Dérivées et différences finies
Comprendre l'omniprésence des équations aux dérivées partielles en physique

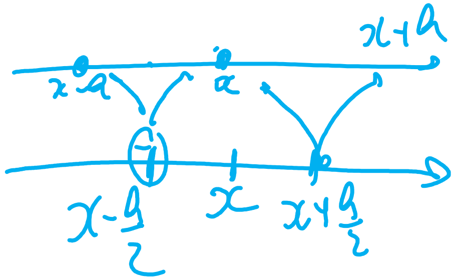
1) Dérivée

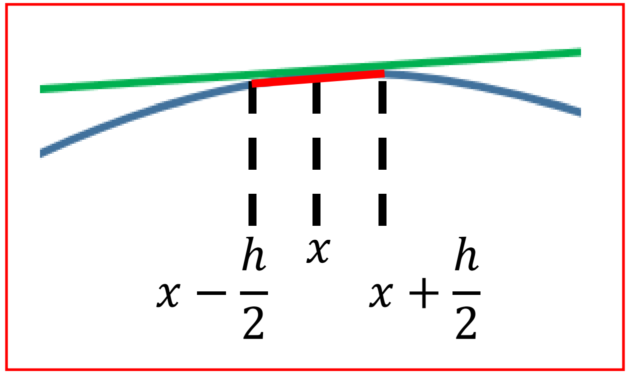
1-a) Définition

$f \to f'$

Plusieurs manières d'interpréter la dérivée en un point :

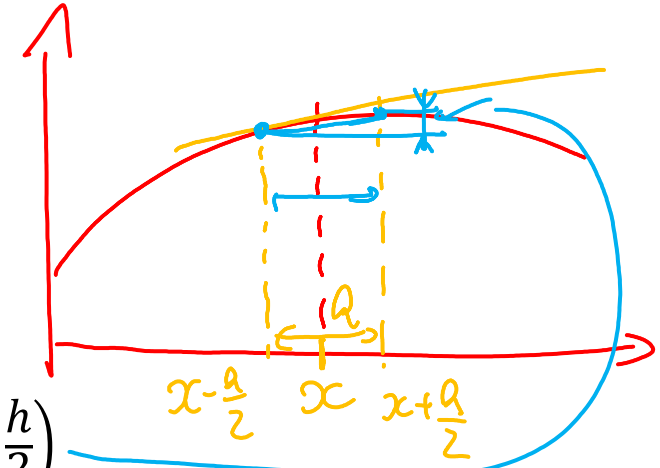
- Tangente à la courbe 🟩
- Taux d'accroissement 🟥
- Pente 🟥





On approche localement la fonction par un segment:

$$\underbrace{f''(x) = \boxed{\lim_{h\to 0}} \frac{f'\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h}}$$



Par récurrence, on peut donc donner une définition de la dérivée seconde:

$$\boxed{f"(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(f(x+h) - f(x)\right) - \left(f(x) - f(x-h)\right)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

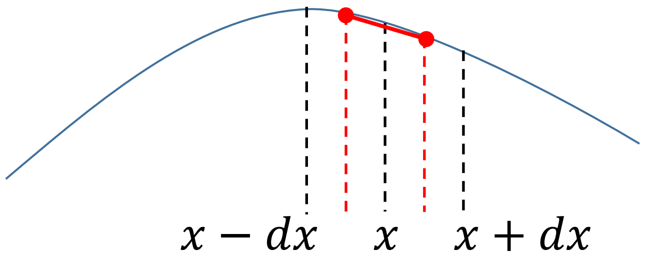
Et aux dérivées d'ordre supérieur

1-b) Écriture dans le cadre du calcul différentiel

On notera un élément infinitésimal $\mathrm{d}x$ (pour h, en omettant $\lim\limits_{h\to 0}$ dans l'écriture).

