

Dérivées et différences finies

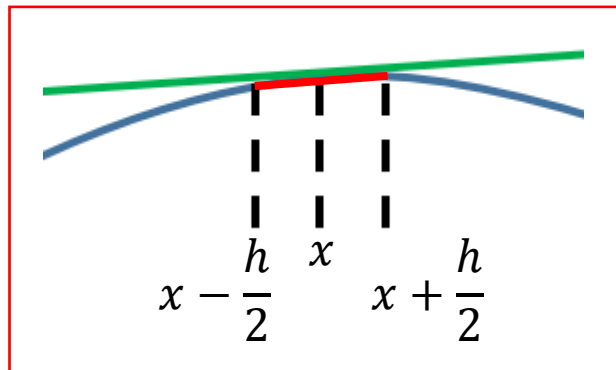
Comprendre l'omniprésence des équations aux dérivées partielles en physique

1) Dérivée

1-a) Définition

Plusieurs manières d'interpréter la dérivée en un point :

- Tangente à la courbe —
- Taux d'accroissement —
- Pente —



On approche localement la fonction par un segment:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Par récurrence, on peut donc donner une définition de la dérivée seconde:

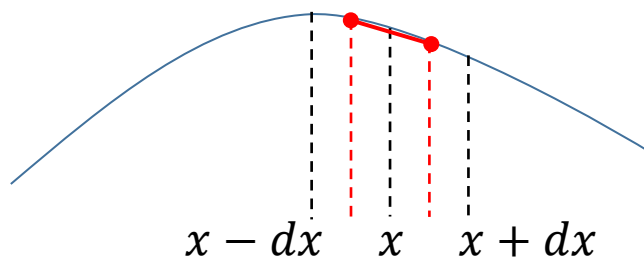
$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(x + \frac{h}{2}\right) - f'\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) - (f(x) - f(x-h))}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Et aux dérivées d'ordre supérieur

1-b) Écriture dans le cadre du calcul différentiel

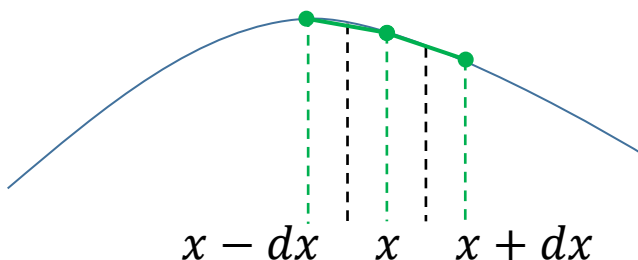
On notera un élément infinitésimal dx (pour h , en omettant $\lim_{h \rightarrow 0}$ dans l'écriture).

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \sim \frac{f\left(x + \frac{dx}{2}\right) - f\left(x - \frac{dx}{2}\right)}{dx}$$



$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{dx}{2}\right) - f\left(x - \frac{dx}{2}\right) &\sim f'(x)dx \\ f\left(x + \frac{dx}{2}\right) - f\left(x - \frac{dx}{2}\right) &= f'(x)dx + o(dx) \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \sim \frac{f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x)}{dx^2}$$

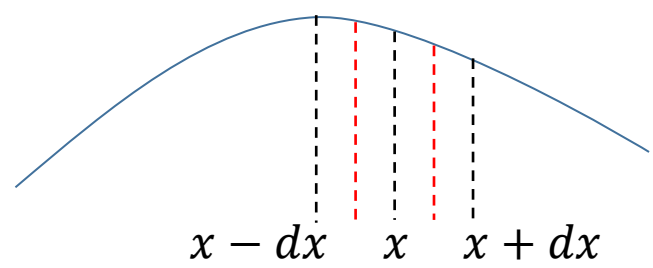


$$\begin{aligned} f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x) &\sim f''(x)dx^2 \\ f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x) &= f''(x)dx^2 + o(dx^2) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, **en physique** on omet généralement d'écrire ce terme (en gardant le "=").

