

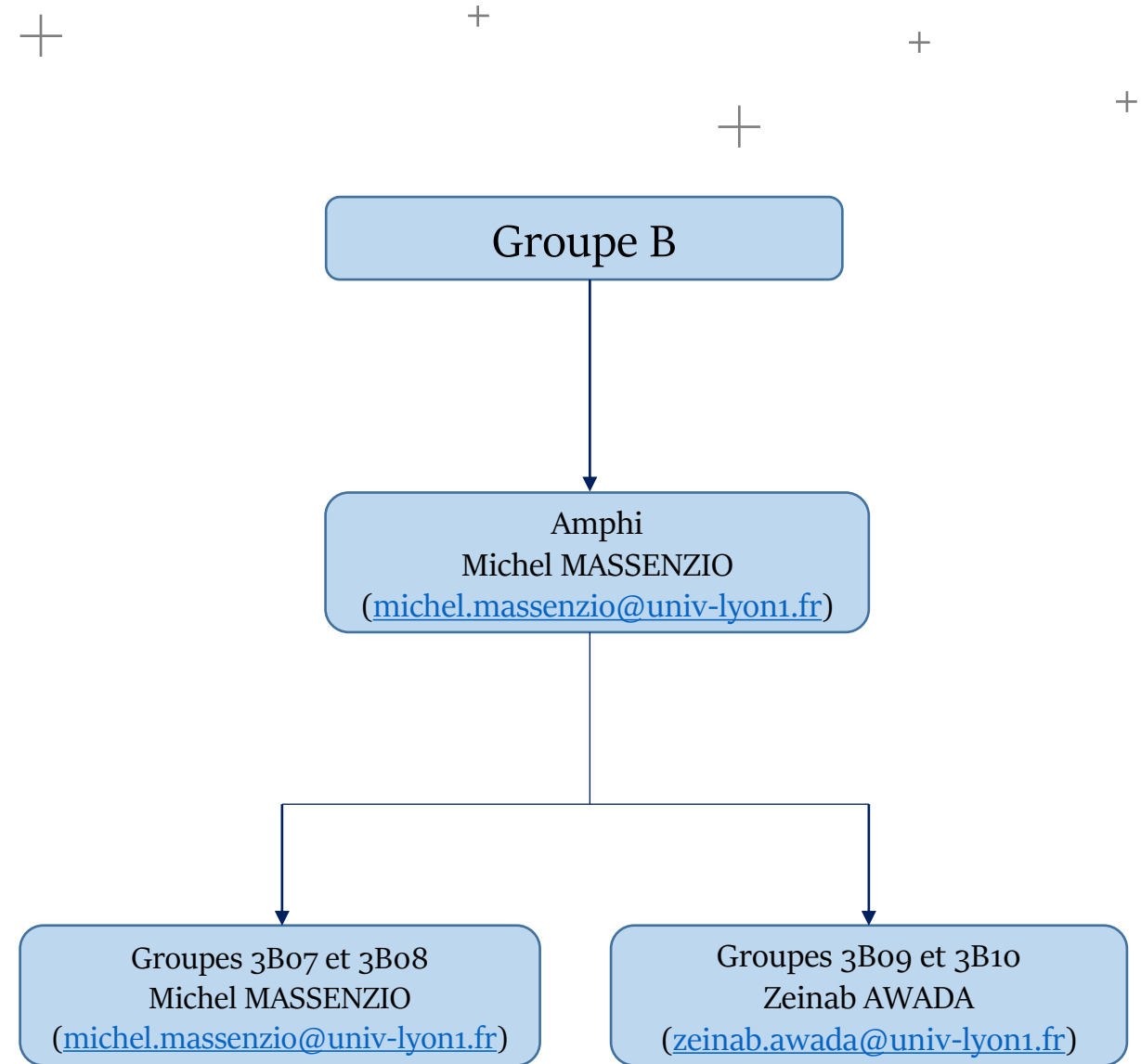
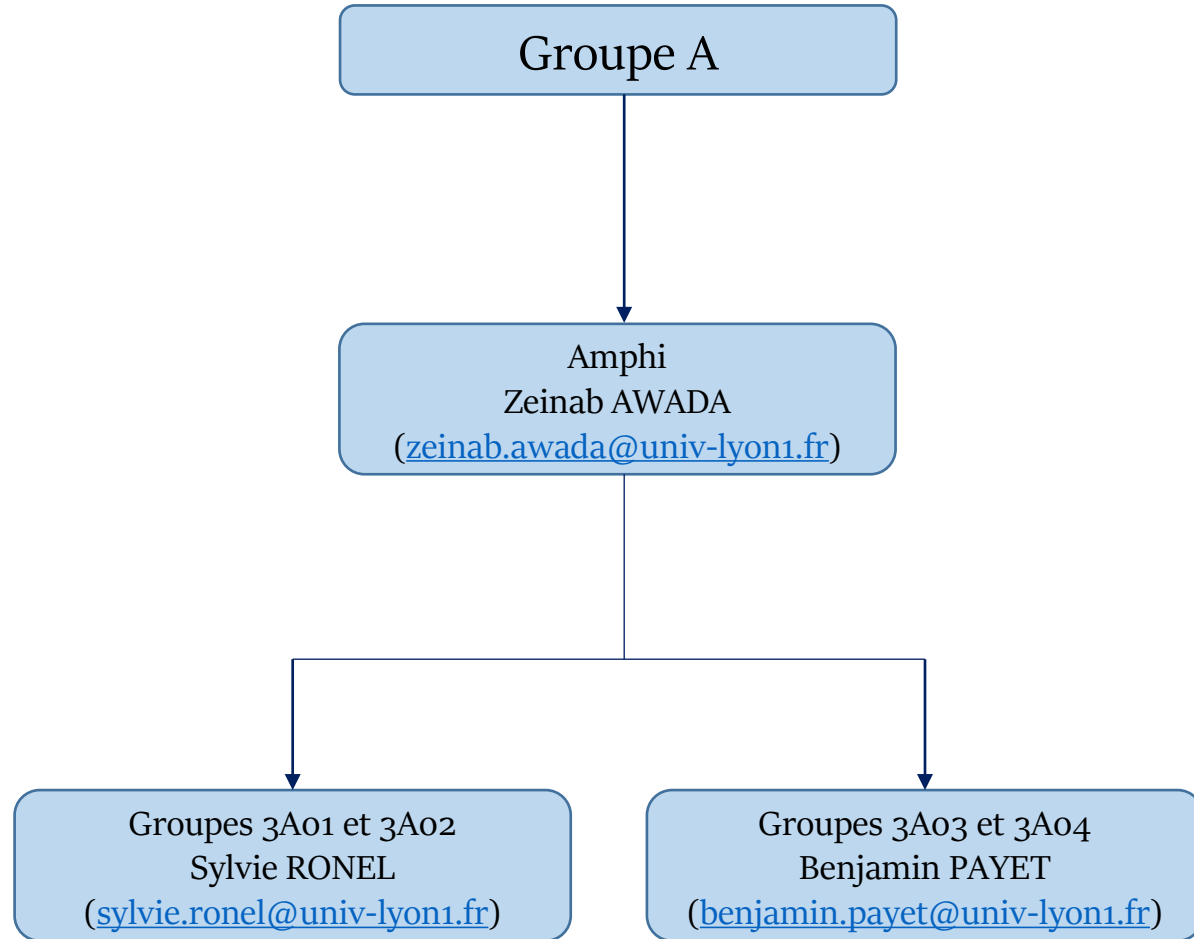
Ressource R5.02- Dimensionnement des structures



Dimensionnement des Structures (DdS)
Département GMP – Bâtiment A – Bureau 44

Année universitaire 2025--2026

Equipe enseignante :



Plan du cours :

+ **Chapitre 1** : Méthodes énergétiques

3h de CM

8h de TD

+ **Chapitre 2** : Méthode des éléments finis

3h de CM

6h de TD

Atelier python implémentation par éléments finis (en cours de montage)

+

+

+

+

+

Chapitre 1 : Méthodes énergétiques

Partie I : Energie

I.1 Définition de l'énergie et ses formes

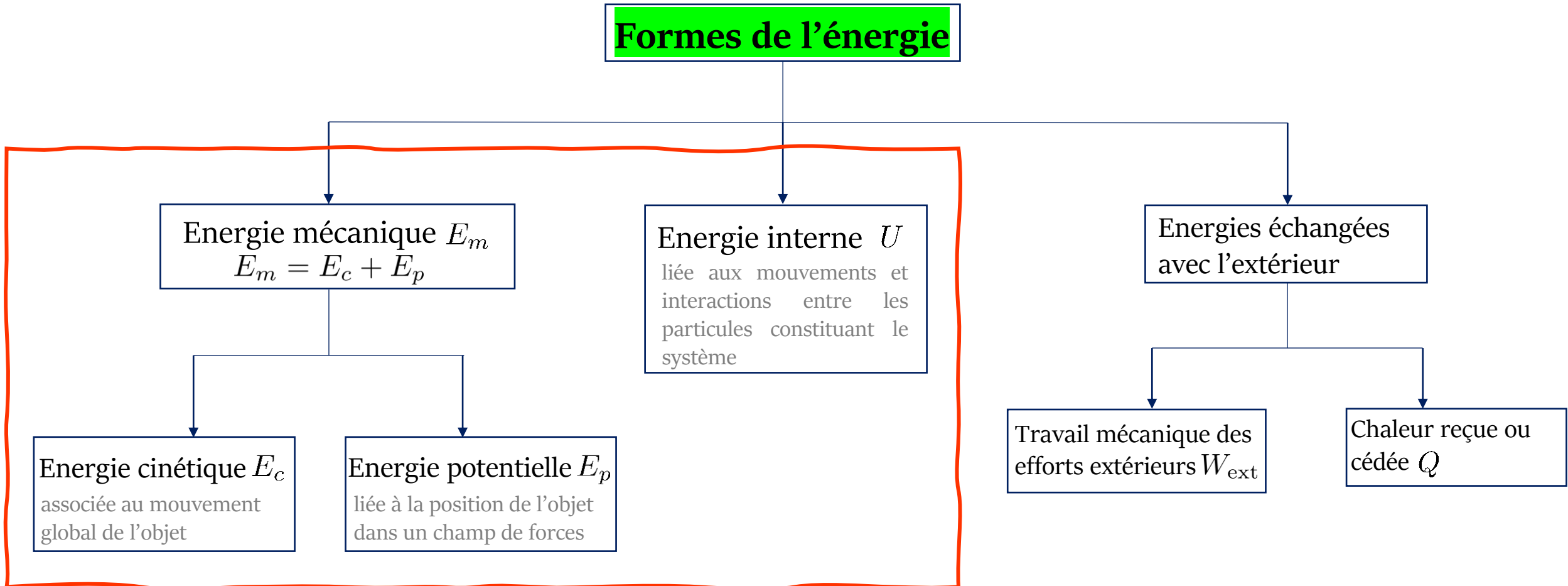
I.2 Conservation de l'énergie

I.3 Travail des efforts extérieurs

I.4 Energie de déformation

I.1 Définition de l'énergie et ses formes :

L'énergie est une grandeur physique mesurable, exprimée en joules (J) dans le Système international d'unités (SI).
Elle peut se présenter sous différentes formes pour un système donné :

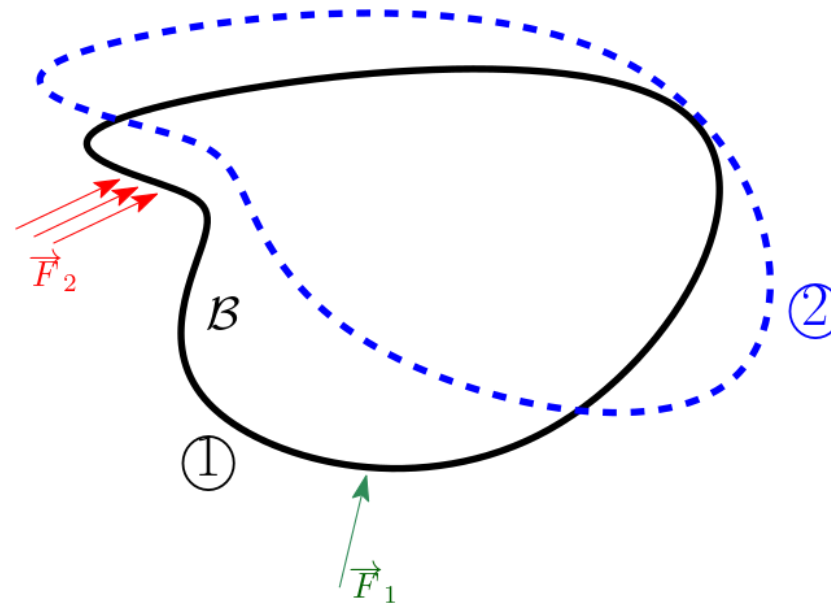


Energie totale d'un système : $E_{\text{totale}} = E_m + U$

I.2 Conservation de l'énergie :

I.2.a Premier principe de la thermodynamique :

Considérons un solide $\mathcal{B}$ qui évolue d'un état initial ① vers un état final ②, sous l'effet des efforts extérieurs appliqués :



D'après le ***principe de conservation de l'énergie***, la variation de l'énergie totale du système entre ces deux états est égale à la somme du travail des efforts extérieurs et de la chaleur reçue :

$$\Delta E_{\text{totale}} = W_{\text{ext}}(\text{①} \rightarrow \text{②}) + Q(\text{①} \rightarrow \text{②})$$

- $W_{\text{ext}}(\text{①} \rightarrow \text{②})$ est le travail effectué par les efforts extérieurs lors du passage de l'état ① à l'état ② ,
- $Q(\text{①} \rightarrow \text{②})$ est la quantité de chaleur reçue par le système au cours de cette transformation.