$\lim\limits_{h\to 0} \longleftrightarrow dx$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{f\left(x+\frac{dx}{2}\right) - f\left(x-\frac{dx}{2}\right)}{dx}$$

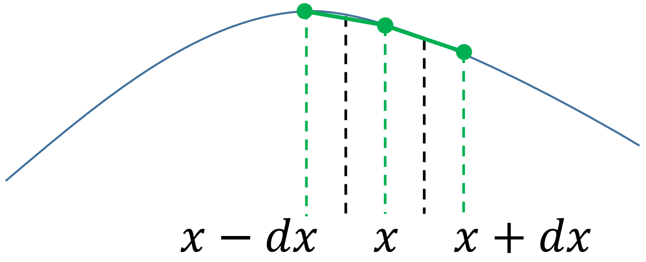


$$f\left(x+\frac{dx}{2}\right) - f\left(x-\frac{dx}{2}\right) \sim f'(x)dx$$

$$f\left(x+\frac{dx}{2}\right) - f\left(x-\frac{dx}{2}\right) = f'(x)dx + o(dx)$$

Pour alléger l'écriture, **en physique** on omet généralement d'écrire ce terme (en gardant le "=").

$$f"(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \sim \frac{f(x+dx) + f(x-dx) - 2f(x)}{dx^2}$$



$$f(x+dx) + f(x-dx) - 2f(x) \sim f"(x)dx^2$$

$$f(x+dx) + f(x-dx) - 2f(x) = f"(x)dx^2 + o(dx^2)$$

Formule de Taylor :

$$f(\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{x_0}+\underset{\substack{\downarrow\\ dx}}{h}) \sim f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

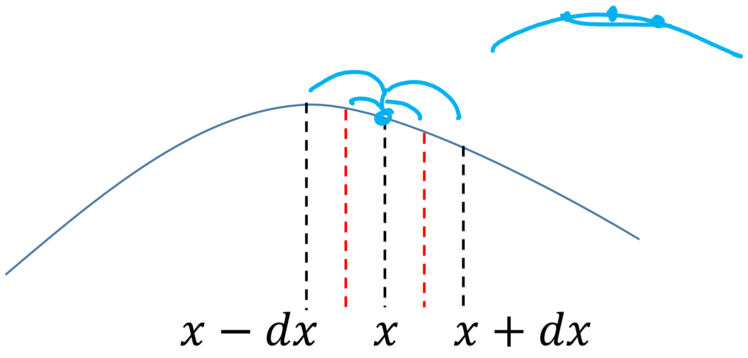
$$o(dx)$$

$$\boxed{f(x+dx) = f(x) + dx\, f'(x)} + \underbrace{\frac{dx^2}{2} f''(x) + \dots + \frac{dx^n}{n!} f^{(n)}(x)}$$

$$f(x-dx) = f(x) - dx\, f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x)$$

2) Différences finies et méthode d'Euler

- On parlera de **différences finies** pour les variables d'**espace** en conservant les définitions **« symétriques »**



$$f'(x) = \frac{df}{dx} \sim \frac{f\left(x + \frac{dx}{2}\right) - f\left(x - \frac{dx}{2}\right)}{dx}$$

$$f"(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \sim \frac{f(x + dx) + f(x - dx) - 2f(x)}{dx^2}$$

- On parlera de la **méthode d'Euler** pour la variable de **temps**, en utilisant une définition **« asymétriques »**

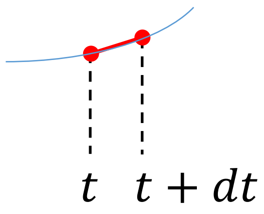
$$\underline{f'(t)} = \frac{df}{dt} \sim \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}$$

Equation décrivant l'évolution de f au niveau local

$$f(t + dt) = f(t) + f'(t)dt + \sigma(dt^2)$$

$$f(t + dt) \sim f(t) + f'(t)dt$$

Evolution de f sur un pas de temps infinitésimal



Possibilité d'inférer les équations aux dérivées partielles régissant la physique d'un système à partir de raisonnements au niveau local, avec une approche microscopique, en raisonnant sur des pas de temps ou d'espaces infinitésimaux

2) Equations aux dérivées partielles

2-a) Exemples

Coefficient de diffusion

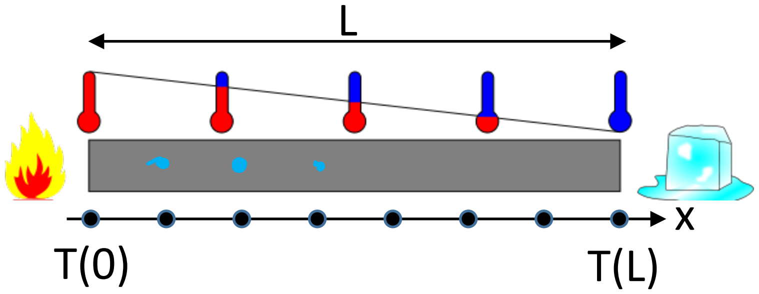
Source chaleur

- Equation de diffusion de la chaleur: $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = \textcircled{Q}}$$

$$\xrightarrow[Q=0]{\text{À 1D, sans source}} \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Opérateur Laplacien: $$\Delta \cdot := \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}}$$

$$T(x,y,z,t) \rightarrow T(x,t)$$



LAPLACIEN

$$\Delta T(x,y,z,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2) Equations aux dérivées partielles