2) Différences finies et méthode d'Euler

- On parlera de **différences finies** pour les variables d'**espace** en conservant les définitions « **symétriques** »



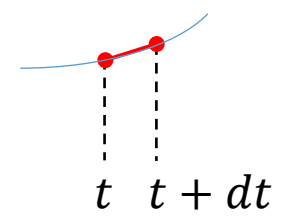
$$f'(x) = \frac{df}{dx} \sim \frac{f\left(x + \frac{dx}{2}\right) - f\left(x - \frac{dx}{2}\right)}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \sim \frac{f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x)}{dx^2}$$

- On parlera de la **méthode d'Euler** pour la variable de **temps**, en utilisant une définition « **asymétriques** »

$$f'(t) = \frac{df}{dt} \sim \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}$$

Equation décrivant
l'évolution de f au
niveau **local**



$$f(t + dt) = f(t) + f'(t)dt + o(dt)$$

$$f(t + dt) \sim f(t) + f'(t)dt$$

Evolution de f sur un pas de temps infinitésimal

Possibilité d'inférer les équations aux dérivées partielles régissant la physique d'un système à partir de raisonnements au niveau local, avec une approche microscopique, en raisonnant sur des pas de temps ou d'espaces infinitésimaux

2) Equations aux dérivées partielles

2-a) Exemples

Equation de diffusion de la chaleur: $\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = Q$ à 1D, sans source $\rightarrow$ $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$

Opérateur Laplacien: $\Delta \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}$

Différences finies

$T(x, t + dt) \sim T(x, t) + dt \frac{D}{dx^2} (T(t, x + dx) + T(t, x - dx) - 2T(t, x))$

Equations de Maxwell: $div(\vec{E}(\vec{r})) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Chargé volumique $\leftarrow$ ϵ_0 $\leftarrow$ Permittivité diélectrique du vide

Champ électrique

Opérateur divergence: $div(\cdot) = \frac{d \cdot}{dx} + \frac{d \cdot}{dy} + \frac{d \cdot}{dz}$

Radioactivité: $\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} = -\gamma N(t)$ $N(t)$: nombre de radio-isotopes
 τ [s]: temps caractéristique (γ [1/s])

2-b) Approche microscopique: Exemple de la radioactivité

Pour obtenir l'équation différentielle, on fait deux suppositions:

- 1- Les noyaux sont indépendants les uns des autres
- 2- Pour un temps infinitésimal, la probabilité d'un noyau de se désintégrer est proportionnel au temps, avec un facteur constant (constante de désintégration γ).

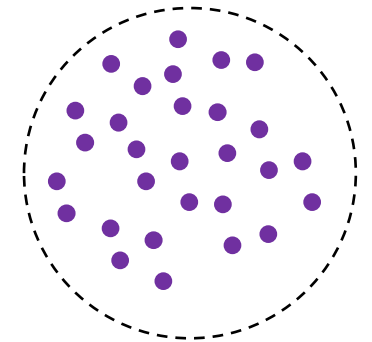
Signification de: $\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} = -\gamma N(t)$ 

La constante de désintégration γ est la densité de probabilité de désintégration d'un radio-isotope par unité de temps

$$N(t + dt) \sim N(t) - N(t) \gamma dt$$

Chaque noyau $\bullet$ est considéré indépendant des autres. Ce sont des variables aléatoires indépendantes. $N(t) \gamma dt$ est le nombre de radio-isotope se désintégrant durant dt : N étant grand, on a implicitement appliqué la loi des grands nombres.

$N(t)$ radio-isotope



Probabilité pour chaque radio-isotope de se désintégrer durant un pas de temps $dt \ll \frac{1}{\gamma} (= \tau)$

2-b) Approche microscopique: Exemple de la radioactivité

De l'équation différentielle, on peut déduire l'évolution de $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\gamma N(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{N(t)} dN(t) = -\gamma dt \quad \text{Equation aux variables séparées}$$

$$\longrightarrow \int_0^t \frac{1}{N(t)} dN(t) = \int_0^t -\gamma dt \longrightarrow [\ln(N(t))]_0^t = -\gamma t \longrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\gamma t \\ N(t=0) = N_0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \quad \text{Solution macroscopique}$$

On ne cherche pas à savoir lesquelles des noyaux se désintègrent. On souhaite juste connaître le comportement **macroscopique**, c'est-à-dire l'évolution temporelle du **nombre moyen** de noyaux non désintégrés.

C'est exactement le type de raisonnement que l'on va tenir dans la suite du cours:

Partir de considérations locales (espace/temps) pouvant prendre en compte une part d'aléatoire, pour en dériver des comportements ou des relations macroscopiques.