I.2 Conservation de l'énergie :

I.2.b Hypothèses :

- **(H1)** : Le matériau élastique linéaire.
- **(H2)** : Le comportement est quasi-statique : les sollicitations extérieures sont appliquées progressivement (sans accélération) de manière à n'introduire que des déplacements à vitesse très lente. On peut alors négliger les effets d'inertie, soit $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_p = 0$.
- **(H3)** : Les aspects calorifiques dues aux transformations que subit le solides ne sont pas pris en compte.
- **(H4)** : Le poids propre de la poutre est négligé, ce qui correspond à une condition de repos initial.
- **(H5)** : Les déplacements sont petits, ce qui permet l'approximation des déformations infinitésimales.

I.2 Conservation de l'énergie :

I.2.c Prise en compte des hypothèses :

Premier principe de la thermodynamique :

$$\cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_p} + \Delta U = W_{\text{ext}}(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}) + \cancel{Q(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})}$$

(H2) : Le comportement est quasi-statique : $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_p = 0$

$$U_{\textcircled{2}} - U_{\textcircled{1}}$$

(H4) : L'état initial est naturel :
 $U_{\textcircled{1}} = 0$

(H3) : Aucun échange de chaleur avec l'extérieur

$$\Rightarrow U_{\textcircled{2}} = W_{\text{ext}}(\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2})$$

L'énergie interne se décompose en :

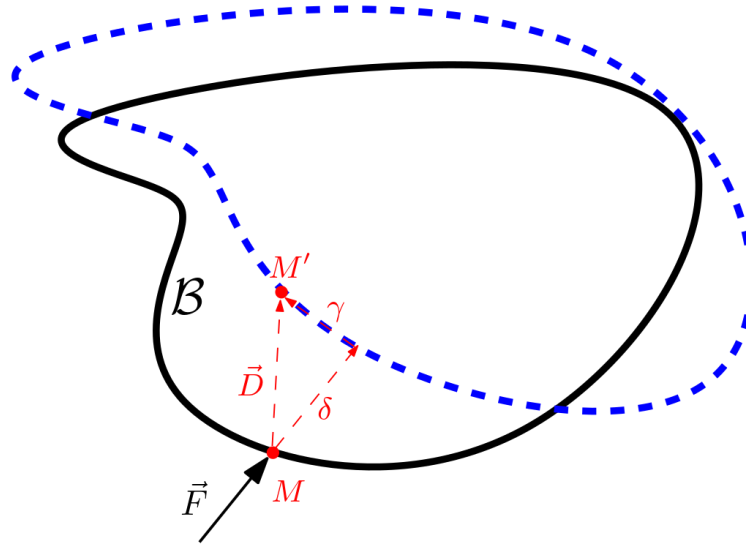
- Energie de déformation W_{def} (énergie élastique dans les solides)
- Energie cinétique microscopique
- Energie potentielle microscopique
- Energie nucléaire
- Energie électronique
- Etc.

(H3) : pas de changement d'état, pas de changement de température, comportement purement élastique

$$W_{\text{def}} = W_{\text{ext}}$$

I.3 Travail des efforts extérieurs :

Considérons un solide $\mathcal{B}$ soumis à des efforts extérieurs. On se concentre sur la force $\vec{F}$ appliquée en un point M . Ce point se déplace en M' . On note δ la projection du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ dans la direction de la force $\vec{F}$.



Comme le chargement est appliqué progressivement, le travail effectué par la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$W_{\vec{F}} = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} F \delta$$

Si le solide est soumis à un couple $\vec{C}$, le travail effectué s'écrit :

$$W_{\vec{C}} = \frac{1}{2} C \theta$$

Démonstration :

L'hypothèse (H2) implique que la force $\vec{F}$ est appliqué de manière progressive, sous la forme $k\vec{F}$ avec $k \in [0, 1]$.

Le cadre de petites perturbations est adopté, la relation force-déplacement est alors linéaire : à une force $k\vec{F}$ correspond un déplacement $k\delta$.

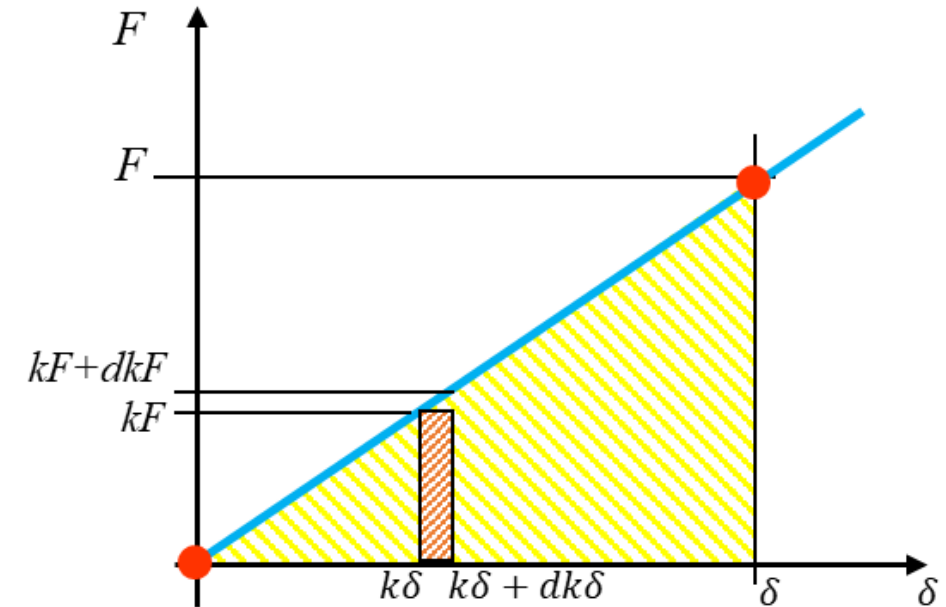
Un incrément de force $dk\vec{F}$ de la force $k\vec{F}$ engendre un déplacement $dk\delta$.

Le travail élémentaire est donc :

$$dW_{\text{ext}} = (k F) (\delta dk)$$

En intégrant pour $k \in [0, 1]$, on obtient le travail total de la force $\vec{F}$:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \int_0^1 dW_{\text{ext}} \\ &= \int_0^1 (k F) (\delta dk) \\ &= F\delta \int_0^1 k dk \\ &= F\delta \left[\frac{k^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} F\delta \end{aligned}$$



$$W_{\vec{F}} = \frac{1}{2} F \delta$$

I.4 Energie de déformation :

I.4.a Expression générale :

Pour un solide élastique linéaire occupant un volume V , l'énergie interne de déformation emmagasinée par le solide est :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV$$

où :

- $\underline{\underline{\sigma}}$ est la matrice de contraintes
- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est la matrice de déformations

En notation indicielle, elle s'écrit :

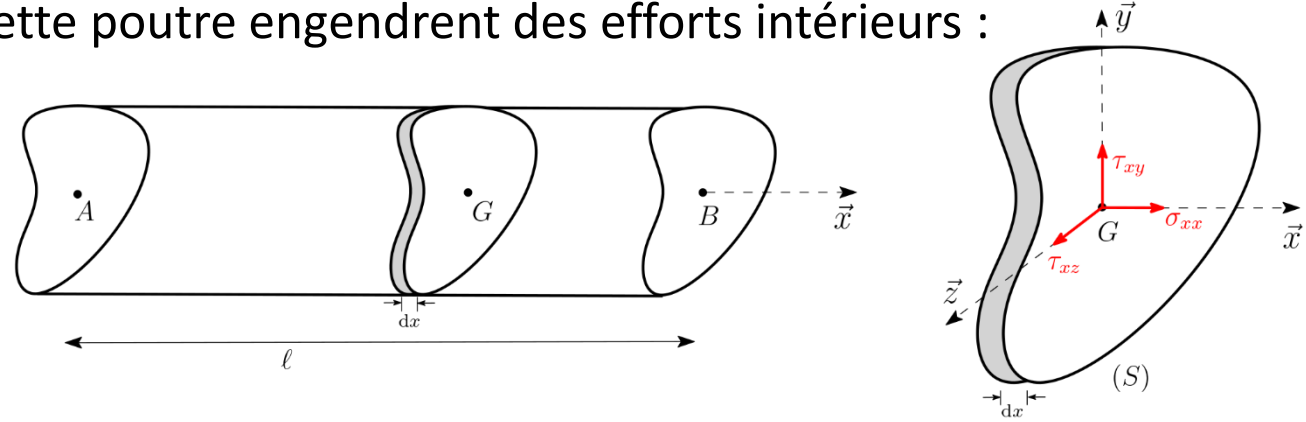
$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \iiint_V \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

La démonstration est équivalente à celle du travail des efforts extérieurs. Veuillez consulter le cours pour plus de détails.

I.4 Energie de déformation :

I.4.b Expression dans le cadre de la RdM :

Considérons une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , dont la fibre moyenne est orientée selon le vecteur $\vec{x}$.
L'application des actions mécaniques extérieures sur cette poutre engendrent des efforts intérieurs :



Pour une section (S), la matrice de contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'énergie de déformation devient : $W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz} \right. \\ \left. + \tau_{yx} \varepsilon_{yx} + \cancel{\sigma_{yy} \varepsilon_{yy}} + \cancel{\tau_{yz} \varepsilon_{yz}} \right. \\ \left. + \tau_{zx} \varepsilon_{zy} + \cancel{\tau_{zy} \varepsilon_{zy}} + \cancel{\sigma_{zz} \varepsilon_{zz}} \right] dV$

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2 \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + 2 \tau_{xz} \varepsilon_{xz}] dV$$

En utilisant la loi de Hooke $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{2} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$, les composantes de déformations s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu}, \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\mu}$$

avec $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement, E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson.

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{\sigma_{xx}^2}{E} + \frac{1}{\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) \right] dV$$

On exploite d'une part les relations entre les contraintes et les efforts intérieurs :

$$\sigma_{xx} = \frac{N(x)}{S} + z \frac{M_y(x)}{I_{Gy}} - y \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \quad \tau_{xy} = \frac{T_y(x)}{S} - z \frac{M_t(x)}{I_G} \quad \tau_{xz} = \frac{T_z(x)}{S} + y \frac{M_t(x)}{I_G}$$

D'autre part, on suppose que $(G\vec{y})$ et $(G\vec{z})$ sont des axes principaux d'inertie :

$$\iint_S y dS = m_{Gz} = 0, \quad \iint_S z dS = m_{Gy} = 0, \quad \iint_S yz dS = I_{Gyz} = 0$$

L'énergie de déformation pour une poutre droite de longueur ℓ à section droite symétrique est :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{T_y(x)^2}{\mu S} + \frac{T_z(x)^2}{\mu S} + \frac{M_y(x)^2}{EI_{Gy}} + \frac{M_z(x)^2}{EI_{Gz}} + \frac{M_t(x)^2}{\mu I_G} \right] dx$$

Elle s'écrit sous la forme :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\dots + \frac{\text{Charge}^2}{\text{Matériau} \times \text{Inertie}} + \dots \right) dx$$

La quantité "Charge" est la composante du torseur de cohésion

La quantité « Matériau » désigne le module de Young E pour une charge induisant une contrainte normale et le module de cisaillement μ pour une charge induisant une contrainte tangentielle

La quantité "Inertie" est liée à la géométrie du matériau. Elle est égale à la surface S si la "charge" est une force et par le moment quadratique ou produit I si la "charge" est un moment.

