Perdu dans l'espace

Petit divertissement sur la marche au hasard

par **Jean-Pierre JORRE**
Lycée Gustave Eiffel - 33000 Bordeaux
jp.jorre@wanadoo.fr

RÉSUMÉ

Quelle est la probabilité, pour une particule diffusante, de retourner à sa position d'origine à un certain moment ? La question est simple, la réponse l'est beaucoup moins. Cet article se propose d'y répondre en utilisant le modèle de la marche au hasard. Nous allons montrer, en particulier, que le résultat dépend du nombre de dimensions de l'espace et qu'une surprise nous attend en dimension trois !

1. INTRODUCTION

Le modèle de la marche au hasard est souvent utilisé, en physique, pour simuler les phénomènes de diffusion (diffusion de molécules dans un gaz, diffusion de particules solides en suspension dans un liquide, diffusion de lacunes dans un réseau cristallin, le mouvement brownien, …). Ce modèle mathématique, relativement simple, permet de retrouver l'essentiel des résultats physiques concernant le processus de diffusion. Il n'est pas dans notre propos de développer la théorie complète de la marche au hasard mais simplement de répondre à la question suivante : *le retour à l'origine est-il un événement systématique ? Ou, pour être plus précis, quelle est la probabilité qu'une particule diffusante retourne (au moins une fois) à sa position d'origine au cours de son déplacement ?*

2. LA MARCHE AU HASARD

Dans ce modèle, la particule est libre de se mouvoir sur les nœuds d'un réseau de points équidistants. La distance entre deux points proches voisins du réseau est le pas du réseau. À chaque itération (qui correspond physiquement à une unité de temps du phénomène), la particule se déplace d'un pas dans une direction quelconque choisie au hasard parmi l'ensemble des directions autorisées. Si le milieu est **isotrope**, toutes les directions sont équiprobables. Ainsi, dans la marche à une dimension, la particule peut, à chaque itération, faire, soit un pas à droite, soit un pas à gauche avec la même probabilité 1/2. Dans la marche à deux dimensions on attribue la probabilité 1/4 à chacune des quatre directions (réseau carré). À trois dimensions la probabilité est de 1/6 pour chacune des six directions (réseau cubique).

3. MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

La particule partant de l'origine ne peut y retourner qu'au bout d'un **nombre pair de pas**. Nous noterons $2N$ le nombre de pas effectués par la particule depuis son départ. Si d désigne la dimension de l'espace (d = 1, 2 ou 3), le nombre total de chemins possibles est $(2d)^{2N}$ puisque le nombre de choix qui s'offre à la particule à chaque pas est $2d$.

Appelons b_k la probabilité que la particule se retrouve **pour la première fois** à l'origine au $2k^{ième}$ pas. On en déduit la probabilité P_N que la particule soit **repassée au moins une fois** à l'origine en $2N$ pas : $P_N = \sum_{k=1}^{N} b_k$

Avec ces notations, la réponse à la question posée consiste à calculer :

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} P_N = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{1}$$

Toute la difficulté du problème réside dans le calcul des probabilités b_k. Pour cette raison nous allons introduire de nouveaux coefficients r_N qui sont plus faciles d'accès. On note r_N la probabilité que la particule soit **exactement à l'origine** au $2N^{ième}$ pas (il n'est pas exclu qu'elle soit déjà passée par l'origine auparavant), on conviendra de prendre $r_0 = 1$. La loi des probabilités composées pour des événements indépendants nous donne :

$$r_N = \sum_{k=1}^{N} b_k\, r_{N-k}$$

Cette relation permet de calculer les b_N à partir des r_N par la relation de récurrence :

$$b_N = r_N - \sum_{k=1}^{N-1} b_k\, r_{N-k}$$

On a, par exemple :

$$b_1 = r_1 \quad ; \quad b_2 = r_2 - b_1 r_1 = r_2 - r_1^2 \quad ; \quad b_3 = r_3 - b_1 r_2 - b_2 r_1 = r_3 - 2 r_1 r_2 + r_1^3 \quad ; \quad ...$$

Mais, pour faire une étude générale, il semble plus intéressant de définir les deux fonctions suivantes : $B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, x^k$ et $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k\, x^k$; $|x| < 1$

