cdot \frac{d}{dx} \theta$$

$$[\partial] = \left[\rho \cdot \frac{d}{dx} \right] \text{ Matrice des opérateurs différentiels}$$

$$[B] = [\partial] \cdot [A]$$

$$[B] = \rho \cdot \frac{d}{dx} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

 $[B] = \rho \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ Matrice d'interpolation des déformations

Matrice de comportement du matériau $[C]$

$$[C] = [G]$$

Module de Coulomb

$$[C] = G$$

Matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = \int_{V_e} \rho \cdot \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot [G] \cdot \rho \cdot [-1/L \quad 1/L] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = \int_{V_e} \rho^2 \cdot G \cdot \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot [-1/L \quad 1/L] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = G \cdot \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 \\ -1/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \int_{V_e} \rho^2 dV_e$$

$\int_{V_e} \rho^2 dV_e = \underbrace{\int_L dx}_L \cdot \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{I_0 \text{ ou } I_G}$
 Inertie de torsion

$$[K^e] = G \cdot \begin{bmatrix} 1/L^2 & -1/L^2 \\ -1/L^2 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot I_G \cdot L$$

$$[K^e] = \frac{G \cdot I_G}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire
d'une poutre droite de section
circulaire en torsion

Relation efforts - déplacements

$$\begin{bmatrix} M_{x1}^e \\ M_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{G \cdot I_G}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[P^e] = [K^e] \cdot [D^e]$$

Matériau, longueur de l'élément, section droite de l'élément

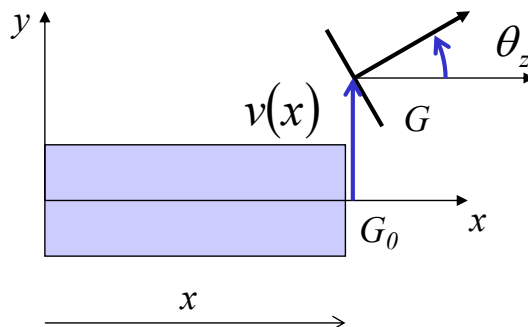


Flexion dans le plan xy (autour de z)

Théorie des poutres

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$$



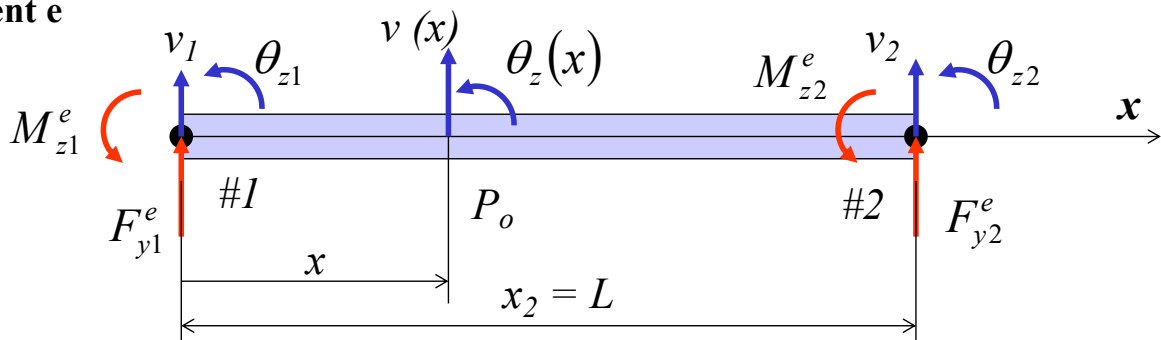
$$\vec{P}_0 \vec{P} = (u, v)$$

$$u = -y \cdot \theta_z$$

$$\theta_z = \frac{dv}{dx}$$

$$u = -y \cdot \frac{dv}{dx}$$

Elément e



Matrice d' interpolation des déplacements $[A]$

2 nœuds, 4 ddl & $\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ interpolation degré 3 cubique