Pour une poutre droite plane dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$:

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{T_y(x)^2}{\mu S} + \frac{M_z(x)^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

Partie II : Méthode de Clapeyron

II.1 Coefficients d'influence

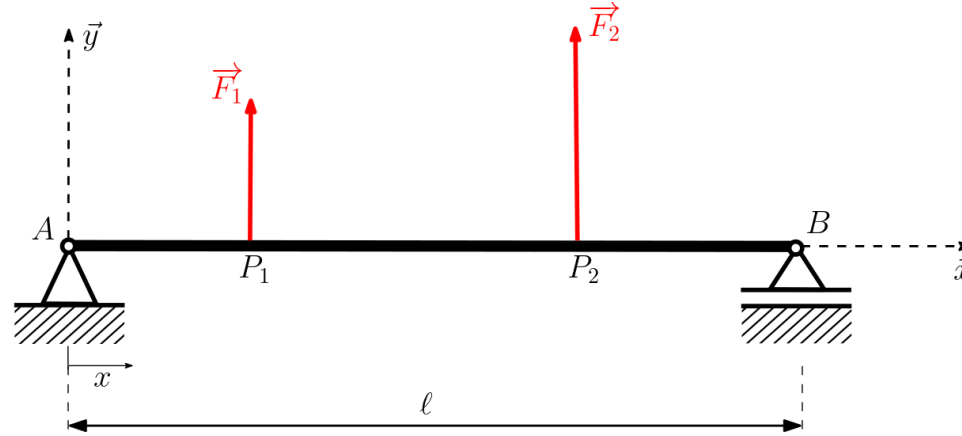
II.2 Formule de Clapeyron

II.3 Exemple d'application

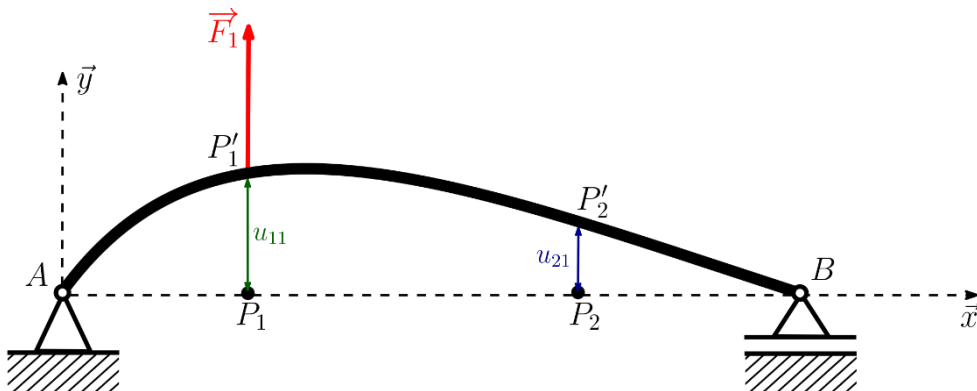
II Méthode de Clapeyron :

II.1 Coefficients d'influence :

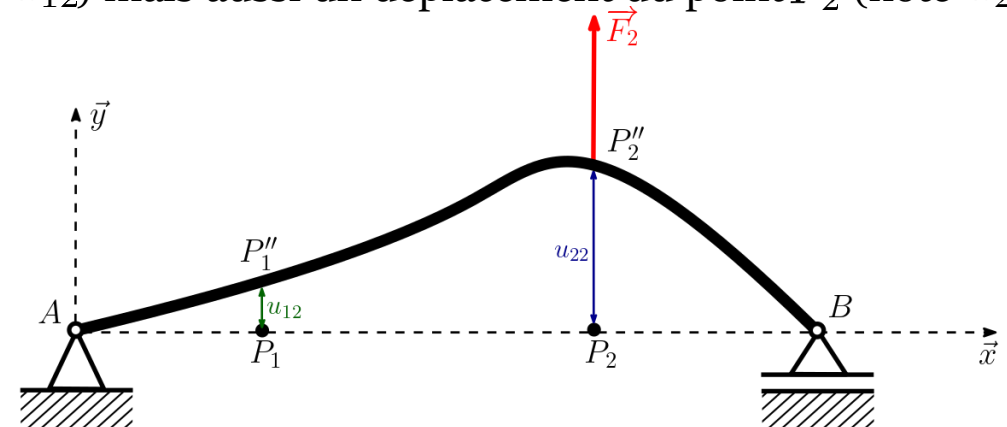
On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ soumise à l'action de deux forces concentrées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ appliquées respectivement aux points P_1 et P_2 .



L'application de $\vec{F}_1$ en P_1 provoque un déplacement du point P_1 (noté u_{11}) mais aussi un déplacement du point P_2 (noté u_{21})

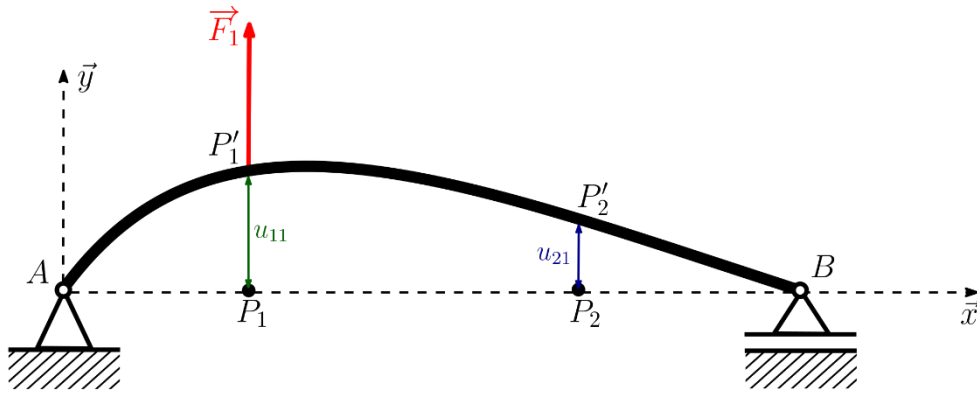


L'application de $\vec{F}_2$ en P_2 provoque un déplacement du point P_1 (noté u_{12}) mais aussi un déplacement du point P_2 (noté u_{22})



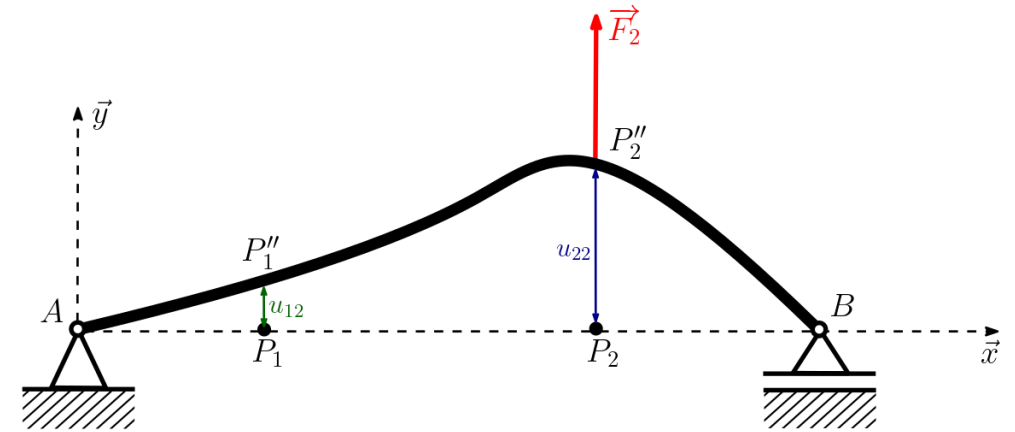
Comme les déplacements se produisent dans la direction de la force appliquée, il existe une proportionnalité entre les forces et les déplacements.

Cette propriété permet d'introduire les coefficients d'influence f_{ij} qui représentent respectivement les déplacements des points P_1 et P_2 sous l'effet d'une *force unitaire*



$$u_{11} = f_{11}F_1$$

$$u_{21} = f_{21}F_1$$



$$u_{12} = f_{12}F_2$$

$$u_{22} = f_{22}F_2$$

On pose :

- $\delta_1 = u_{11} + u_{12} = f_{11}F_1 + f_{12}F_2$: le déplacement projeté du point P_1 dans la direction de $\vec{F}_1$
- $\delta_2 = u_{21} + u_{22} = f_{21}F_1 + f_{22}F_2$: le déplacement projeté du point P_2 dans la direction de $\vec{F}_2$

Généralisation :

Pour une poutre en équilibre sous l'action de forces concentrées $\vec{F}_i = F_i \vec{n}_i$ ($1 \leq i \leq n$), alors le déplacement du point P_i projeté sur la direction de $\vec{F}_i$ s'écrit :

$$\delta_i = \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n f_{ij} F_j$$

avec u_{ij} est la contribution du déplacement provoqué au point P_i par la force $\vec{F}_j$ appliquée en P_j

Remarque :

Les indices du déplacement sont tels que :

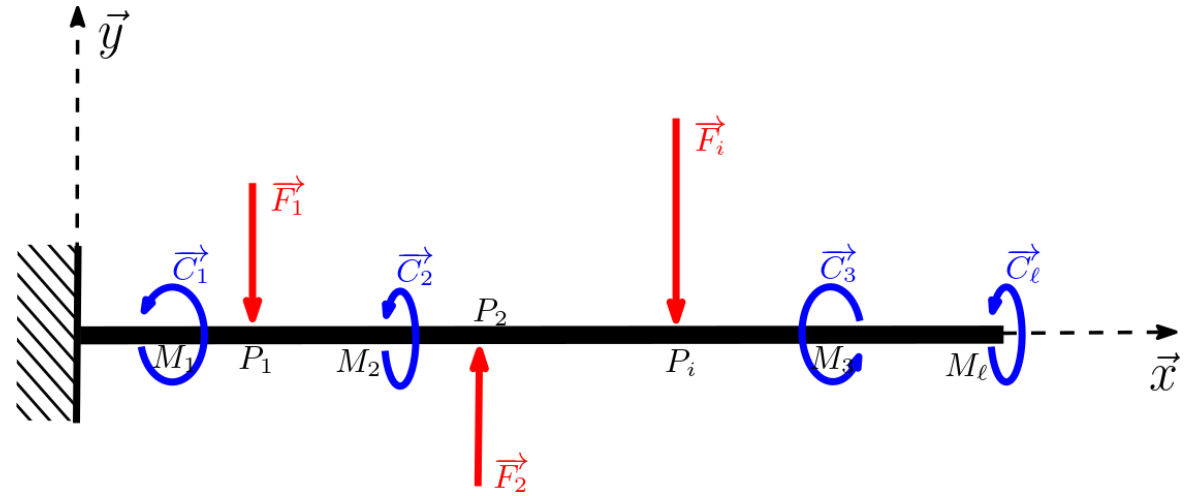
- Le **premier indice** indique **l'effet** (ici le déplacement en P_i)
- Le **second indice** indique **la cause** (ici la force $\vec{F}_j$ appliquée en P_j)

II Méthode de Clapeyron :

II.2 Formule de Clapeyron :

On considère une poutre en équilibre sous l'action de sollicitations extérieures :

- Des forces $\vec{F}_i$ appliquées aux points P_i ($1 \leq i \leq n$)
- Des couples $\vec{C}_\ell$ appliquées aux points M_ℓ ($1 \leq \ell \leq r$)



On note :

- δ_i le déplacement du point d'application de la force $\vec{F}_i$, projeté dans la direction de cette force
- θ_ℓ la rotation de la section au point d'application du couple $\vec{C}_\ell$

Sous l'hypothèse de comportement élastique linéaire et de petits déplacements, l'énergie de déformation s'écrit :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^r C_\ell \theta_\ell$$

Remarque :

Le théorème de Clapeyron est particulièrement utile lorsqu'un seul chargement (force ou couple) est appliqué.