On remarque alors qu'en faisant le produit de ces deux fonctions et en réarrangeant les termes de la somme double il vient :

$$B(x) R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_k\, r_q\, x^{k+q} = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k\, r_{N-k} \right) x^N = \sum_{N=1}^{\infty} r_N\, x^N = R(x) - 1$$

$$B(x) = 1 - \frac{1}{R(x)} \tag{2}$$

Enfin, en faisant tendre x vers 1 dans (2) et en utilisant (1) on obtient le résultat :

$$P_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B(1) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 - \frac{1}{R(x)} \right) \tag{3}$$

4. MARCHE À UNE DIMENSION (d = 1)

Le cas à une dimension reste assez simple à résoudre car les chemins qui aboutissent à l'origine en $2N$ pas sont ceux composés exactement de N pas à droite et N pas à gauche. Le nombre de ces chemins est donc le nombre de combinaisons de N éléments choisis parmi $2N$ éléments. On obtient la probabilité r_N en divisant ce nombre par le nombre total de chemins possibles :

$$r_{N,1} = \frac{C_{2N}^{N}}{2^{2N}} = \frac{(2N)!}{2^{2N}\,(N!)^2}$$

On en déduit l'expression de la fonction R :

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\, x^k = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

la dernière égalité découle du développement en série du binôme :

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \ldots \quad ; \quad |x| < 1$$

On peut facilement vérifier qu'en prenant $\alpha = -1/2$ on retrouve bien le développement en série de la fonction $R(x)$. Et d'après (2) on tire $B(x) = 1 - \sqrt{1-x}$; qui nous donne le résultat cherché dans (3) :

$$P_{\infty,1} = B(1) = 1$$

Ainsi, dans la marche au hasard à une dimension, la particule repassera, à coup sûr, à sa position d'origine si on lui en laisse le temps. Ce résultat n'est pas surprenant en soi dans la mesure où, la particule étant astreinte à se déplacer le long d'un axe, et rien ne limitant l'amplitude du mouvement de diffusion (la longueur de diffusion croît indéfiniment suivant la loi bien connue $L = \sqrt{Dt}$), il semble fatal qu'elle repasse par le point d'origine, ainsi d'ailleurs que par tous les points de l'axe. Ceci signifie aussi qu'elle ne peut demeurer indéfiniment toujours du même côté de l'axe.

On peut préciser le résultat en écrivant le développement en série entière de la fonction B :

$$B(x) = 1 - \sqrt{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!\,k!}\, x^k \quad ; \quad |x| < 1$$

Ce qui permet d'en déduire les probabilités b_k (on peut aussi remarquer que $R(x)/2$ est la dérivée de $B(x)$:

$$b_k = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!\,k!} = \frac{r_{k-1}}{2k} = \frac{r_k}{2k-1} = r_{k-1} - r_k$$

La dernière égalité est intéressante car elle permet d'exprimer totalement les P_N :

$$P_{N,1} = \sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} (r_{k-1} - r_k) \quad \Rightarrow \quad P_{N,1} = 1 - r_{N,1}$$

On aboutit ainsi à un résultat assez curieux qui est que la probabilité de ne jamais repasser par l'origine en $2N$ pas est égale à la probabilité de se retrouver à l'origine au $2N^{ième}$ pas !

La formule de Stirling nous donne une expression asymptotique des P_N :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad r_{N,\,1} = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$$

d'où :

$$P_{N,\,1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$$

Par exemple, la particule a une probabilité 0,9 d'être repassée par l'origine au bout de 64 pas et une probabilité 0,99 d'y être repassée au bout de 6 366 pas ; mais il faut attendre 636 620 pas pour que cette probabilité passe à 0,999.

5. MARCHE À DEUX DIMENSIONS (d = 2)

À deux dimensions, le dénombrement de tous les chemins qui ramènent la particule à l'origine avec p pas à droite, p pas à gauche, q pas en avant, q pas en arrière et $2p + 2q = 2N$ conduit au nombre $\dfrac{(2N)!}{p!^2\, q!^2}$. On en déduit :

$$r_{N,\,2} = \frac{1}{(2d)^{2N}} \sum_{p+q=N} \frac{(2N)!}{p!^2\, q!^2} = \frac{(2N)!}{4^{2N}\, N!^2} \sum_{p+q=N} \left(\frac{N!}{p!q!}\right)^2 = \frac{(2N)!}{4^{2N}\, N!^2} \sum_{p=0}^{N} \left(C_N^p\right)^2 = \frac{(2N)!}{4^{2N}\, N!^2}\, C_{2N}^N$$

Pour la dernière égalité nous avons utilisé la relation $C_{2N}^N = \sum_{p=0}^{N} \left(C_N^p\right)^2$ que l'on démontre en identifiant le terme en x^N dans les deux membres de l'expression $(1+x)^{2N} = (1+x)^N\,(1+x)^N$.