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3$$

$$\Rightarrow v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs aux nœuds

$$\begin{cases} v_1 = v(0) = \alpha_1 \\ v_2 = v(L) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L + \alpha_3 \cdot L^2 + \alpha_4 \cdot L^3 \\ \theta_{z1} = \frac{dv}{dx}(0) = \alpha_2 \\ \theta_{z2} = \frac{dv}{dx}(L) = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 \cdot L + 3 \cdot \alpha_4 \cdot L^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

 Inversion

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

D'où

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) & \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [D^e] \end{matrix}$$

Matrice d'interpolation des déplacements

$$[A] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) & \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$

Matrice d'interpolation des déformations $[B]$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \quad \& \quad u = -y \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{xx} = -y \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} -y \cdot \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \quad \text{Matrice des opérateurs différentiels}$$

$$[B] = [\partial] \cdot [A]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) & \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) & \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$



$$[B] = -y \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) & \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$

Matrice d'interpolation des déformations

Matrice de comportement du matériau $[C]$

$$[C] = [E]$$

Module d'Young

$$[C] = E$$

Matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dV_e$$

$$[K^e] = \int_{V_e} E \cdot y^2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice 4 x 4}} \cdot dV_e$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e \\ & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e \\ & & k_{33}^e & k_{34}^e \\ & & & k_{44}^e \end{bmatrix}$$

Exemple : calcul de k_{11}^e

$$k_{11}^e = E \cdot \int_{V_e} y^2 \cdot \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 \cdot dV_e$$

$$k_{11}^e = E \cdot \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{I_z} \cdot \int_L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 \cdot dx$$

I_z Inertie de flexion autour de z

$$k_{11}^e = E \cdot I_z \cdot \left[\frac{L^3}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^3 \right]_0^L$$

$$k_{11}^e = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3}$$

Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre droite en flexion dans le plan xy

$$[K^e] = \frac{E \cdot I_z}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Relation efforts - déplacements

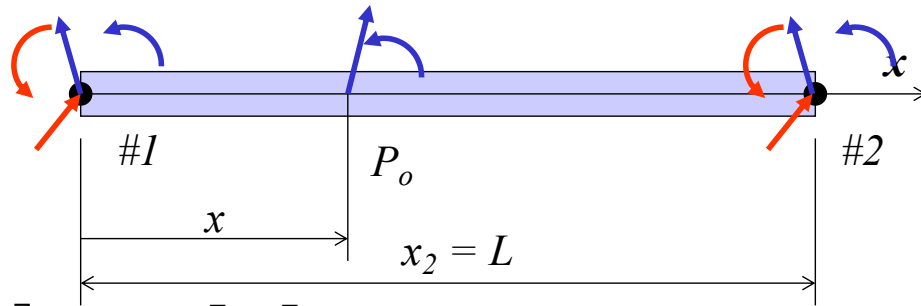
$$\begin{bmatrix} F_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I_z}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$[P^e] = [K^e] \cdot [D^e]$$

Matériau, longueur de l'élément, section droite de l'élément

3.2 Matrice de rigidité d' un élément libre poutre droite à 2 nœuds

Elément e



$$[P_{\#1}^e] = \begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ F_{z1}^e \\ M_{x1}^e \\ M_{y1}^e \\ M_{z1}^e \end{bmatrix} \quad [D_{\#1}^e] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire d' une poutre droite générale

- Traction – compression
- Torsion
- Flexion dans 2 plans

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ F_{z1}^e \\ M_{x1}^e \\ M_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{x2}^e \\ F_{y2}^e \\ F_{z2}^e \\ M_{x2}^e \\ M_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ v_{y1} \\ w_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{x2} \\ v_{y2} \\ w_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

SYM

Application : cas traction – compression seule :

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ F_{z1}^e \\ M_{x1}^e \\ M_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{x2}^e \\ F_{y2}^e \\ F_{z2}^e \\ M_{x2}^e \\ M_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ v_{y1} \\ w_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{x2} \\ v_{y2} \\ w_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