Dans ce cas, il permet de déterminer facilement un déplacement ou une rotation, et la formule se simplifie :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} F \delta \quad \text{ou} \quad W_{\text{def}} = \frac{1}{2} C_{\ell} \theta_{\ell}$$

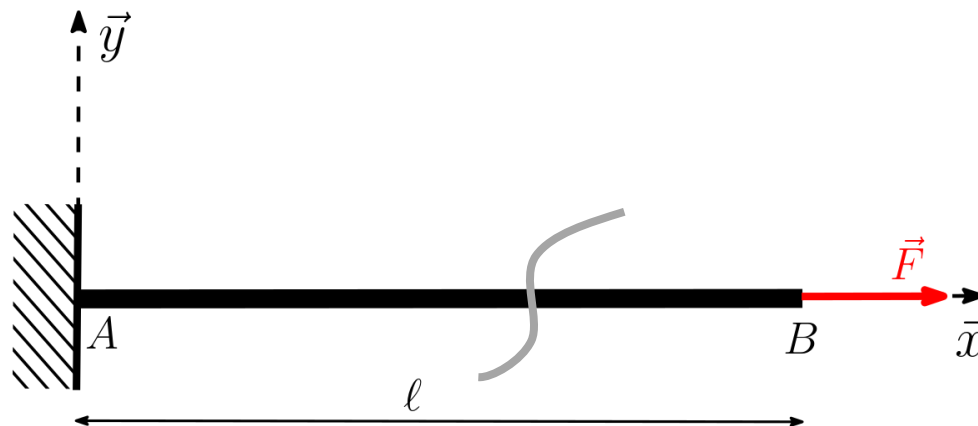
Si plusieurs forces ou couples sont appliqués simultanément, la formule de Clapeyron reste valable, mais il serait difficile d'isoler l'effet d'une action particulière.

Dans ce cas, il est souvent préférable de recourir à d'autres méthodes énergétiques, comme le théorème de Maxwell-Mohr ou de Castigliano.

II Méthode de Clapeyron :

II.3 Exemple d'application 1 :

On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , constituée d'un matériau homogène, encastrée en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $F\vec{x}$ constante en $x = \ell$. On cherche à déterminer le déplacement du point B .



Solution :

Le torseur des efforts intérieurs s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_y(x) \\ T_z(x) & M_z(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

L'expression de l'énergie de déformation est :

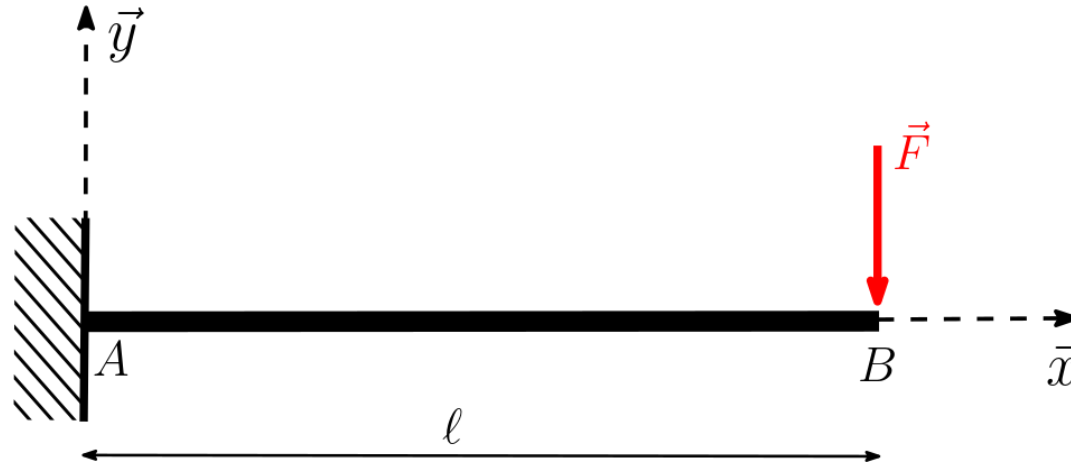
$$\begin{aligned} W_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{T_y(x)^2}{\mu S} + \frac{M_z(x)^2}{EI_{Gz}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{N(x)^2}{ES} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{F^2}{ES} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{F^2 \ell}{ES} \end{aligned}$$

La formule de Clapeyron s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{\text{def}} &= \frac{1}{2} F \delta_B \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{F^2 \ell}{ES} &= \frac{1}{2} F \delta_B \\ \Rightarrow \delta_B &= \frac{F \ell}{ES} \end{aligned}$$

II.3 Exemple d'application 2 :

On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , constituée d'un matériau homogène, encastrée en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ constante en $x = \ell$. On cherche à déterminer le déplacement du point B .



Solution :

Le torseur des efforts intérieurs s'écrit :

L'expression de l'énergie de déformation est :

La formule de Clapeyron s'écrit :

Partie III : Méthode de Maxwell-Mohr

III.1 Matrice de flexibilité ou de souplesse

III.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

III.3 Travail des actions extérieures en fonction de la matrice de flexibilité

III.4 Calcul des termes de la matrice de flexibilité

III.5 Exemple d'application

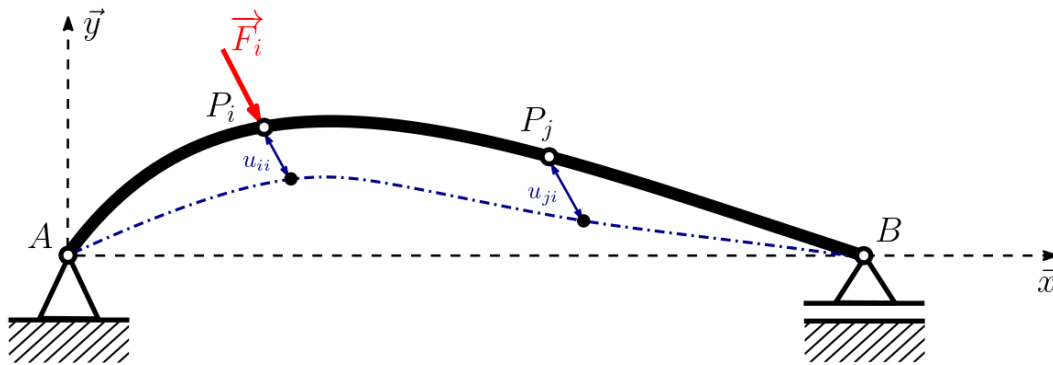
III Méthode de Maxwell-Mohr :

III.1 Matrice de flexibilité ou de souplesse

Rappel sur les coefficients d'influence :

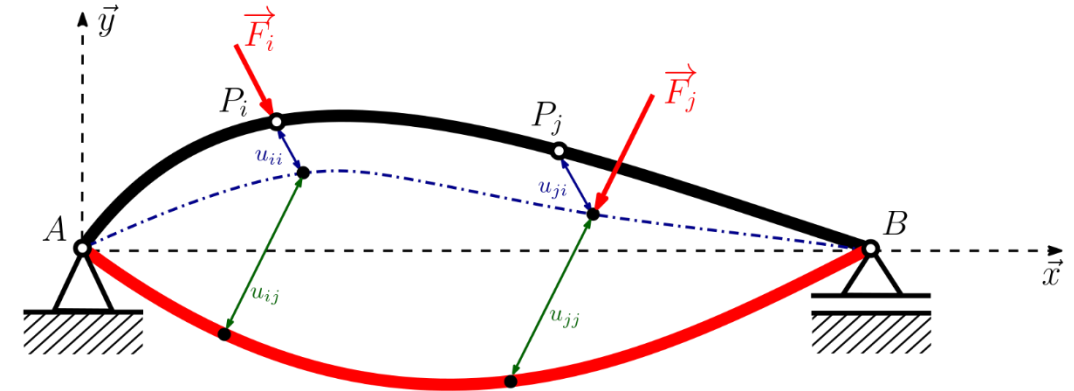
On considère une poutre en équilibre sous l'action de deux forces extérieures :

- (a) La force $\vec{F}_i$ appliquée au point P_i
- (b) La force $\vec{F}_j$ appliquée au point P_j



Les coefficients d'influence vérifient les relations :

$$u_{ii} = f_{ii}F_i \quad \text{et} \quad u_{ji} = f_{ji}F_i$$



$$u_{ij} = f_{ij}F_j \quad \text{et} \quad u_{jj} = f_{jj}F_j$$

Le déplacement total des points P_i et P_j s'écrit :

$$\delta_i = u_{ii} + u_{ij} = f_{ii}F_i + f_{ij}F_j$$

$$\delta_j = u_{ji} + u_{jj} = f_{ji}F_i + f_{jj}F_j$$

sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

La relation entre les déplacements et les forces s'écrit alors :

$$\{D\} = [f] \{F\}$$

où :

- $\{D\}$ est le vecteur des déplacements généralisés ;
- $[f]$ est la **matrice de flexibilité** ;
- $\{F\}$ est le vecteur des charges généralisées.

Généralisation :

Lorsqu'une poutre est soumise à n actions extérieures (forces et/ou couples), la matrice de flexibilité prend la forme suivante :

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

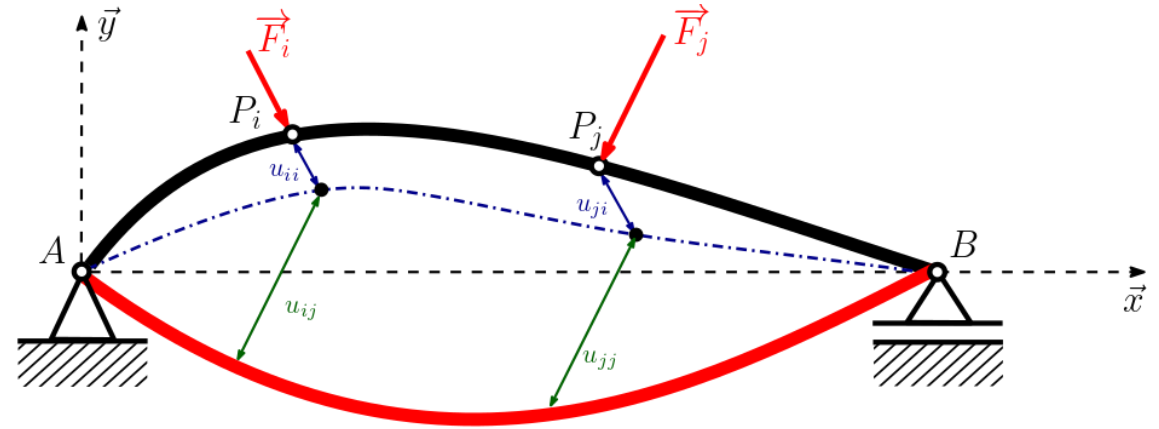
La relation $\{D\} = [f] \{F\}$ reste valable où le vecteur des charges généralisée $\{F\}$ regroupe l'ensemble des forces et couples appliqués, tandis que le vecteur des déplacements généralisés $\{D\}$ contient les déplacements ou les rotations associés.

III Méthode de Maxwell-Mohr :

III.2 Théorème de Maxwell-Betti

On considère une poutre en équilibre sous l'action de deux forces :

- 1) La force $\vec{F}_i$ appliquée au point P_i
- 2) La force $\vec{F}_j$ appliquée au point



Sous l'action de $\vec{F}_i$, les déplacements projetés sur la direction $\vec{F}_i$ sont :
 u_{ii} pour le point P_i et u_{ji} pour le point P_j

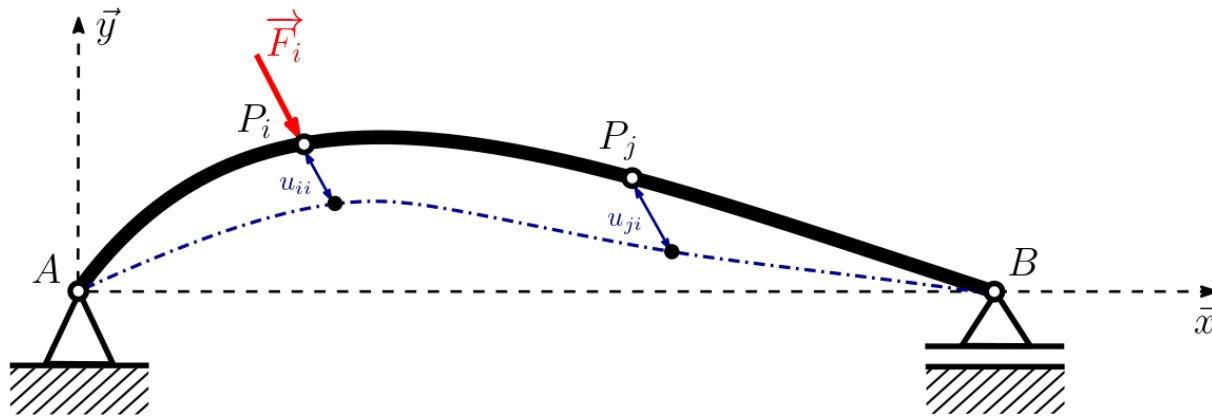
Sous l'action de $\vec{F}_j$, les déplacements projetés sur la direction $\vec{F}_j$ sont :
 u_{ij} pour le point P_i et u_{jj} pour le point P_j

L'énergie interne de déformation ne dépend pas de l'ordre de l'application des charges.

On évalue cette énergie due à l'action simultanée de $\vec{F}_i$ et $\vec{F}_j$ de deux manières.