Soit finalement :

$$r_{N,\,2} = \left(\frac{C_{2N}^N}{2^{2N}}\right)^2 = \left(\frac{(2N)!}{2^{2N}\, N!^2}\right)^2$$

La formule de Stirling nous donne le comportement asymptotique des r_N :

$$r_{N,\,2} = \frac{1}{\pi N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Ce qui montre que la série $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ diverge comme la série harmonique de terme $1/k$ et donc, une fois encore, on a :

$$P_{\infty,\,2} = \lim_{x \to 1^-}\left(1 - \frac{1}{R(x)}\right) = 1$$

La particule retournera, à coup sûr, à l'origine pour peu que l'on ait la patience d'attendre cet heureux événement… car la convergence de P_N vers 1 est beaucoup plus lente ici que dans le cas à une dimension. La particule a plus de difficulté à retrouver le chemin de l'origine car le nombre de choix offerts à elle, à chaque pas, a doublé.

Pour préciser ce propos, on peut approcher la valeur de P_N avec la série partielle S_N :

$$S_{N,2} = \sum_{k=0}^{N} r_k = \frac{1}{\pi}\left(\ln(N) + C + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

Un calcul numérique effectué avec un logiciel de calcul formel donne la valeur de la constante C avec la précision désirée :

$$C = 3{,}349\ 804\ldots$$

En reprenant la démonstration du (3) mais en utilisant des sommes partielles à la place des sommes infinies on peut montrer que :

$$1 - \frac{1}{S_N} < P_N < \frac{S_{2N} - 1}{S_N}$$

Il me semble, d'après une étude numérique, que les deux expressions asymptotiques suivantes sont exactes (comme ce n'est pas le propos de cet article, je laisserai aux mathématiciens confirmés le soin de le prouver ou de l'infirmer) :

$$P_{N,2} \approx 1 - \frac{1}{S_{N,2}}$$

$$P_{N,2} = 1 - \frac{\pi}{\ln(N) + C} + O\left(\frac{1}{\ln(N)^2}\right)$$

Il faut attendre (environ) 3.10^{12} pas pour que cette probabilité atteigne la valeur 0,9 ; il en faut 2.10^{135} pour avoir une probabilité de 0,99 et 10^{1363} pour atteindre la valeur 0,999 !

En pratique, si la particule ne retourne pas dès les premiers pas vers l'origine il y a peu de chance qu'elle y retourne en un temps raisonnable.

6. MARCHE À TROIS DIMENSIONS (d = 3)

À trois dimensions, le dénombrement de tous les chemins qui ramènent la particule à l'origine avec p pas à droite, p pas à gauche, q pas en avant, q pas en arrière, k pas vers le haut, k pas vers le bas et $2p + 2q + 2k = 2N$ conduit à :

$$r_{N,3} = \frac{1}{(2d)^{2N}} \sum_{p+q+k=N} \frac{(2N)!}{p!^2\, q!^2\, k!^2}$$

$$r_{N,3} = \frac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{p!^2\,(N-p)!^2} \sum_{q+k=N-p} \frac{(N-p)!^2}{q!^2\, k!^2} \right)$$

$$= \frac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{p!^2\,(N-p)!^2} \sum_{q=0}^{N-p} \left(C_{N-p}^{q}\right)^2 \right)$$

$$r_{N,3} = \frac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \frac{C_{2(N-p)}^{N-p}}{p!^2\,(N-p)!^2} = \frac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \frac{C_{2p}^{p}}{(N-p)!^2\, p!^2} = \frac{(2N)!}{6^{2N}\, N!^2} \sum_{P=0}^{N} C_{2p}^{p} \frac{N!^2}{(N-p)!^2\, p!^2}$$

$$r_{N,3} = \frac{C_{2N}^{N}}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} C_{2p}^{p} \left(C_{N}^{p} \right)^2 = \frac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \frac{(2p)!}{p!^4 \, (N-p)!^2}$$

Une étude asymptotique des r_N (*cf.* une justification en annexe) conduit à :

$$r_{N,3} \approx \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\pi N} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Ce qui montre que, cette fois, la série $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ converge vers une valeur finie S_∞ et que la probabilité P_∞ cherchée est inférieure à un.

$$P_{\infty,3} = \lim_{x \to 1^-} \left(1 - \frac{1}{R(x)} \right) = 1 - S_\infty^{-1} < 1$$

Un calcul numérique de la constante donne $S_\infty = 1{,}516\ 386\ldots$; on en déduit :

$$P_{\infty,3} = 1 - S_\infty^{-1} = 0{,}340\ 537...$$

La particule a donc un peu plus d'une chance sur trois de repasser par l'origine.