2-a) Exemples

Coefficient de diffusion

Source chaleur

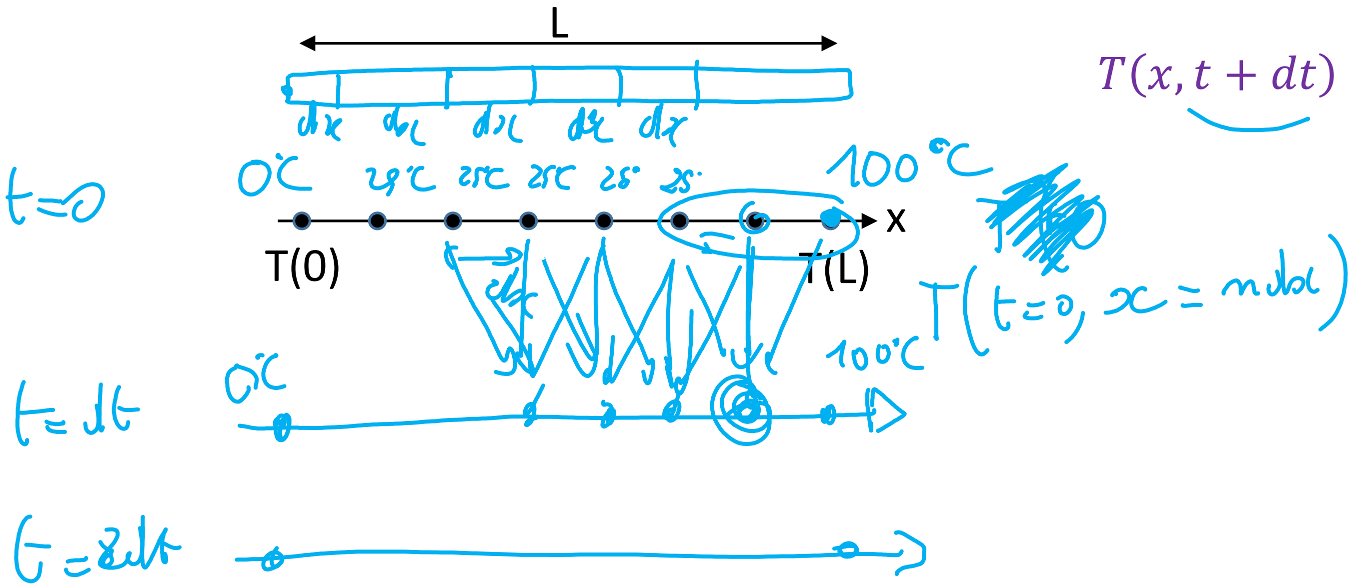
- Equation de diffusion de la chaleur: $\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = Q$

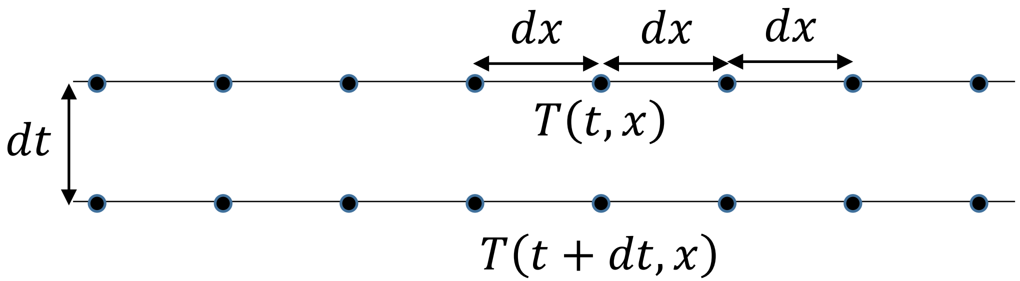
$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = Q \xrightarrow{\text{À 1D, sans source}} \underbrace{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}}_{\frac{T(x,t+dt)-T(x,t)}{dt}} = D\,\frac{\partial^{2} T(x,t)}{\partial x^{2}}$$