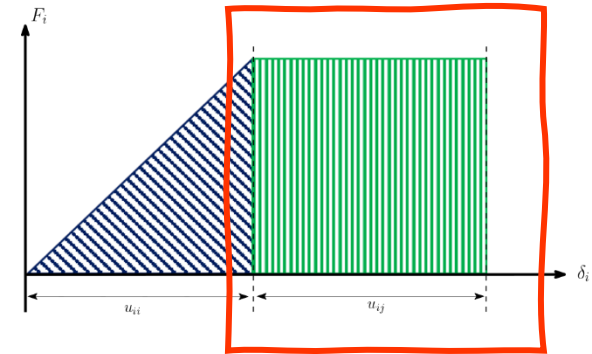
Approche I :

a) On applique d'abord la force $\vec{F}_i$ au point P_i

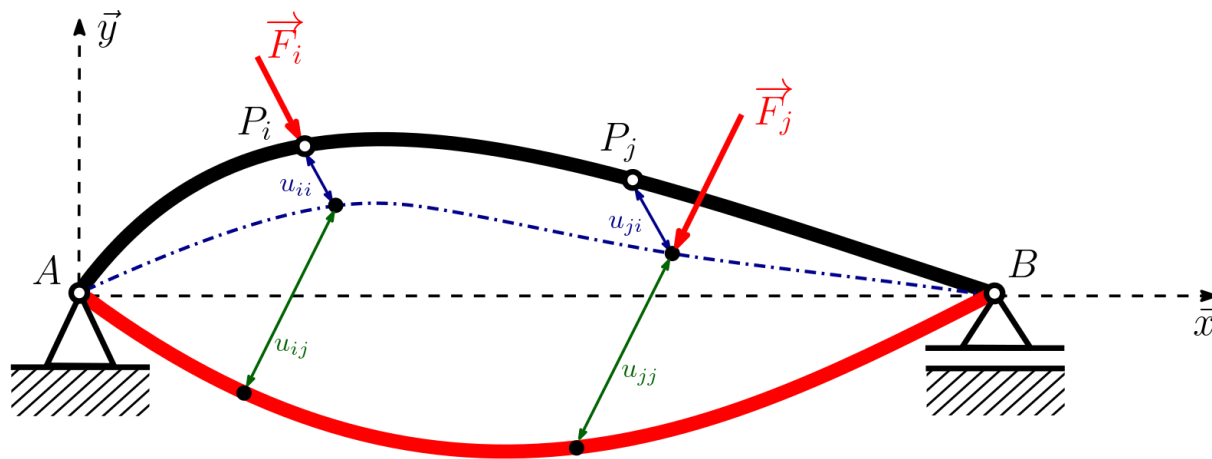


Théorème de Clapeyron :

$$W_{\text{def}_I}^{(a)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii}$$

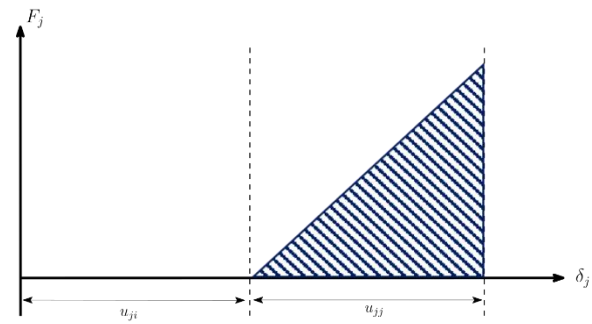


b) Dans un second temps, on applique d'abord la force $\vec{F}_j$ au point P_j



Théorème de Clapeyron :

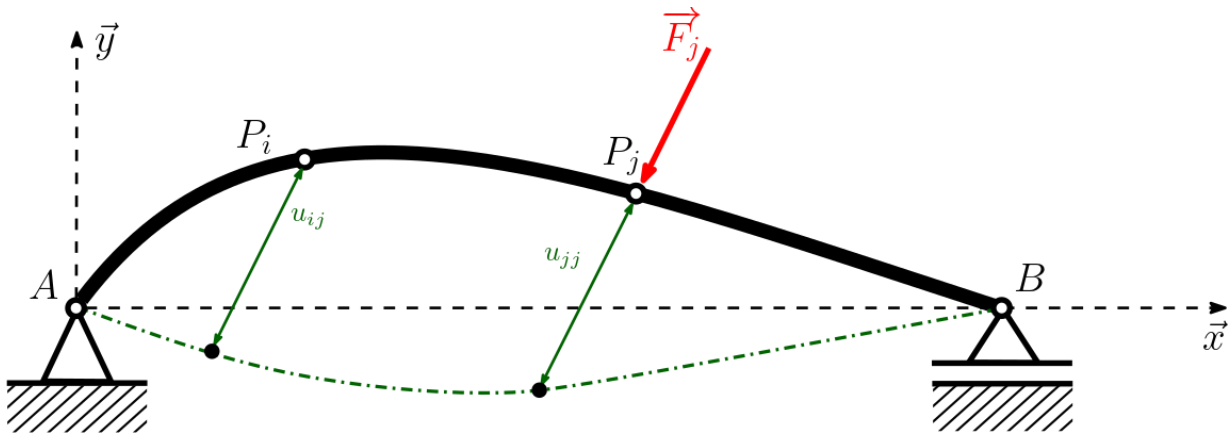
$$W_{\text{def}_I}^{(b)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj} + \boxed{F_i u_{ij}}$$



Energie de déformation totale : $W_{\text{def}_I} = W_{\text{def}_I}^{(a)} + W_{\text{def}_I}^{(b)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii} + \frac{1}{2} F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$

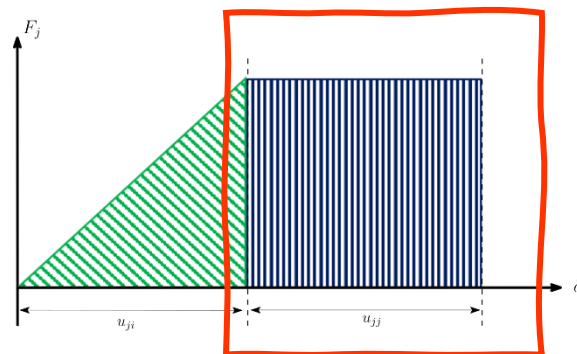
Approche II :

a) On applique d'abord la force $\vec{F}_j$ au point P_j

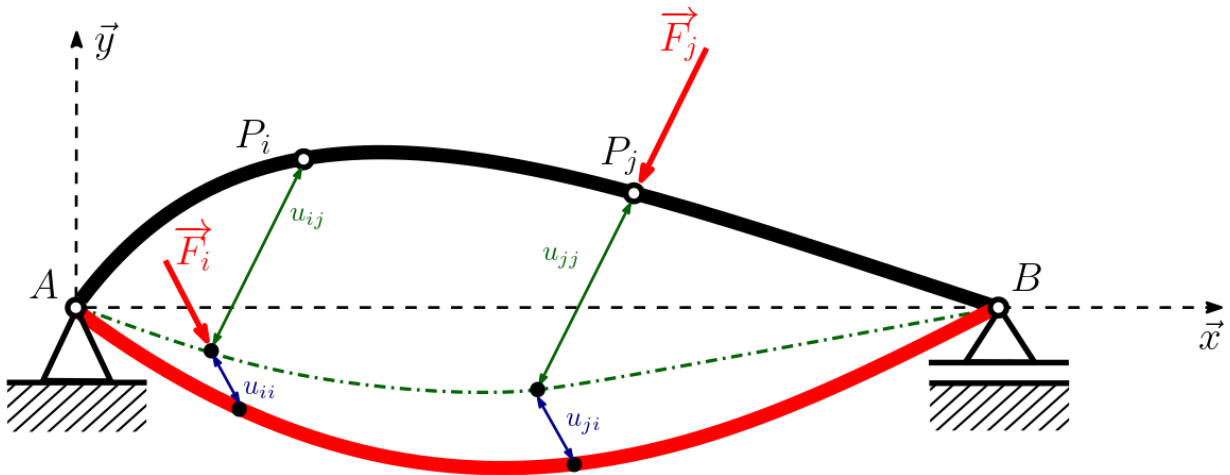


Théorème de Clapeyron :

$$W_{\text{def}_{II}}^{(a)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj}$$

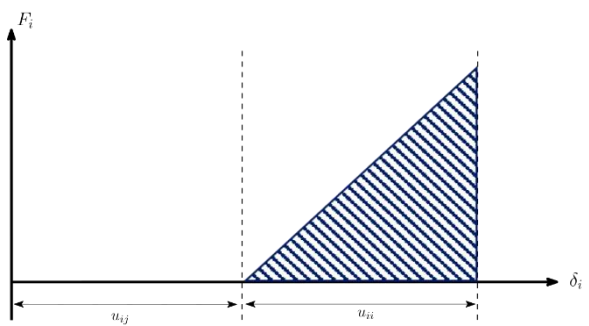


b) Dans un second temps, on applique d'abord la force $\vec{F}_i$ au point P_i



Théorème de Clapeyron :

$$W_{\text{def}_{II}}^{(b)} = \frac{1}{2} F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$



Energie de déformation totale : $W_{\text{def}_{II}} = W_{\text{def}_{II}}^{(a)} + W_{\text{def}_{II}}^{(b)} = \frac{1}{2} F_j u_{jj} + \frac{1}{2} F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$

Comme : $W_{\text{def}_I} = W_{\text{def}_{II}}$, avec : $W_{\text{def}_I} = W_{\text{def}_I}^{(a)} + W_{\text{def}_I}^{(b)} = \frac{1}{2}F_i u_{ii} + \frac{1}{2}F_j u_{jj} + F_i u_{ij}$

$$W_{\text{def}_{II}} = W_{\text{def}_{II}}^{(a)} + W_{\text{def}_{II}}^{(b)} = \frac{1}{2}F_j u_{jj} + \frac{1}{2}F_i u_{ii} + F_j u_{ji}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}F_i u_{ii}} + \cancel{\frac{1}{2}F_j u_{jj}} + F_i u_{ij} = \cancel{\frac{1}{2}F_j u_{jj}} + \cancel{\frac{1}{2}F_i u_{ii}} + F_j u_{ji}$$

$$F_i u_{ij} = F_j u_{ji}$$

D'où le théorème de Maxwell-Betti :

Le travail de la force $\vec{F}_i$ pour le déplacement provoqué par la force $\vec{F}_j$ est égal au travail de la force $\vec{F}_j$ pour le déplacement provoqué par $\vec{F}_i$:

$$F_i u_{ij} = F_j u_{ji}$$

Remarque :

Le théorème de Maxwell-Betti implique la symétrie des coefficients d'influence :

$$F_i u_{ij} = F_j u_{ji}$$

$$\cancel{F_i f_{ij}} \cancel{F_j} = \cancel{F_j f_{ji}} \cancel{F_i}$$

$$f_{ij} = f_{ji}$$

III Méthode de Maxwell-Mohr :

III.3 Travail des actions extérieurs en fonction de la matrice de flexibilité

L'énergie de déformation d'après la méthode de Clapeyron s'écrit :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad \xrightarrow{\text{sous forme matricielle}} \quad W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{F\}^T \{D\}$$

La relation déplacement-force s'écrit :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} F_j \quad \xrightarrow{\text{sous forme matricielle}} \quad \{D\} = [f] \{F\}$$

En combinant les deux relations, on obtient :

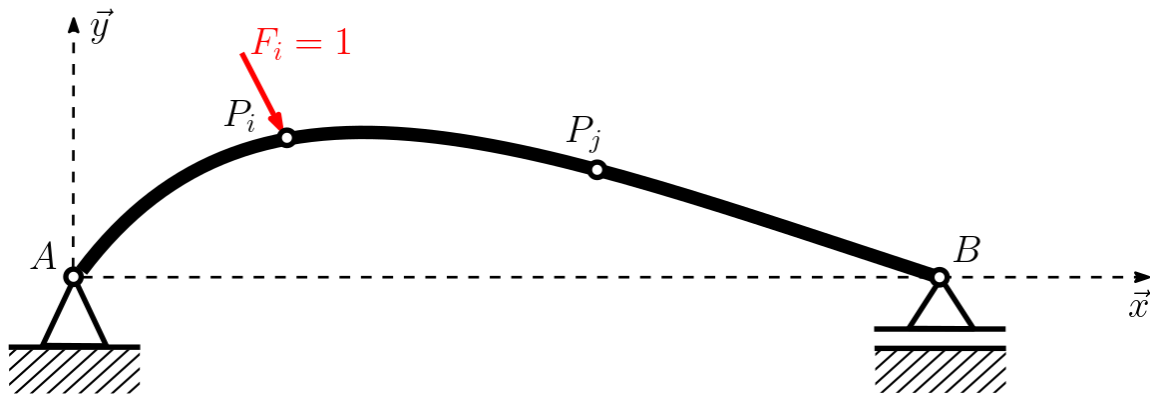
$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{F\}^T \{D\} \{F\}$$