SYM

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}$$

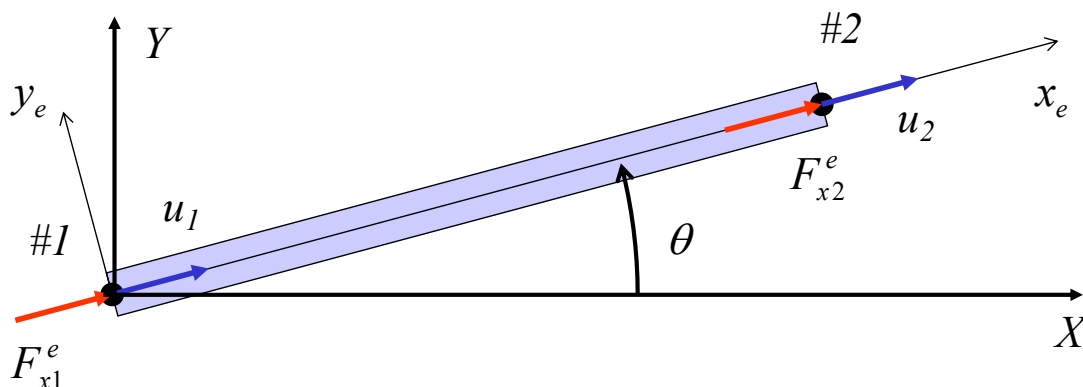
3.3 Transformation des coordonnées par rotation du repère

Exemple : élément poutre en traction – compression

Changement de repère par rotation,

- passage du repère local ou repère de l'élément (x_e, y_e, z_e)
- au repère global ou de la structure (X, Y, Z)

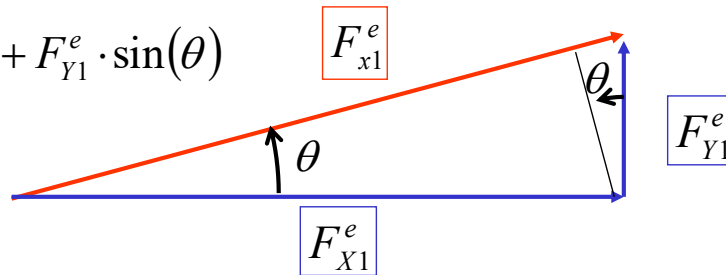
Par rotation d'angle θ



Vecteur force sur le nœud #1

Idem pour les déplacements

$$F_{x1}^e = F_{X1}^e \cdot \cos(\theta) + F_{Y1}^e \cdot \sin(\theta)$$



Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{X1}^e \\ F_{Y1}^e \\ F_{X2}^e \\ F_{Y2}^e \end{bmatrix}$$

Local **Global**

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation
des coordonnées

Pour l'élément poutre

$$[P^e]_{x,y} = [\lambda] \cdot [P^e]_{X,Y} \quad [D^e]_{x,y} = [\lambda] \cdot [D^e]_{X,Y}$$

Relation charge – déplacements

$$[P^e]_{x,y} = [K^e]_{x,y} \cdot [D^e]_{x,y}$$

$$[\lambda] \cdot [P^e]_{X,Y} = [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda] \cdot [D^e]_{X,Y} \quad \Rightarrow \quad [\lambda]^{-1} = [\lambda]^T$$

$$[P^e]_{X,Y} = [\lambda]^T \cdot [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda] \cdot [D^e]_{X,Y}$$