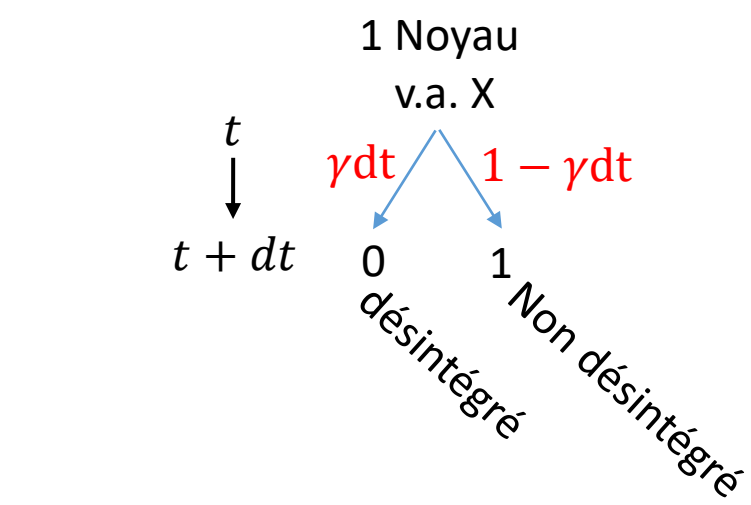
Exemples: Dans un gaz parfait, la pression résulte d'un grand nombre de collision aléatoire.

2-c) Approche statistique

Hypothèses

- 1- Les noyaux sont indépendants les uns des autres : **Variable aléatoire indépendante**
- 2- Pour un temps infinitésimal $dt \ll \frac{1}{\gamma}$, la probabilité d'un noyau de se désintégrer vaut γdt .

Pour un noyau :



X a pour valeur $E_X = \{0,1\}$

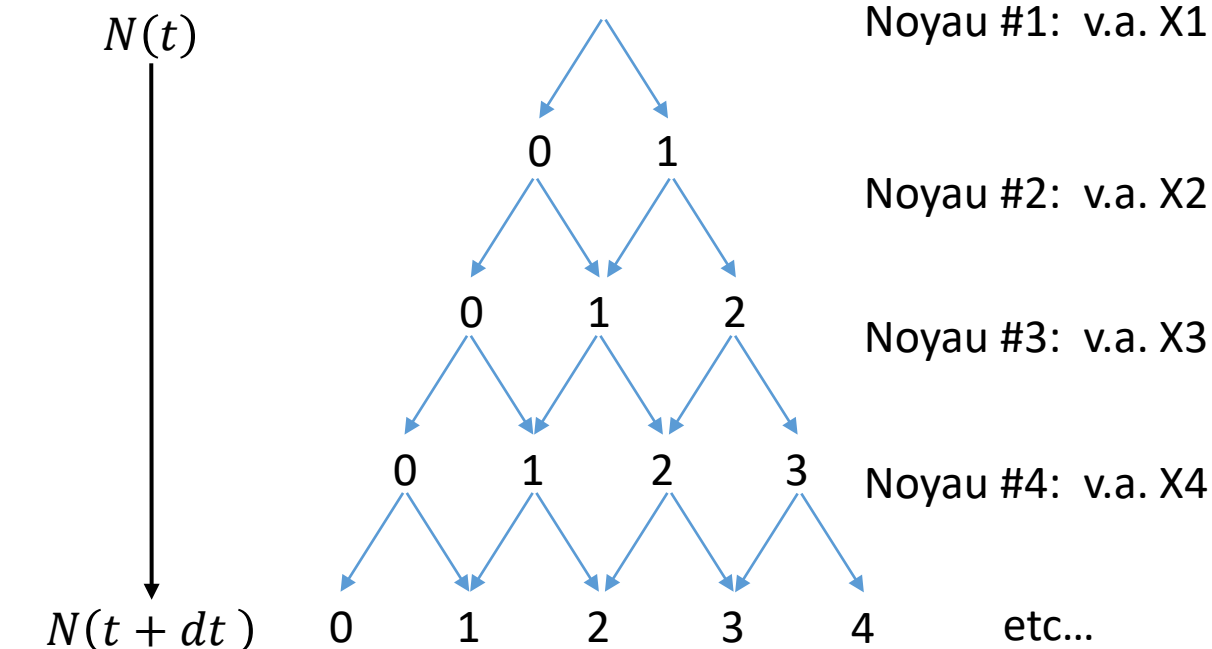
$\langle X \rangle = 0 * \gamma dt + 1 * (1 - \gamma dt) = 1 - \gamma dt$