Dans la marche à trois dimensions, le retour à l'origine n'est plus systématique contrairement aux dimensions un et deux. Le nombre des directions offertes à la particule à chaque pas est trop important. La particule pourra, bien sûr, se rapprocher très près de l'origine mais elle risque de tourner autour de ce point indéfiniment sans jamais y passer.

Pour terminer, je proposerai (là aussi sans preuve…) les deux expressions asymptotiques suivantes :

$$S_{N,3} = \sum_{k=0}^{N} r_k \approx S_\infty - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$P_{N,3} \approx 1 - \frac{1}{S_{N,3}} \approx 1 - \left(S_\infty - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{-1}$$

7. ÉTUDE D'UNE VARIANTE DU MODÈLE

Pour les dimensions supérieures à un on peut imaginer une variante du modèle de la marche au hasard en rendant les différentes directions d'espace indépendantes les unes des autres. C'est-à-dire qu'à chaque itération, la particule se déplace simultanément d'un pas dans chacune des d directions, mais pour chaque direction on attribue la probabilité 1/2 à chacun de ses deux sens (on notera respectivement I et II les deux modèles étudiés). Dans le modèle II les calculs sont plus simples car on a le résultat général suivant :

$$r'_{N,d} = \left(\frac{(2N)!}{2^{2N} \, (N!)^2} \right)^d = \frac{1}{(\pi N)^{d/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N} \right) \right) \forall d \in N^* \qquad (4)$$

On constate que cela ne change pas fondamentalement les résultats obtenus dans le

cadre du modèle I. À une dimension les deux modèles sont naturellement identiques, mais on peut aussi remarquer qu'ils sont équivalents à deux dimensions. En effet, si $d = 2$, le modèle I de pas a est identique au modèle II de pas $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ après une rotation du réseau de $\frac{\pi}{4}$. Ce qui explique que $r'_{N,2} = r_{N,2}$. Par contre les deux modèles ne sont pas équivalents en dimension trois. Le nombre de choix offerts à la particule, à chaque itération, est $2d = 6$ dans le modèle I alors qu'il est de $2^d = 8$ dans le modèle II.
Pour $d = 3$ on obtient :

$$S'_{N,3} = \sum_{k=0}^{N} r'_k = S'_\infty - \frac{2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$$

Un calcul numérique nous donne $S_\infty = 1{,}393\,203\ldots$; on en déduit :

$$P'_{\infty,3} = 1 - S'^{-1}_\infty = 0{,}282\,229\ldots$$

Cette fois on trouve une probabilité inférieure à 1/3, la particule a plus de difficultés à retrouver son point de départ car, d'après la remarque précédente, les choix qui s'offrent à elle sont plus nombreux dans le modèle II que dans le modèle I.

8. LE PASSAGE AU CONTINU ET L'ÉQUATION DE DIFFUSION

Le problème physique de diffusion que l'on vient d'étudier peut se formuler ainsi : considérant N particules situées à l'origine d'un repère cartésien à l'instant $t = 0$, calculer la densité particulaire $n(\vec{r}, t)$ au point $\vec{r}$ à l'instant $t > 0$.

La résolution classique est la suivante :
on écrit la loi de conservation locale du nombre de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0 \;;$$

ainsi que la loi phénoménologique de Fick :

$$\vec{j} = -D\,\overrightarrow{grad}(n).$$

Le vecteur $\vec{j}$ représente le vecteur densité de flux particulaire et la constante D est le coefficient de diffusion (unité : $m^2.s^{-1}$), la diffusion est supposée isotrope et homogène.
L'équation de la diffusion en découle :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta(n)$$

avec la condition de normalisation :

$$\int_{Espace} n(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r} = \mathrm{N}.$$

On peut remarquer que $p(\vec{r},t) = \dfrac{n(\vec{r},t)}{\mathsf{N}}$ n'est rien d'autre que la densité de probabilité de présence d'une particule au point $\vec{r}$ à l'instant t. Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\frac{\partial p(\vec{r},t)}{\partial t} = D\,\Delta p(\vec{r},t)\ ;$$

$$\int_{Espace} p(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3\vec{r} = 1 \quad \text{et} \quad p(\vec{r},0) = \delta(\vec{r}) \qquad \text{(distribution de Dirac).}$$