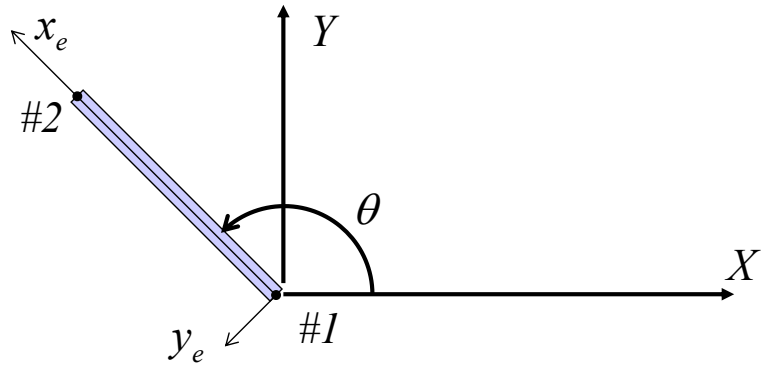
$$[P^e]_{X,Y} = [K^e]_{X,Y} \cdot [D^e]_{X,Y} \quad \text{avec} \quad [K^e]_{X,Y} = [\lambda]^T \cdot [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda]$$

Exemple

$$\theta = 135^\circ$$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Matrice de transformation
des coordonnées

$$[\lambda] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire
en traction – compression
(repère local)

$$[K^e]_{x,y} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire
en traction – compression
(repère global)

$$[K^e]_{X,Y} = [\lambda]^T \cdot [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda]$$

$$[K^e]_{X,Y} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]_{X,Y} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]_{X,Y} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Assemblage

▲ Energie de déformation pour un élément

$$W_{def}^e = \frac{1}{2} [D^e]^T \cdot [K^e] \cdot [D^e]$$

▲ Energie de déformation pour la structure

$$W_{def} = \frac{1}{2} [D]^T \cdot [K] \cdot [D]$$

▲ Principe assemblage

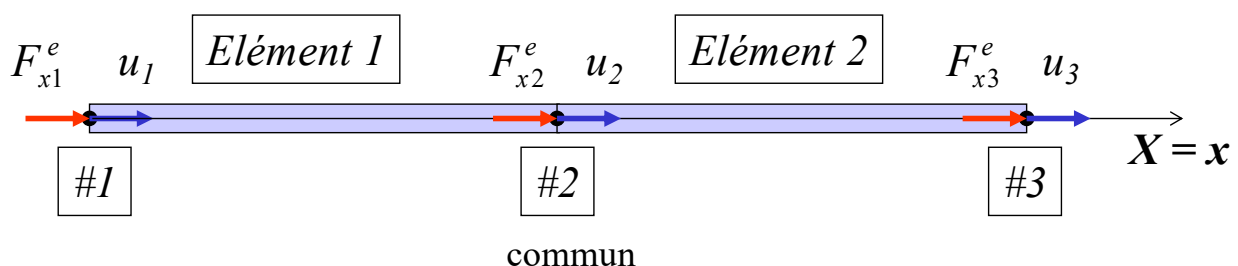
L'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformation de tous les éléments

$$W_{def} = \sum_{\text{éléments}} W_{def}^e$$

$$\frac{1}{2} [D]^T \cdot [K] \cdot [D] = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} [D^e]^T \cdot [K^e] \cdot [D^e]$$

Identification terme à terme : $[K]$

Exemple (2 éléments poutre en traction – compression)



$$W_{def} = \sum_{\text{éléments}} W_{def}^e$$

$$\frac{1}{2} [D]^T \cdot [K] \cdot [D] = \sum_{e=1}^2 \frac{1}{2} [D^e]^T \cdot [K^e] \cdot [D^e]$$

$$\frac{1}{2} [D]^T \cdot [K] \cdot [D] = \frac{1}{2} [D^1]^T \cdot [K^1] \cdot [D^1] + \frac{1}{2} [D^2]^T \cdot [K^2] \cdot [D^2]$$

avec

$$[K^1] = [K^2] = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D^1] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[D^2] = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & K & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