III Méthode de Maxwell-Mohr :

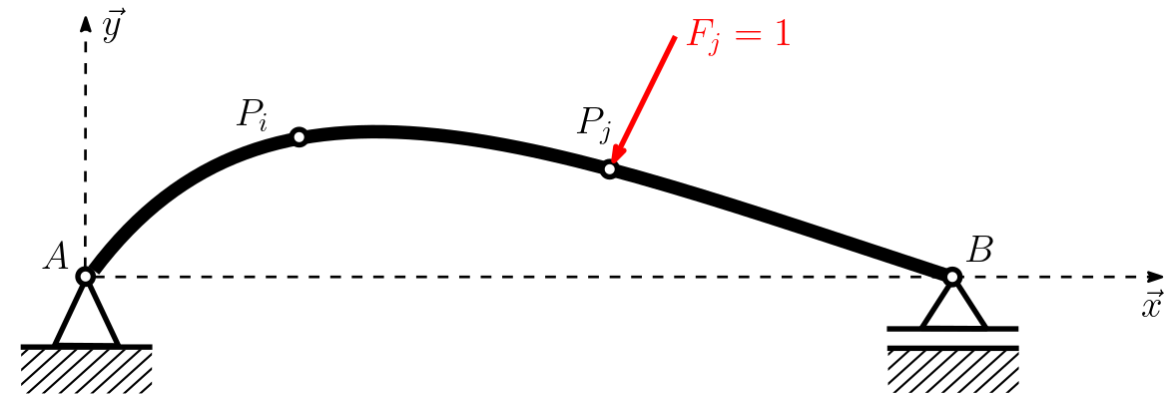
III.4 Calcul des termes de la matrice de flexibilité

On considère une poutre soumise à des efforts extérieurs $\vec{F}_i$ et $\vec{F}_j$. On définit deux états unitaires :

Etat unitaire 1 :



Etat unitaire 2 :



Les coefficients d'influence s'écrivent :

$$f_{ij} = \int_0^{\ell} \left(\frac{(N)_i \cdot (N)_j}{EA} + \frac{(T_y)_i \cdot (T_y)_j}{\mu A} + \frac{(T_z)_i \cdot (T_z)_j}{\mu A} + \frac{(M_t)_i \cdot (M_t)_j}{\mu I_G} + \frac{(M_y)_i \cdot (M_y)_j}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z)_i \cdot (M_z)_j}{EI_{Gz}} \right) dx$$

Remarque :

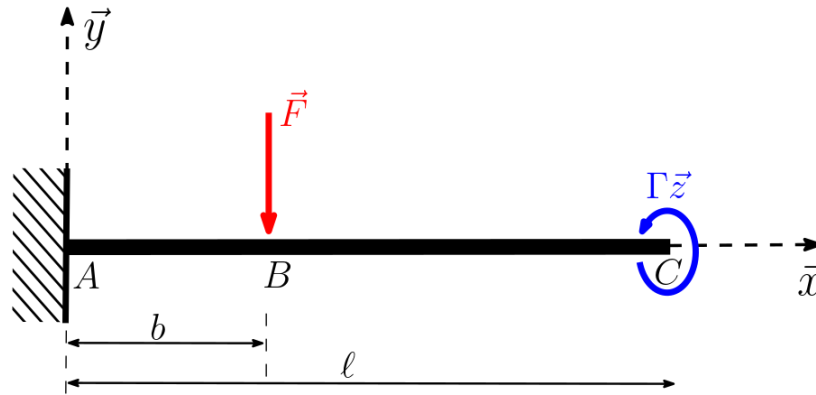
Il y a une analogie avec l'énergie stockée dans une poutre :

1. Pas de facteur $\frac{1}{2}$
2. Les efforts intérieurs $(N_i, \dots)$ sont calculés pour une charge unitaire

III Méthode de Maxwell-Mohr :

III.5 Exemple d'application

On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en $x = a$ et à un couple $\Gamma \vec{z}$ à son extrémité $x = \ell$.



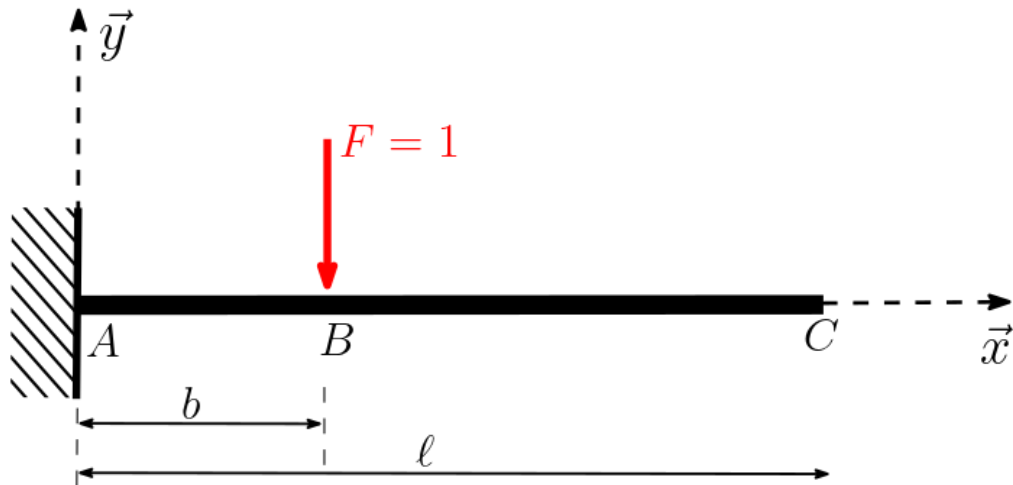
En négligeant dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant, déterminer le déplacement vertical v_B au point B ainsi que la rotation de la section droite θ_C au point C en utilisant la méthode de Maxwell-Mohr.

Solution :

On rappelle la formule : $\{D\} = [f] \{F\}$

Elle s'écrit ici sous la forme :
$$\begin{Bmatrix} v_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ \Gamma \end{Bmatrix}$$

Etat unitaire 1 :



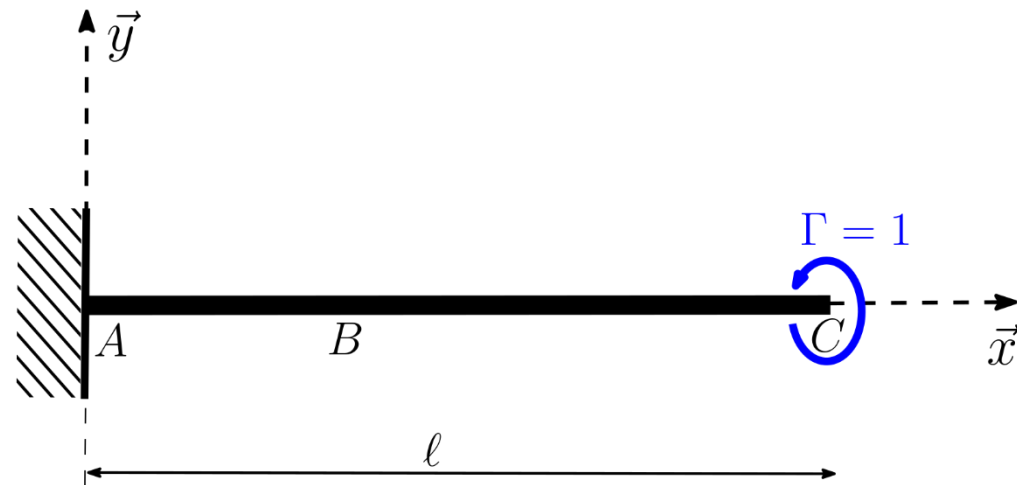
Tronçon AB : $0 < x < b$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & (x - b) \end{pmatrix}_{G_1}$$

Tronçon BC : $b < x < l$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G_2}$$

Etat unitaire 2 :



Tronçon AC : $0 < x < l$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_G$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & (x-b) \end{Bmatrix}_{G_1} \quad \left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2} \quad \left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}_G$$

Calcul de f_{11} :

$$\begin{aligned} f_{11} &= \int_0^\ell \left(\frac{(N)_1 \cdot (N)_1}{EA} + \frac{(T_y)_1 \cdot (T_y)_1}{\mu A} + \frac{(T_z)_1 \cdot (T_z)_1}{\mu A} + \frac{(M_t)_1 \cdot (M_t)_1}{\mu I_G} + \frac{(M_y)_1 \cdot (M_y)_1}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z)_1 \cdot (M_z)_1}{EI_{Gz}} \right) dx \\ &= \int_0^b \left(\frac{(N)_1 \cdot (N)_1}{EA} + \frac{(T_y)_1 \cdot (T_y)_1}{\mu A} + \frac{(T_z)_1 \cdot (T_z)_1}{\mu A} + \frac{(M_t)_1 \cdot (M_t)_1}{\mu I_G} + \frac{(M_y)_1 \cdot (M_y)_1}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z)_1 \cdot (M_z)_1}{EI_{Gz}} \right) dx \\ &\quad + \int_b^\ell \left(\frac{(N)_1 \cdot (N)_1}{EA} + \frac{(T_y)_1 \cdot (T_y)_1}{\mu A} + \frac{(T_z)_1 \cdot (T_z)_1}{\mu A} + \frac{(M_t)_1 \cdot (M_t)_1}{\mu I_G} + \frac{(M_y)_1 \cdot (M_y)_1}{EI_{Gy}} + \frac{(M_z)_1 \cdot (M_z)_1}{EI_{Gz}} \right) dx \\ &= \int_0^b \left(\frac{(M_z)_1 \cdot (M_z)_1}{\mu A} \right) dx + \int_b^\ell \left(\frac{(M_z)_1 \cdot (M_z)_1}{\mu A} \right) dx \\ &= \int_0^b \left(\frac{(M_z)_1^2}{\mu A} \right) dx + \int_b^\ell \left(\frac{(M_z)_1^2}{\mu A} \right) dx \\ &= \int_0^b \frac{(x-b)^2}{\mu A} dx \\ &= \frac{1}{E I_{Gz}} \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & (x-b) \end{pmatrix}_{G_1} \quad \left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G_2}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_G$$

Calcul de $f_{12} = f_{21}$:
$$f_{12} = -\frac{b^2}{2E I_{Gz}}$$

Calcul de f_{22} :
$$f_{22} = -\frac{\ell}{E I_{Gz}}$$

On obtient alors :

$$\begin{Bmatrix} v_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E I_{Gz}} \frac{b^3}{3} & -\frac{b^2}{2E I_{Gz}} \\ -\frac{b^2}{2E I_{Gz}} & -\frac{\ell}{E I_{Gz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ \Gamma \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_B &= \left(\frac{1}{E I_{Gz}} \frac{b^3}{3} \right) F - \left(\frac{b^2}{2E I_{Gz}} \right) \Gamma \\ &= \frac{b^2}{6E I_{Gz}} (2bF - 3\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \left(-\frac{b^2}{2E I_{Gz}} \right) F - \left(\frac{\ell}{E I_{Gz}} \right) \Gamma \\ &= \frac{1}{2E I_{Gz}} (2\Gamma\ell - F b^2) \end{aligned}$$

Partie IV : Méthode de Castigliano

IV.1 Théorème de Castigliano

IV.2 Exemple d'application

IV Méthode de Castigliano :

IV.1 Théorème de Castigliano :

On part de la formule de Clapeyron :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n u_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{j=1}^n f_{ij} F_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} F_i F_j$$

On développe :

$$\begin{aligned} W_{\text{def}} = & \frac{1}{2} (f_{11} F_1 F_1 + \dots + f_{1k} F_1 F_k + \dots + f_{1n} F_1 F_n) \\ & + \frac{1}{2} (f_{21} F_2 F_1 + \dots + f_{2k} F_2 F_k + \dots + f_{2n} F_2 F_n) \\ & + \vdots \\ & + \frac{1}{2} (f_{k1} F_k F_1 + \dots + f_{kk} F_k F_k + \dots + f_{kn} F_k F_n) \\ & + \vdots \\ & + \frac{1}{2} (f_{n1} F_n F_1 + \dots + f_{nk} F_n F_k + \dots + f_{nn} F_n F_n) \end{aligned}$$