Opérateur Laplacien: $\Delta \cdot := \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}$

Différences finies

$$T(x,t+dt) = T(x,t) + dt\,\frac{D}{dx^2}\big(T(t,x+dx) + T(t,x-dx) - 2T(t,x)\big)$$





2) Equations aux dérivées partielles

2-a) Exemples

- Equation de diffusion de la chaleur: $\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = Q$

Coefficient de diffusion

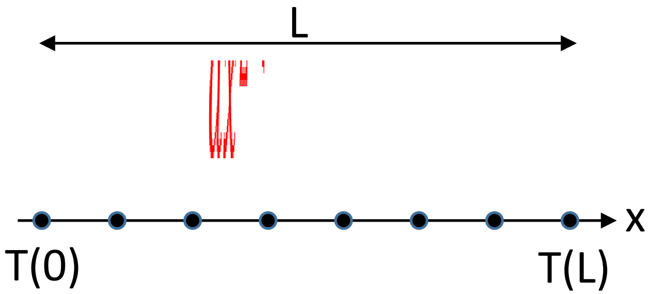
Source chaleur

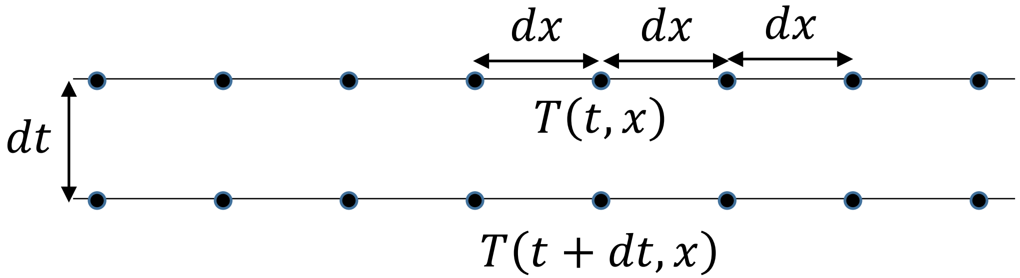
$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = Q \xrightarrow{\text{À 1D, sans source}} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Opérateur Laplacien: $\Delta \cdot := \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2}$

Différences finies

$$T(x,t+dt) \sim T(x,t) + dt\,\frac{D}{dx^2}\big(T(t,x+dx) + T(t,x-dx) - 2T(t,x)\big)$$



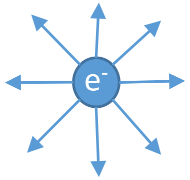


- Equations de Maxwell: $div\left(\vec{E}(\vec{r})\right) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Charge volumique

Champ électrique

Permittivité diélectrique du vide



Opérateur divergence: $div(\cdot) = \frac{d\,\cdot}{dx} + \frac{d\,\cdot}{dy} + \frac{d\,\cdot}{dz}$

- Radioactivité: $\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} = -\gamma N(t)}$

$N(t)$: nombre de radio-isotopes

$\tau\ [s]$: temps caractéristique (γ[1/s])

2-b) Approche microscopique: Exemple de la radioactivité

Pour obtenir l'équation différentielle, on fait deux suppositions:

1- Les noyaux sont indépendants les uns des autres ← V.A.

2- Pour un temps infinitésimal, la probabilité d'un noyau de se désintégré est proportionnel au temps, avec un facteur constant(constante de désintégration γ).

$\frac{dt}{\tau}$

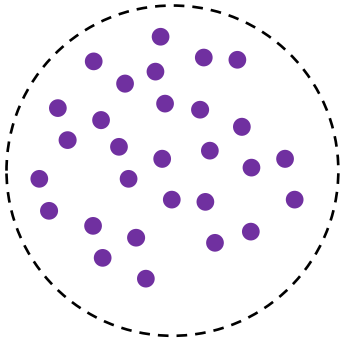
→ LOCALITÉ

EULER

Signification de: $$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} = -\gamma N(t)$$

$$N(t+dt) \sim N(t) - N(t)\,\gamma dt$$

$N(t)$ radio-isotope



La constante de désintégration γ est la densité de probabilité de désintégration d'un radio-isotope par unité de temps

Probabilité pour chaque radio-isotope de se désintégrer durant un pas de temps $dt \ll \frac{1}{\gamma} (= \tau)$