$\sigma_X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$

$\sigma_X^2 = 0^2 * \gamma dt + 1^2 * (1 - \gamma dt) - (1 - \gamma dt)^2$

$\sigma_X^2 = \gamma dt(1 - \gamma dt)$

Pour N noyaux :



On peut construire la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \equiv N(t + dt)$

$E_Y = \{0,1,2, \dots, N(t)\}$

2-c) Approche statistique

- Avec la loi des grands nombres : $N(t)$ est grand

Les v.a. $\{X_1, X_2 \cdots X_{N(t)}\}$ sont indépendantes et de même loi

$$N(t + dt) \equiv Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \xrightarrow{\text{Tend vers}} N(t)\langle X \rangle = N(t)(1 - \gamma dt) = N(t) - \gamma N(t)dt$$

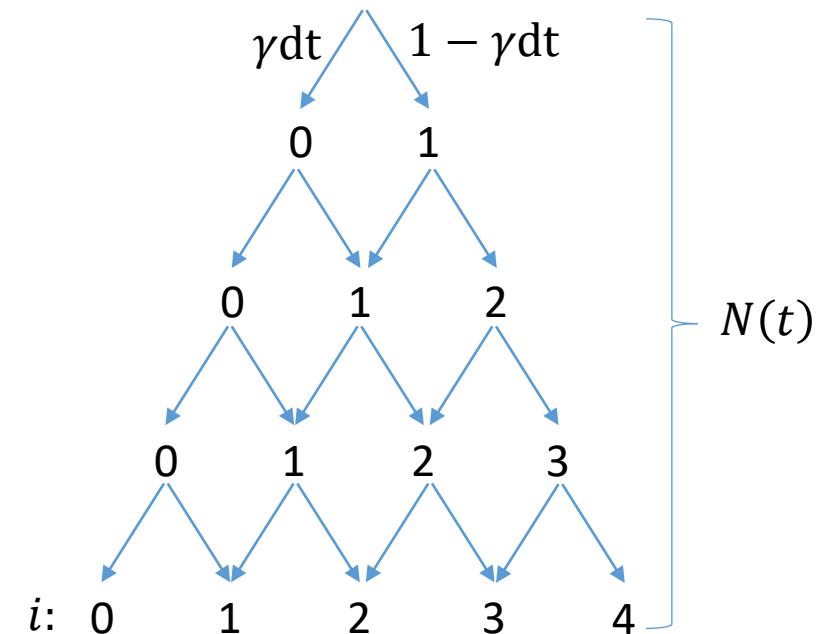
- Calcul direct: Loi Binomiale

Probabilité d'avoir i noyaux non désintégrés durant dt (ou $N(t) - i$ noyaux désintégrés), quels que soient les noyaux désintégrés et non désintégrés

$$i \in [0, N(t)], \quad P_Y(i) = C_{N(t)}^i (\gamma dt)^{N(t)-i} (1 - \gamma dt)^i$$

Coefficient binomiale, également noté $\binom{N(t)}{i}$: nombre de chemins dans l'arborescence conduisant à i noyaux non désintégrés

Pas de notion d'ordre d'évènement entre les désintégrations. On ne s'intéresse pas à l'information « qui », mais seulement « combien ».