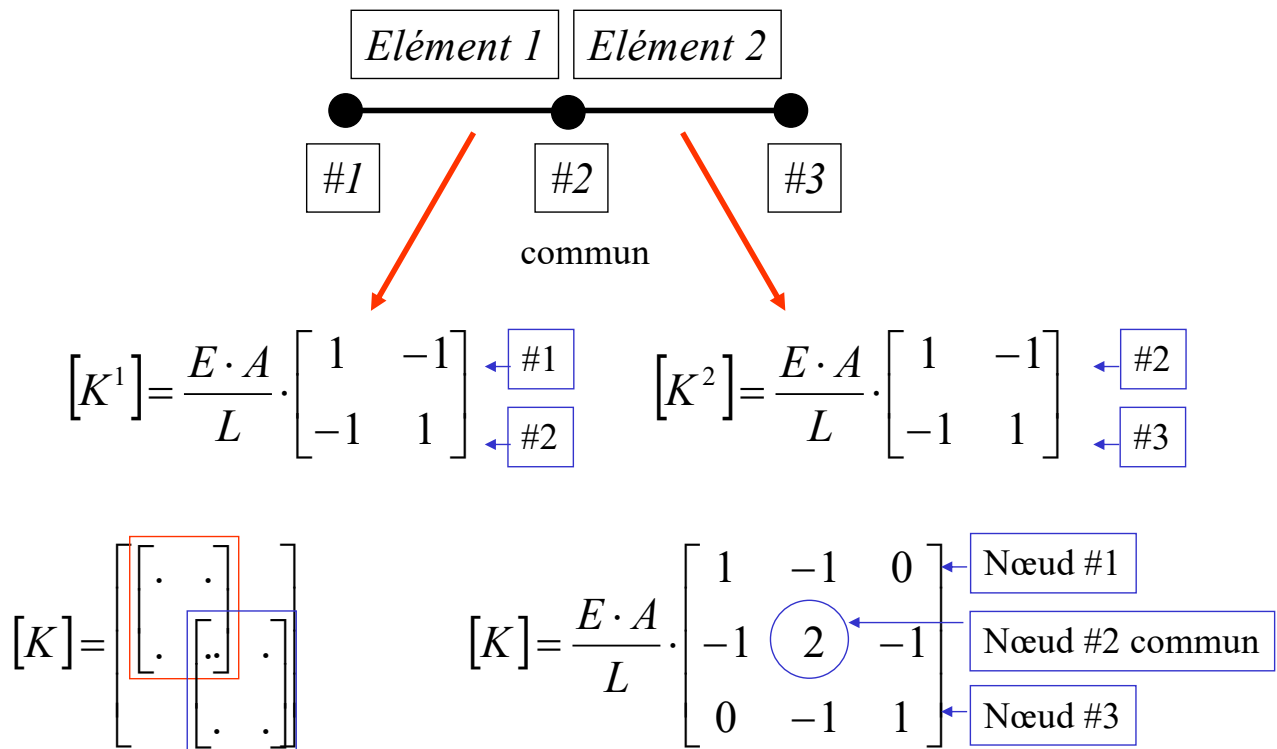
$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & K & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{E \cdot A}{L} \cdot \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right)$$

Identification membre à membre :

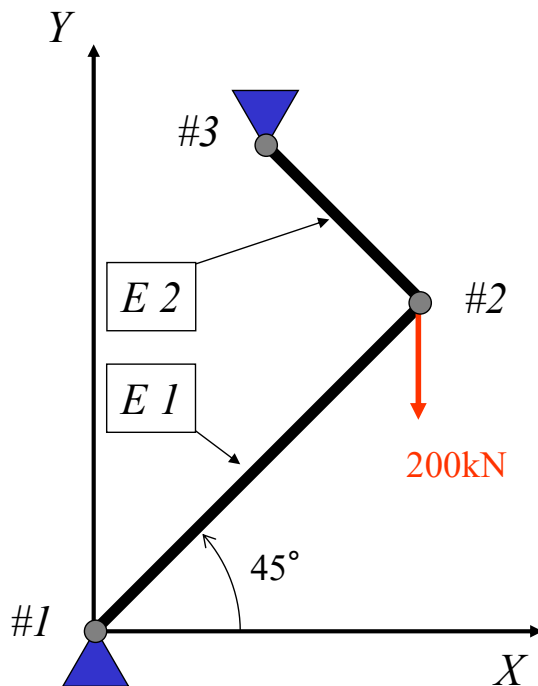
$$[K] = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Règle pratique pour l'assemblage d'éléments poutres colinéaires