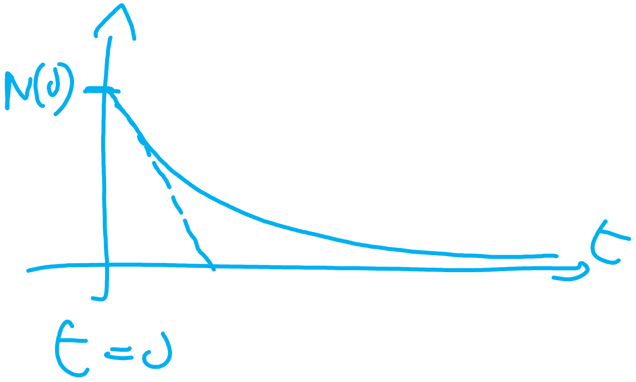
Chaque noyau ● est considéré indépendant des autres. Ce sont des variables aléatoires indépendantes. $N(t)\ \gamma dt$ est le nombre de radio-isotope se désintégrant durant dt : N étant grand, on a implicitement appliqué la loi des grands nombres.

2-b) Approche microscopique: Exemple de la radioactivité

De l’équation différentielle, on peut déduire l’évolution de $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\gamma N(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\gamma\, dt$$



$$\int_{t=0,\ N_0}^{t} \frac{1}{N(t)}\, dN = \int_0^t -\gamma\, dt$$

$$\left[\ln(N(t))\right]_0^t = \left[-\gamma t\right]_0^t$$

$$\ln\frac{N(t)}{N(0)} = -\gamma t \Rightarrow N(t) = N(0)\,e^{-\gamma t}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(0)(-\gamma)e^{-\gamma t} = -\gamma N(t)$$

2-b) Approche microscopique: Exemple de la radioactivité

De l’équation différentielle, on peut déduire l’évolution de $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\gamma N(t) \Rightarrow \frac{1}{N(t)} dN(t) = -\gamma\ dt$$

Equation aux variables séparées

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{N(t)} dN(t) = \int_0^t -\gamma\ dt \Rightarrow \left[ln\left(N(t)\right)\right]_0^t = -\gamma\ t \Rightarrow \begin{cases} ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\gamma\ t \\ N(t=0) = N_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\gamma\ t}$$

Solution macroscopique

On ne cherche pas à savoir lesquelles des noyaux se désintègrent. On souhaite juste connaitre le comportement macroscopique, c’est-à-dire l’évolution temporelle du nombre moyen de noyaux non désintégrés.

C’est exactement le type de raisonnement que l’on va tenir dans la suite du cours:
Partir de considérations locales (espace/temps) pouvant prendre en compte une part d’aléatoire, pour en dériver des comportements ou des relations macroscopiques.

Exemples: Dans un gaz parfait, la pression résulte d’un grand nombre de collision aléatoire.

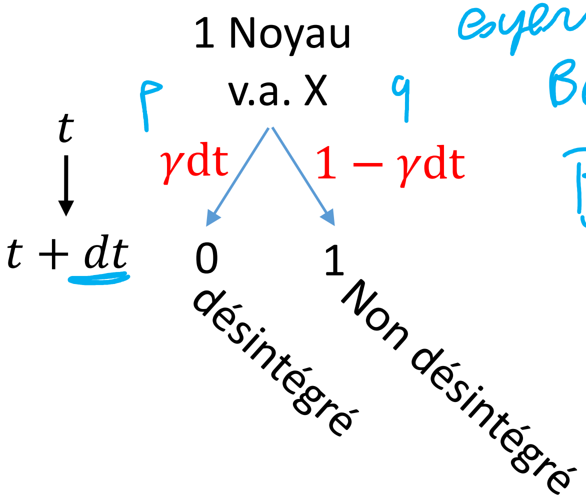
2-c) Approche statistique

Hypothèses

1- Les noyaux sont indépendants les uns des autres : Variable aléatoire indépendante

2- Pour un temps infinitésimal $dt \ll \frac{1}{\gamma}$, la probabilité d'un noyau de se désintégré vaut γdt.