Dans le cas d'un espace à une dimension ($d = 1$), la résolution de ce système peut se faire à l'aide du changement de variables $(x,t) \to \left(\alpha = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}, \beta = t\right)$. En cherchant des solutions à variables séparées $p(x,t) = f(\alpha)\,g(\beta)$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que la solution normalisée est :

$$p_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

On rappelle le résultat bien connu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ \forall a > 0$$

et sa conséquence : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp(-ax^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\ \forall a > 0$

La valeur moyenne de x est nulle et l'écart quadratique moyen est :

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,p_1(x,t)\,\mathrm{d}x = 2Dt$$

Dans un espace à deux dimensions il est aisé de vérifier que la fonction $p_2(x,y,t) = p_1(x,t)\,p_1(y,t)$ est la solution du problème :

$$p_2(x,y,t) = \frac{1}{4\pi Dt}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4Dt}\right) \quad \text{et} \quad \overline{x^2+y^2} = 4\,Dt$$

De façon générale, dans un espace de dimension d la solution est :

$$p_d(\vec{r},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\vec{r}^{\,2}}{4Dt}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\vec{r}^{\,2}}(t) = 2dDt \qquad (5)$$

Nous pouvons maintenant relier ces résultats à ceux obtenus dans le paragraphe 7 avec le modèle II. On note a le pas du réseau et τ la durée qui sépare deux itérations successives. Le nombre de pas étant toujours $2N$, on a bien sûr la relation $t = 2N\tau$. Le calcul de l'écart quadratique moyen au cours du premier pas conduit à :

$$\vec{r}^{\,2}(\tau) = d\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2\right) = da^2,$$

en identifiant avec la relation (5) il vient $2dD\tau = da^2$, d'où $D = \frac{a^2}{2\tau}$. Soit finalement :

$$Dt = Na^2$$

Le passage du discret au continu s'opère en faisant tendre a et τ vers zéro tout en faisant tendre N vers l'infini en gardant les produits $N\tau$ et Na^2 constants. Si on ne considère que les nombres pairs de pas, la particule se déplace sur les nœuds d'un réseau de pas $2a$, la probabilité que la particule soit à l'origine (plus exactement dans un voisinage de l'origine de largeur $2a$) à l'instant t est donc :

$$r'_d(t) = (2a)^d\, p_d(\vec{0}, t) = \frac{(2a)^d}{(4\pi Dt)^{d/2}} = \frac{1}{(\pi N)^{d/2}} \tag{6}$$

On vérifie ainsi que l'on retrouve bien les résultats asymptotiques du modèle II.

Le cas du modèle I est un peu plus délicat à traiter car dans ce modèle :

$$\vec{r}^{\,2}(\tau) = \sum_{1}^{2d} \frac{1}{2d}a^2 = a^2 \quad \forall d,$$

d'où $D = \frac{a^2}{2\tau d}$ et $Dt = \frac{Na^2}{d}$. On peut vérifier alors que :

$$r_d(t) = 2a^d\, p_d(\vec{0}, t) = \frac{2a^d}{(4\pi Dt)^{d/2}} = 2^{1-d}\left(\frac{d}{\pi N}\right)^{d/2}$$

On constate que le « volume » d'intégration n'est plus $(2a)^d$ mais $2a^d$. Cela ne change rien pour $d = 1$. Cela se justifie dans le cas $d = 2$, d'après la remarque faîte au paragraphe 7, en remplaçant a par $\frac{a}{\sqrt{2}}$ dans l'expression (6). Mais il est plus difficile de le justifier pour $d = 3$, je laisserai donc ce travail aux lecteurs intéressés et courageux.

CONCLUSION

« Dans une marche au hasard, la particule finit toujours par repasser par son point de départ ». Voilà donc une proposition, qui est évidente en dimension un, qui reste vraie en dimension deux mais devient fausse pour les dimensions supérieures à deux.

Si un individu s'est égaré dans le désert, il finira toujours par retrouver son point de départ (à condition que son espérance de vie soit suffisante…). Si un vaisseau spatial est perdu dans l'espace, il n'a environ qu'une chance sur trois de retrouver son point de départ, même si l'éternité lui est accordée !

BIBLIOGRAPHIE

- STEWART I. Abrogeons la loi des moyennes. *Pour la Science,* juin 1998, n° 248, p. 122-123.
- CASTAING R. *Thermodynamique statistique*. Paris : Masson & Cie, 1970.