Indépendant de F_k

On isole les $2n-1$ termes qui dépendent de F_k :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_{ik} F_i F_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{kj} F_k F_j + \frac{1}{2} f_{kk} (F_k)^2 + \overline{W_{\text{def}}}$$

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_{ik} F_i F_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{kj} F_k F_j + \frac{1}{2} f_{kk} (F_k)^2 + \overline{W}_{\text{def}}$$

On dérive W_{def} par rapport à F_k :

$$\frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_{kj} F_j + f_{kk} F_k = \frac{1}{2} f_{kk} F_k + \frac{1}{2} f_{kk} F_k$$

On réintègre le dernier terme dans les deux premiers :

$$\frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{ik} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f_{kj} F_j$$

On applique le théorème de Maxwell-Betti ($f_{ik} = f_{ki}$) :

$$\frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{ki} F_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f_{kj} F_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n u_{kj} = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} \delta_k = \delta_k$$

Théorème de Castigliano :

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force $\vec{F}_i$ appliquée à la poutre est égale au déplacement δ_i du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action :

$$\delta_i = \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial F_i}$$

De même, la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à un couple $\vec{C}_\ell$ appliquée à la poutre est égale à la rotation θ_ℓ de la poutre au point de la section droite où s'applique ce couple :

$$\theta_\ell = \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial C_\ell}$$

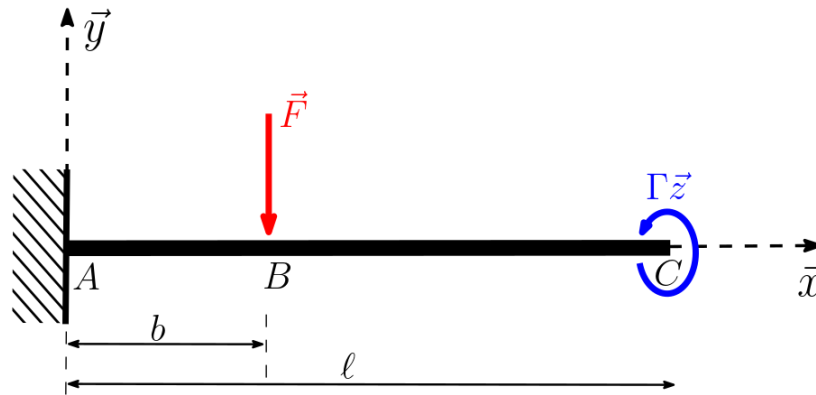
Remarque :

- Le théorème de Castigliano **permet uniquement** de calculer les déplacements (au sens de déplacement ou rotation) **aux points où les charges sont appliquées** et **selon leur direction d'application**. Par conséquent, il ne permet pas, par exemple, de déterminer la rotation d'une section à l'endroit où une charge ponctuelle est appliquée.
- Les forces doivent être considérées indépendantes. Si deux forces extérieures ont la même intensité F , il convient alors de les renommer différemment, par exemple F_1 et F_2 (considérées à priori comme distinctes), de procéder au calcul des déplacements δ_i , puis d'imposer $F_1 = F_2 = F$ dans les résultats.

IV Méthode de Castigliano :

IV.2 Exemple d'application :

On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en $x = a$ et à un couple $\Gamma \vec{z}$ à son extrémité $x = \ell$.



En négligeant dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant, déterminer le déplacement vertical v_B au point B ainsi que la rotation de la section droite θ_C au point C en utilisant la méthode de Castigliano.

Solution :

Le torseur des efforts intérieurs s'écrit :

Tronçon AB : $0 < x < b$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F(x - b) + \Gamma \end{array} \right\}_{G_1}$$

Tronçon BC : $b < x < \ell$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{array} \right\}_{G_2}$$

Effet de l'effort tranchant négligé --->
$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{N(x)^2}{ES} + \cancel{\frac{T_y(x)^2}{\mu S}} + \frac{M_z(x)^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

 0

Donc :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^b \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_b^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

Pour éviter beaucoup de calcul, il est souvent conseillé de dériver l'énergie par rapport à F et Γ pour obtenir respectivement v_B et θ_C .

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial F} \\ &= \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{1}{2} \int_0^b \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right) + \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{1}{2} \int_b^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial F} dx \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial F} dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b (F(x-b) + \Gamma)(x-b) dx \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell 0 dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b F(x-b)^2 + \Gamma(x-b) dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_{-b}^0 F X^2 + \Gamma X dX \right) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left(F \left[\frac{X^3}{3} \right]_{-b}^0 + \Gamma \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-b}^0 \right) = \frac{b^2}{6EI_{Gz}} (2bF - 3\Gamma) \quad (\text{suivant } -\vec{y}) \end{aligned}$$

Matériau homogène : $E I_{Gz}$ à l'extérieur de l'intégrale
Dérivée à l'intérieur de l'intégrale

pour $0 < x < b$, $\frac{\partial M_z(x)}{\partial F} = (x-b)$
et pour $b < x < \ell$, $\frac{\partial M_z(x)}{\partial F} = 0$

Changement de variable :
 $X = x - b$

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^b \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_b^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

La rotation s'écrit : $\theta_C = \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial \Gamma} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(\frac{1}{2} \int_0^b \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right) + \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(\frac{1}{2} \int_b^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right)$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial \Gamma} dx \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial \Gamma} dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b (F(x-b) + \Gamma)(1) dx \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell (\Gamma)(1) dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^b F(x-b) + \Gamma dx \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell \Gamma dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_{-b}^0 F X + \Gamma dX \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_b^\ell \Gamma dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(F \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-b}^0 + \Gamma [X]_{-b}^0 \right) + \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\Gamma [x]_b^\ell \right) \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(-F \frac{b^2}{2} + \Gamma b + \Gamma(\ell - b) \right) \\ &= \frac{1}{2EI_{Gz}} (2\Gamma\ell - F b^2) \quad (\text{suivant } \vec{z}) \end{aligned}$$

Partie V : Méthode de la charge fictive

IV.1 Théorème de la charge fictive

IV.2 Exemple d'application

V Méthode de la charge fictive :

V.1 Théorème de la charge fictive

On considère une poutre soumise à n charges $\vec{F}_i$ appliquées en des points P_i . Pour déterminer le déplacement δ d'un point P de la poutre dans une direction donnée $\vec{n}$, on introduit une force fictive Φ appliquée en ce point suivant la direction considérée.

Si $W_{\text{def}}(\Phi, F_1, \dots, F_n)$ désigne l'énergie de déformation de la poutre sous l'effet de la force fictive Φ et des charges réelles $\vec{F}_i$, alors le déplacement δ du point P dans la direction $\vec{n}$ s'exprime par :

$$\delta = \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial \Phi}(\Phi, F_1, \dots, F_n) = \left. \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial \Phi}(\Phi, F_1, \dots, F_n) \right|_{\Phi=0}$$

Un raisonnement similaire pour l'application d'un couple fictif $C\vec{n}$ en P . La rotation de la section droite en P autour de la direction $\vec{n}$ est :

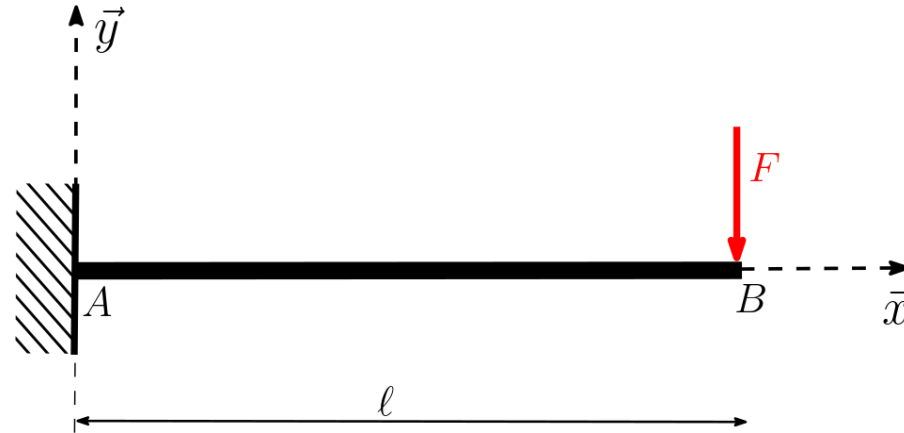
$$\theta = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial C}(C, F_1, \dots, F_n) = \left. \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial C}(C, F_1, \dots, F_n) \right|_{C=0}$$

C'est un outil particulièrement efficace pour évaluer les déplacements et les rotations des sections droites, notamment aux points où aucune charge ponctuelle n'est appliquée, ou dans le cas de poutres soumises à des charges réparties.

V Méthode de la charge fictive :

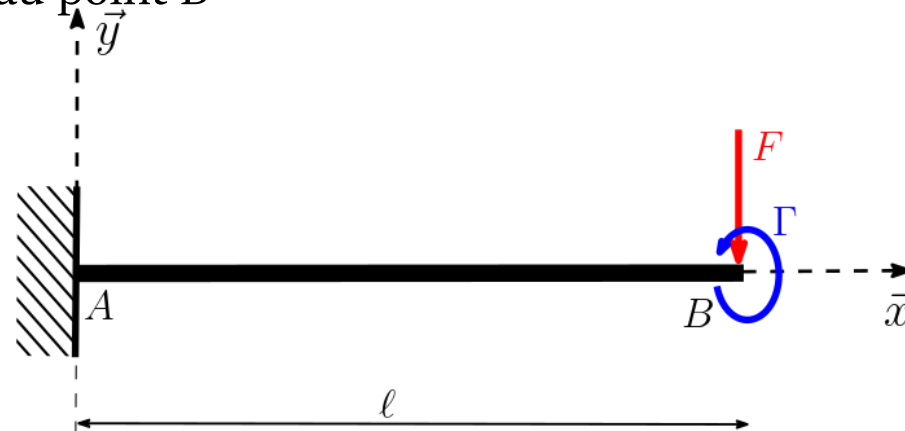
V.2 Exemple d'application

On considère une poutre $[AB]$ de longueur ℓ , encastree en $x = 0$ et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en $x = \ell$.



En négligeant dans le calcul de l'énergie de déformation les effets dus à l'effort tranchant, déterminer la rotation de la section en B en utilisant le théorème de la charge fictive.

On introduit un couple fictive Γ au point B



Le torseur des efforts intérieurs s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Gamma + F(x - \ell) \end{array} \right\}_G$$

En utilisant le théorème de la charge fictive, on obtient :

$$\theta_B = \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial \Gamma} \Big|_{\Gamma=0} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right) \Big|_{\Gamma=0}$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\int_0^\ell M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial \Gamma} dx \right) \Big|_{\Gamma=0} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell (\Gamma + F(x - \ell)) (1) dx \Big|_{\Gamma=0} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_0^\ell \Gamma + F(x - \ell) dx \Big|_{\Gamma=0} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{-\ell}^0 \Gamma + F X dX \Big|_{\Gamma=0} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\Gamma [X]_{-\ell}^0 + F \left[\frac{X^2}{2} \right]_{-\ell}^0 \right) \Big|_{\Gamma=0} \\ &= \frac{1}{EI_{Gz}} \left(-F \frac{\ell^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Partie VI : Systèmes hyperstatiques

IV.1 Degré d'hyperstatisme

IV.2 Théorème de Menabréa

IV.3 Exemple d'application

VI Systèmes hyperstatiques :

VI.1 Degré d'hyperstatisme

Soit une structure ayant au total r **inconnues de liaison** (composantes de réactions à déterminer).

Pour une structure 3D, on dispose de **6** équations pour écrire l'équilibre global de la structure (**3** pour le théorème de la résultante, **3** pour le théorème du moment d'après le PFS)

On note h le degré d'hyperstatisme, alors pour le cas 3D :

$$h_{3D} = r - 6$$

Pour une structure plane, on dispose de **3** équations pour écrire l'équilibre global de la structure (**2** pour le théorème de la résultante, **1** pour le théorème du moment), alors pour le cas plan :

$$h_{2D} = r - 3$$

$h = 0$	La structure est dite isostatique . Les liaisons sont au nombre strictement suffisant pour assurer l'équilibre. L'écriture des équations de la statique suffit seule à déterminer les réactions de liaison.
$h > 0$	La structure est dite hyperstatique d'ordre h . L'écriture des équations de la statique ne suffit pas seule à déterminer les réactions de liaison. On parle d'appuis surabondants. Il faudra h équations supplémentaires pour résoudre le système.
$h < 0$	La structure est un mécanisme (pas stable).