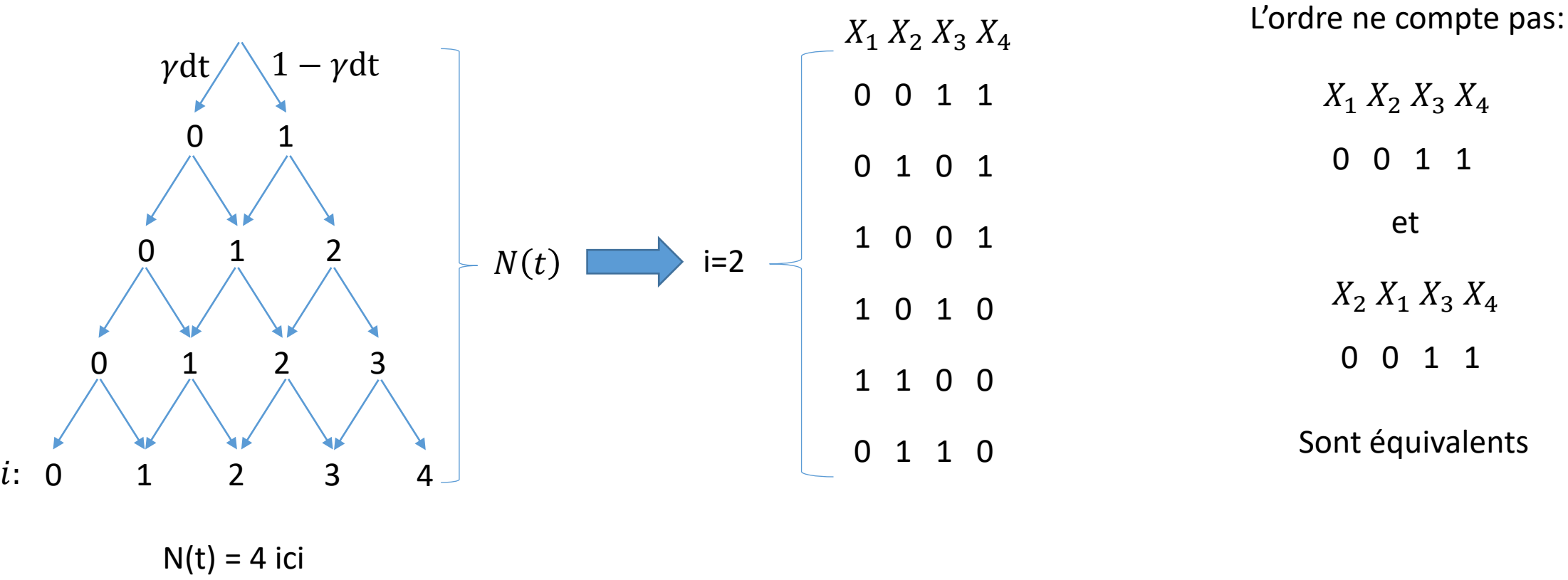
Rappel sur le coefficient binomiale:

$$C_{N(t)}^i = \frac{N(t)!}{i! (N(t) - i)!}$$

→ Nombre de manière d'ordonner $N(t)$ noyaux distinguables

→ Nombre de manière d'ordonner $(N(t) - i)$ noyaux désintégrés distinguables

→ Nombre de manière d'ordonner i noyaux non désintégrés distinguables



Calcul de $N(t + dt)$ moyen:

$$\langle N(t + dt) \rangle = \langle Y \rangle = \sum_{i=0}^{N(t)} i P_Y(i) = \sum_{i=1}^{N(t)} i P_Y(i) = \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{i * N(t)!}{i! (N(t) - i)!} (\gamma dt)^{N(t)-i} (1 - \gamma dt)^i$$

$i = 0$ (with a red arrow pointing from $i=0$ to $i=1$)

On constate que: $i * C_{N(t)}^i = \frac{i * N(t)!}{i! (N(t) - i)!} = \frac{N(t) * (N(t) - 1)!}{(i - 1)! ((N(t) - 1) - (i - 1))!} = N(t) * C_{N(t)-1}^{i-1}$

$$\langle N(t + dt) \rangle = N(t) \sum_{i=1}^{N(t)} C_{N(t)-1}^{i-1} (\gamma dt)^{N(t)-i} (1 - \gamma dt)^i = N(t) \sum_{j=0}^{N(t)-1} C_{N(t)-1}^j (\gamma dt)^{N(t)-1-j} (1 - \gamma dt)^j * (1 - \gamma dt)$$

Changement de variable $j = i - 1$ (with a blue arrow pointing from i to j)

$= (\gamma dt + 1 - \gamma dt)^{N(t)-1} = 1$

Rappel:

$$(a + b)^N = \sum_{i=0}^N C_N^i a^{N-i} b^i$$

Ce qui conduit à $\langle N(t + dt) \rangle = N(t) * (1 - \gamma dt)$

➤ A partir du théorème de la limite centrale

$$N(t + dt) \equiv Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \xrightarrow{\text{Tend vers}} \mathcal{N}(N(t)\langle X \rangle, N(t)\sigma_X^2)$$
$$= \mathcal{N}(N(t)(1 - \gamma dt), N(t)\gamma dt(1 - \gamma dt))$$