Annexe

Nous cherchons un équivalent de la somme $r_N = \dfrac{(2N)!}{6^{2N}} \sum_{p=0}^{N} \dfrac{(2p)!}{p!^4 (N-p)!^2}$ lorsque N tend vers l'infini. Posons $\Sigma_N = \sum_{p=0}^{N} u(p,N)$ avec $u(p,N) = \dfrac{(2p)!}{p!^4 (N-p)!^2}$. On remarque que $u(0,N) = \dfrac{1}{N!^2}$ et que $u(N,N) = \dfrac{(2N)!}{N!^4}$, deux quantités qui tendent rapidement vers zéro quand N tend vers l'infini. D'autre part, pour $p > 1$, on peut écrire :

$$\frac{u(p+1,N)}{u(p,N)} = 2\,\frac{(2p+1)(N-p)^2}{(p+1)^3} = \frac{4(N-p)^2}{p^2}\left(1+\frac{1}{2p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-3}$$

Pour de grandes valeurs de N la fonction $u(p,N)$ possède un maximum très pointu pour une certaine valeur $p = m$ elle aussi très grande. On a alors :

$$\frac{u(m+1,N)}{u(m,N)} = \frac{4(N-m)^2}{m^2}\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right],$$

mais ce rapport vaut 1 au voisinage du maximum donc :

$$\frac{2(N-m)}{m} = 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{et} \quad m = \frac{2N}{3} + O(1) \tag{1}$$

La fonction $u(p,N)$ s'annule très rapidement de part et d'autre de son maximum $u(m,N)$ et seules les valeurs de p voisines de m vont contribuer de façon significative à la somme Σ_N. L'idée consiste à trouver un équivalent de $u(p,N)$ au voisinage de m et de remplacer la somme discrète par une intégrale de cet équivalent. Pour cela on va poser :

$$p = m + x \quad \text{et} \quad \Sigma_N = u(m,N) \sum_{x=-m}^{N-m} \frac{u(m+x,N)}{u(m,N)} = u(m,N) \sum_{x=-m}^{N-m} f(x,N)$$

$$f(x,N) = \frac{u(m+x,N)}{u(m,N)} = \frac{(2m+2x)!}{(2m)!}\left(\frac{m!}{(m+x)!}\right)^4 \left(\frac{(N-m)!}{(N-m-x)!}\right)^2$$

Afin de trouver un équivalent de $f(x, N)$, il est utile de chercher un équivalent de $\dfrac{(N+x)!}{N!}$.

Posons : $$\Pi = \frac{(N+x)!}{N!N^x} = \left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{2}{N}\right)\left(1+\frac{3}{N}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{N}\right)$$

$$\ln(\Pi) = \sum_{k=1}^{x} \ln\left(1+\frac{k}{N}\right) = \sum_{k=1}^{x} \frac{k}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{x(x+1)}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \Rightarrow \Pi = e^{\frac{x(x+1)}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)}$$

il vient finalement : $$\frac{(N+x)!}{N!} = N^x\, e^{\frac{x(x+1)}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \qquad (2)$$

En remarquant que, d'après (1), $N - m \approx m/2$ et en utilisant (2), on arrive à :

$$f(x, N) = \frac{u(m+x, N)}{u(m, N)} \approx \frac{(2m+2x)!}{(2m)!}\left(\frac{m!}{(m+x)!}\right)^4\left(\frac{(m/2)!}{(m/2-x)!}\right)^2 \approx e^{-\frac{3x^2}{m} + O\left(\frac{x}{m}\right)}$$

On obtient donc une gaussienne qui doit être centrée sur la valeur $x = 0$ (si m représente la position exacte du maximum). Enfin on en déduit la somme :

$$\Sigma_N = u(m, N) \sum_{x=-m}^{N-m} f(x, N) \approx u(m, N) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3x^2}{m}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi m}{3}}\, u(m, N) \approx \frac{\sqrt{2\pi N}}{3}\, u\left(\frac{2N}{3}, N\right)$$

Soit finalement : $$r_N = \frac{(2N)!}{6^{2N}}\,\Sigma_N \approx \frac{\sqrt{2\pi N}}{3\times 6^{2N}}\,\frac{(2N)!\left(\frac{4N}{3}\right)!}{\left(\frac{2N}{3}\right)!^4\left(\frac{N}{3}\right)!^2} \approx \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\pi N}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Jean-Pierre JORRE
Professeur
Lycée Gustave Eiffel
Bordeaux (Gironde)