VI Systèmes hyperstatiques :

VI.2 Théorème de Menabréa

Le théorème de Castigliano, introduit dans la section IV peut également être utilisé pour analyser des **systèmes hyperstatiques** :

- i. On supprime les liaisons surabondantes (réactions et/ou moments de liaisons), de manière à transformer le système hyperstatique en un système **isostatique**.
- ii. En plus des chargements extérieurs, on applique à ce système isostatique les réactions et/ou moments surabondants comme des forces et des couples extérieurs. À ce stade, on choisit des **inconnues hyperstatiques** (notées X_R) à traiter comme variables à déterminer.
- iii. Par l'application du **théorème de Castigliano** à l'action de contact d'un appui sans frottement (ou encastrement), on calcule les déplacements et les rotations du système rendu isostatique.

Théorème de Menabréa :

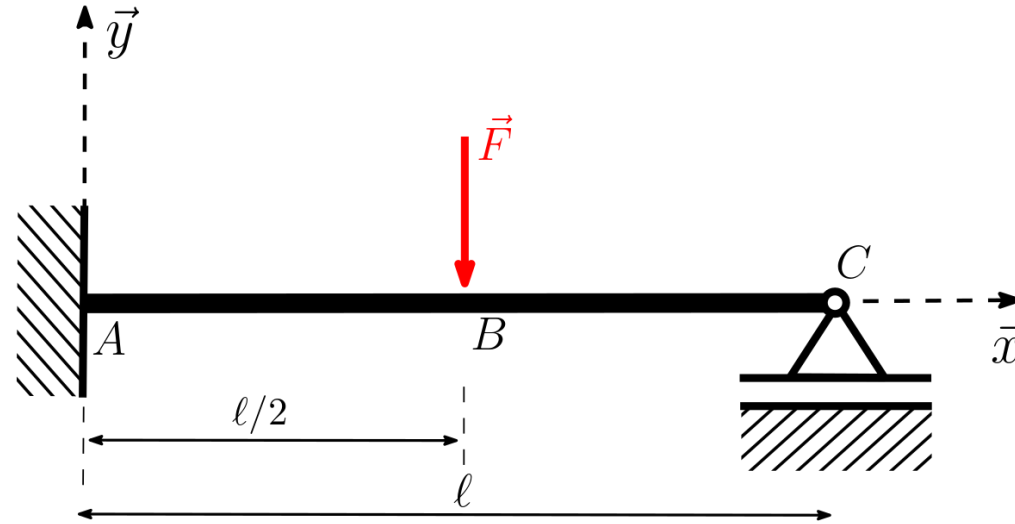
Les valeurs des réactions hyperstatiques correspondant à l'équilibre du système rendent minimale (stationnaire) l'énergie de déformation W_{def} :

$$\frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial X_R} = 0$$

VI Systèmes hyperstatiques :

VI.3 Exemple d'application

On considère une poutre de longueur ℓ , encastrée en $x = 0$ et sous appui simple fixe en $x = \ell$. Elle est soumise à une force ponctuelle $-F \vec{y}$ en $x = \frac{\ell}{2}$.



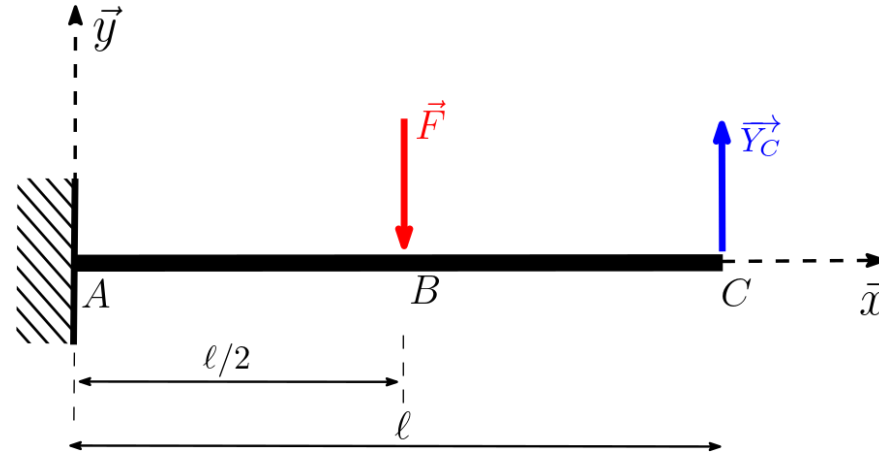
Déterminer la (les) inconnue(s) hyperstatique(s) du problème en utilisant le théorème de Menabréa.

i. On calcule le degré d'hyperstatisme de la poutre et on choisit les inconnues hyperstatiques :

On a 4 inconnues de liaison (3 inconnues pour l'encastrement en A notées X_A, Y_A et M_A et une inconnue pour l'appui simple fixe en C notée Y_C), donc $r = 4$.

On a donc une structure hyperstatique du premier degré, avec Y_C comme inconnue hyperstatique (choix le plus judicieux ici car c'est la seule inconnue qui est isolée à l'extrémité droite).

ii. On supprime l'appui simple fixe au point C et on considère Y_C comme un chargement extérieur pour rendre la structure isostatique. Le nouveau problème à résoudre est le suivant :



iii. On calcule le torseur des efforts intérieurs :

Tronçon AB : $0 < x < \frac{\ell}{2}$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F + Y_C & 0 \\ 0 & F(x - \frac{\ell}{2}) + Y_C(\ell - x) \end{array} \right\}_{G_1}$$

Tronçon BC : $\frac{\ell}{2} < x < \ell$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & Y_C(\ell - x) \end{array} \right\}_{G_2}$$

iv. On détermine l'expression de l'énergie de déformation (les effets de l'effort tranchant sont supposés négligés) et on applique le théorème de Menabréa :

$$\begin{aligned} W_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \end{aligned}$$

Le théorème de Menabréa donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial W_{\text{def}}}{\partial Y_C} \\
&= \frac{\partial}{\partial Y_C} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left[\frac{(M_z(x))^2}{EI_{Gz}} \right] dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial Y_C} dx \right] + \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} M_z(x) \frac{\partial M_z(x)}{\partial Y_C} dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(F(x - \frac{\ell}{2}) + Y_C(\ell - x) \right) \cdot (\ell - x) dx \right] + \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} Y_C(\ell - x) \cdot (\ell - x) dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(F(x - \frac{\ell}{2}) + Y_C(\ell - x) \right) \cdot (\ell - x) dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} F(x - \frac{\ell}{2})(\ell - x) + Y_C(\ell - x)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} Fx(\ell - x) - F\frac{\ell}{2}(\ell - x) + Y_C(\ell - x)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} Fx(\ell - x) - F\frac{\ell}{2}(\ell - x) + Y_C(\ell - x)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{F\ell^3}{12} - \frac{3F\ell^2}{8} + \frac{7Y_C\ell^3}{24} \right]
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{F\ell^3}{12} - \frac{3F\ell^2}{8} + \frac{7Y_C\ell^3}{24} \right] + \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{Y_C\ell^3}{24} \right] = 0$$

$$\frac{F\ell^2}{24} (2\ell - 9) + \frac{Y_C\ell^3}{8} = 0$$

$$Y_C = \frac{F}{3\ell} (2\ell - 9)$$

Partie VII : Intégrales de Mohr

+

+

+

+

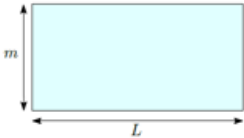
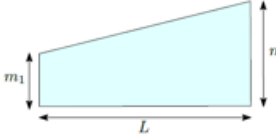
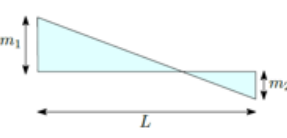
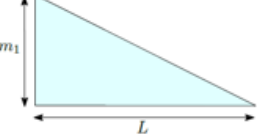
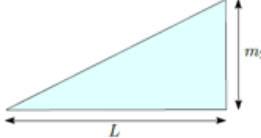
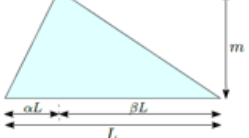
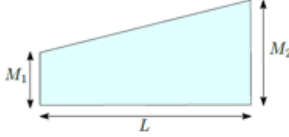
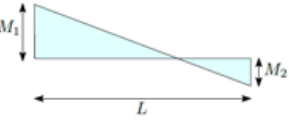
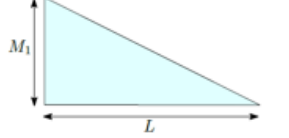
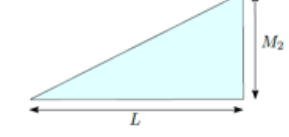
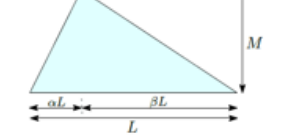
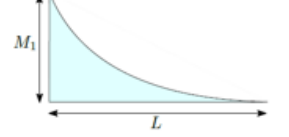
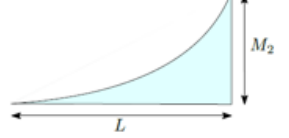
VII Intégrales de Mohr :

Le calcul analytique des intégrales est fastidieux. Il existe une formulation graphique, fondée sur la superposition des aires des diagrammes de moments fléchissant, permettant un calcul plus rapide.

Le tableau ci-après présente des formes types de diagrammes (triangles, trapèzes, rectangles) avec les expressions déjà intégrées :

$$\int M_i(x) M_j(x) dx$$

Ces intégrales sont appelés les intégrales de Mohr.

$\int M_i(x) M_j(x) dx$						
	$\frac{L}{2} m (M_1 + M_2)$	$\frac{L}{6} (2M_1 m_1 + M_1 m_2 + M_2 m_1 + 2M_2 m_2)$	$\frac{L}{6} (2M_1 m_1 - M_1 m_2 + M_2 m_1 - 2M_2 m_2)$	$\frac{L}{6} m_1 (2M_1 + M_2)$	$\frac{L}{6} m_1 (M_1 + 2M_2)$	$\frac{L}{6} m [M_1(1 + \beta) + M_2(1 + \alpha)]$
	$\frac{L}{2} m (M_1 - M_2)$	$\frac{L}{6} (2M_1 m_1 + M_1 m_2 - M_2 m_1 - 2M_2 m_2)$	$\frac{L}{6} (2M_1 m_1 - M_1 m_2 - M_2 m_1 + 2M_2 m_2)$	$\frac{L}{6} m_1 (2M_1 - M_2)$	$\frac{L}{6} m_1 (M_1 - 2M_2)$	$\frac{L}{6} m [M_1(1 + \beta) - M_2(1 + \alpha)]$
	$\frac{L}{2} M_1 m$	$\frac{L}{6} M_1 (2m_1 + m_2)$	$\frac{L}{6} M_1 (2m_1 - m_2)$	$\frac{L}{3} M_1 m_1$	$\frac{L}{6} M_1 m_2$	$\frac{L}{6} M_1 m (1 + \beta)$
	$\frac{L}{2} M_2 m$	$\frac{L}{6} M_2 (m_1 + 2m_2)$	$\frac{L}{6} M_2 (m_1 - 2m_2)$	$\frac{L}{6} M_2 m_1$	$\frac{L}{3} M_2 m_2$	$\frac{L}{6} M_2 m (1 + \alpha)$
	$\frac{L}{2} M m$	$\frac{L}{6} M [m_1(1 + \beta) + m_2(1 + \alpha)]$	$\frac{L}{6} M [m_1(1 + \beta) - m_2(1 + \alpha)]$	$\frac{L}{6} M m_1 (1 + \beta)$	$\frac{L}{6} M m_2 (1 + \alpha)$	$\frac{L}{12} M m \frac{(3 - 4\alpha^2)}{\beta}$ pour $\alpha < \beta$
	$\frac{L}{3} M_1 m$	$\frac{L}{12} M_1 (3m_1 + m_2)$	$\frac{L}{12} M_1 (3m_1 - m_2)$	$\frac{L}{4} M_1 m_1$	$\frac{L}{12} M_1 m_2$	$\frac{L}{12} M_1 m (1 + \beta + \beta^2)$
	$\frac{L}{3} M_2 m$	$\frac{L}{12} M_2 (m_1 + 3m_2)$	$\frac{L}{12} M_2 (m_1 - 3m_2)$	$\frac{L}{12} M_2 m_1$	$\frac{L}{4} M_2 m_2$	$\frac{L}{12} M_2 m (1 + \alpha + \alpha^2)$

Partie VIII : Energie de déformation dans un treillis

VIII Energie de déformation dans un treillis :

L'énergie de déformation dans un treillis s'écrit, grâce au principe de superposition sous la forme :

$$W_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{\text{nb de barres}} W_{\text{def}}^i$$