4. EXEMPLE DE REFERENCE

4.1 Cahier des charges



DONNEES

Elément 1 : longueur L

Elément 2 : longueur $L/2$

Elément 1&2 : section carrée 30x30

Matériau $E=200\text{GPa}$

Uniquement traction-compression dans les barres car :

- toutes liaisons -> articulations
- action extérieures -> liaisons

DETERMINER

- matrices de rigidité locale
- matrice de rigidité globale
- déplacements et réactions aux nœuds
- efforts dans les barres

4.2 Matrices de rigidité élémentaire

$$E 1 \quad [K^1]_{x_1, y_1} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]_{X,Y} = [\lambda]^T \cdot [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda]$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \cos(45) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(45) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$[\lambda] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^1]_{X,Y} = \frac{E.A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^1]_{X,Y} = \frac{E.A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^1]_{X,Y} = \frac{E.A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E.A}{2L} = \frac{200000 \cdot 30 \cdot 30}{2 \cdot 450}$$

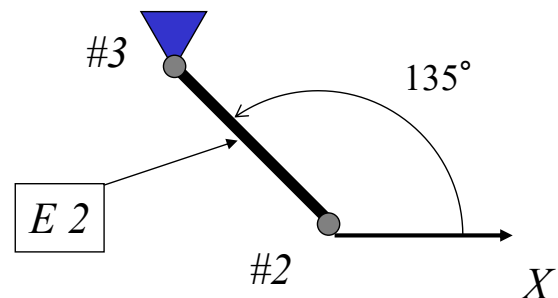
$$\frac{E.A}{2L} = 200000 \quad N/mm$$

$$E 2 \quad [K^2]_{x_2, y_2} = \frac{2.E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e]_{X,Y} = [\lambda]^T \cdot [K^e]_{x,y} \cdot [\lambda]$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\lambda] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\cos(135) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$[K^2]_{X,Y} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^2]_{X,Y} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^2]_{X,Y} = \frac{E.A}{2L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{E.A}{2L} = \frac{200000 \cdot 30 \cdot 30}{2 \cdot 450}$$

$$\frac{E.A}{2L} = 200000 \quad N/mm$$

4.3 Matrices de rigidité globale

$$[K]_{X,Y} = 2.10^5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 3 & -1 & -2 & 2 \\ & & & 3 & 2 & -2 \\ & & & & 2 & -2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

4.4 Déplacements & réactions aux nœuds

$$[P] = [K] \cdot [D]$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 0 = \\ -200\,000 = \end{array} \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{X,Y} = 2.10^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 3 & -1 & -2 & 2 \\ & & & 3 & 2 & -2 \\ & & & & 2 & -2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{bmatrix}_{X,Y} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Charges extérieures
(forces, couples...)

Structure
(Géométrie+matériau)

Liaisons
Conditions aux limites

Matrice des inconnues primaires

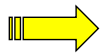
$$\begin{array}{c} 0 = \\ -200\,000 = \end{array} \begin{bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \end{bmatrix}_{X,Y} = 2.10^5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{X2} \\ u_{Y2} \end{bmatrix}_{X,Y} ?$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2.10^5 \end{bmatrix}_{X,Y} = 2.10^5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{X2} \\ u_{Y2} \end{bmatrix}_{X,Y}$$

$$\begin{array}{l} u_{X2} = -0,125 \text{ mm} \\ u_{Y2} = -0,375 \text{ mm} \end{array}$$

Réactions en A & C

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ -2 \cdot 10^5 \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{X,Y} = 2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 3 & -1 & -2 & 2 \\ & & & 3 & 2 & -2 \\ & & & & 2 & -2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,125 \\ -0,375 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{X,Y}$$



$$\begin{aligned} F_{X1} &= 10^5 \text{ N} \\ F_{Y1} &= 10^5 \text{ N} \\ F_{X3} &= -10^5 \text{ N} \\ F_{Y3} &= 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

Equilibre du système ?

$$\vec{R} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{noeud} = 0$$

4.5 Efforts normaux dans les éléments

$$\boxed{E I} \quad [D^1]_{x_1, y_1} = [\lambda] \cdot [D^1]_{X, Y} \quad [\lambda] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{X1} \\ u_{Y1} \\ u_{X2} \\ u_{Y2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,125 \\ -0,375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_{x1} &= 0 \text{ mm} \\ u_{x2} &= -0,3536 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P^1 \end{bmatrix}_{x_1, y_1} = \begin{bmatrix} K^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^1 \end{bmatrix}_{x_1, y_1}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix}_{x_1, y_1} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,3536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_{x1}^1 = 141 \text{ kN} \\ F_{x2}^1 = -141 \text{ kN} \end{array} \quad \text{Elément 1 comprimé}$$

$$\boxed{E 2} \quad \begin{bmatrix} D^2 \end{bmatrix}_{x_2, y_2} = \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^2 \end{bmatrix}_{X, Y} \quad \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{X2} \\ u_{Y2} \\ u_{X3} \\ u_{Y3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,125 \\ -0,375 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} u_{x2} = -0,1768 \text{ mm} \\ u_{x3} = 0 \text{ mm} \end{array}$$

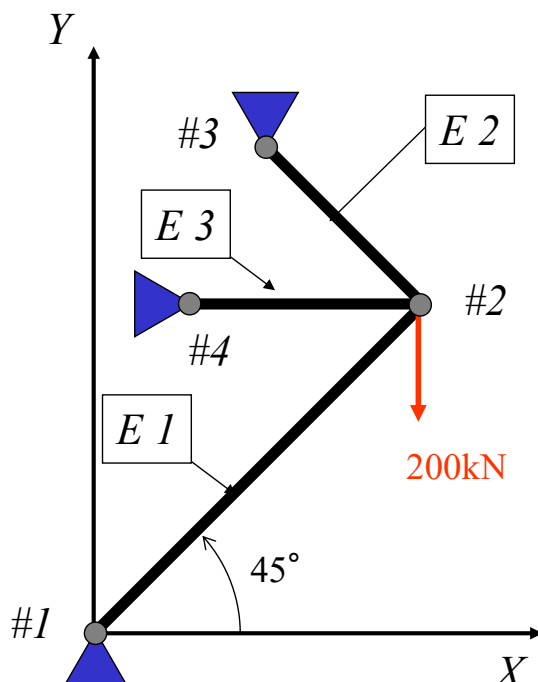
$$[P^2]_{x_2, y_2} = [K^2] \cdot [D^2]_{x_2, y_2}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix}_{x_2, y_2} = \frac{2.E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1768 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_{x2}^1 &= -141 \text{ kN} \\ F_{x3}^1 &= 141 \text{ kN} \end{aligned}$$

Elément 2 tendu

4.6 Modification de la structure



DONNEES

Elément 1 : longueur L

Elément 2 : longueur $L/2$

Elément 3 : longueur $L/2$

Elément 1, 2 & 3 :

Section carrée 30x30

Matériau $E=200\text{GPa}$

DETERMINER

- matrices de rigidité locale
- matrice de rigidité globale
- déplacements et réactions aux nœuds
- efforts dans les barres

J-F Imbert	<i>Analyse des structures par la méthode éléments finis</i>	Cépaduès Editions
Ph Trompette	<i>Mécanique des structures par la méthode éléments finis. Statique et dynamique</i>	Masson
D Gay J Gambelin	<i>Une approche simple de la méthode éléments finis</i>	Hermès
G. Dhatt J-l Batoz	<i>Modélisation des structures par éléments finis</i>	Hermès
Zienkiewicz Taylor	<i>Finite element method</i>	Mac Graw - Hill
M. Brunet	<i>Introduction à la méthode éléments finis</i>	Cours INSA Lyon



Toi aussi,
tu es devenu
un mécanicien !