Pour un noyau :



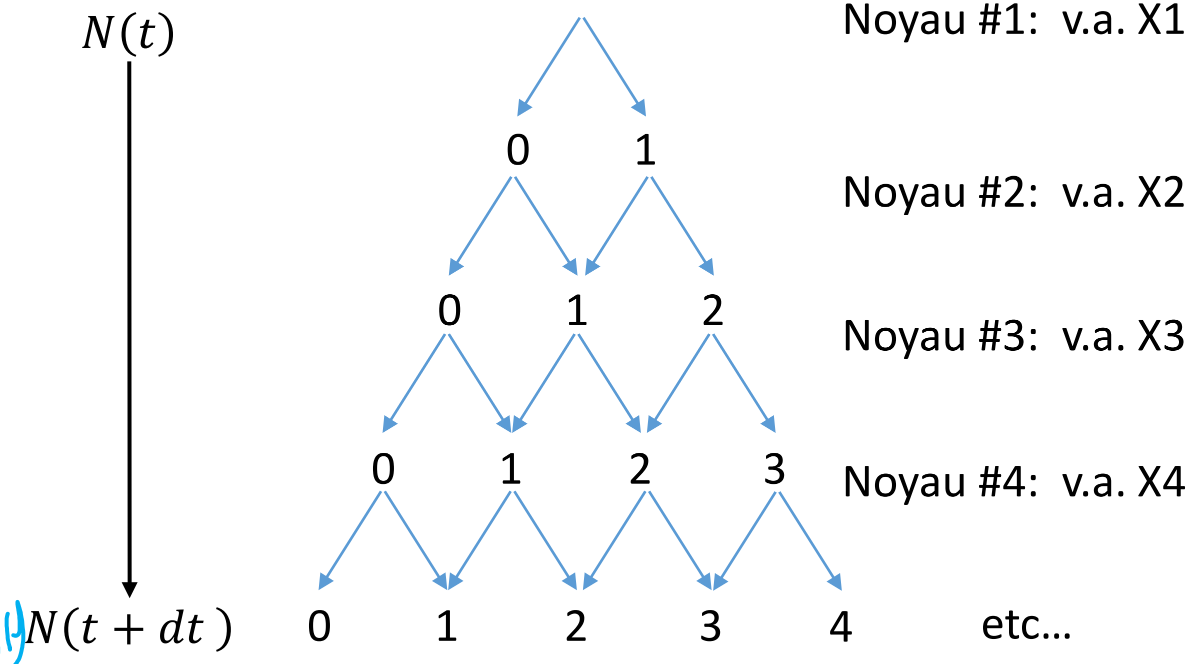
expérience de Bernoulli

$\mathcal{B}(p, q)$

X a pour valeur $E_X = \{0,1\}$

$$E(X) = \sum_{k \in E_X} k\, p_k = 0 \times \gamma dt + 1(1-\gamma dt)$$
$$= 1 - \gamma dt$$

Pour N noyaux :



On peut construire la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad \equiv N(t+dt)$

$E_Y = \{0,1,2,\cdots,N(t)\}$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k \in E_X} k^2 p_k - (1-\gamma dt)^2 = \cancel{0^2 \times \gamma dt} + 1^2(1-\gamma dt) - (1-\gamma dt)^2 = (1-\gamma dt)\gamma dt$$

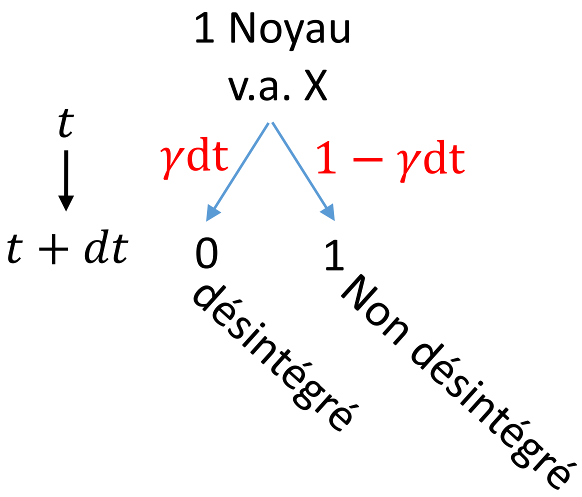
2-c) Approche statistique

Hypothèses

1- Les noyaux sont indépendants les uns des autres : Variable aléatoire indépendante

2- Pour un temps infinitésimal $dt \ll \frac{1}{\gamma}$, la probabilité d'un noyau de se désintégré vaut γdt.

Pour un noyau :



X a pour valeur $E_X = \{0,1\}$

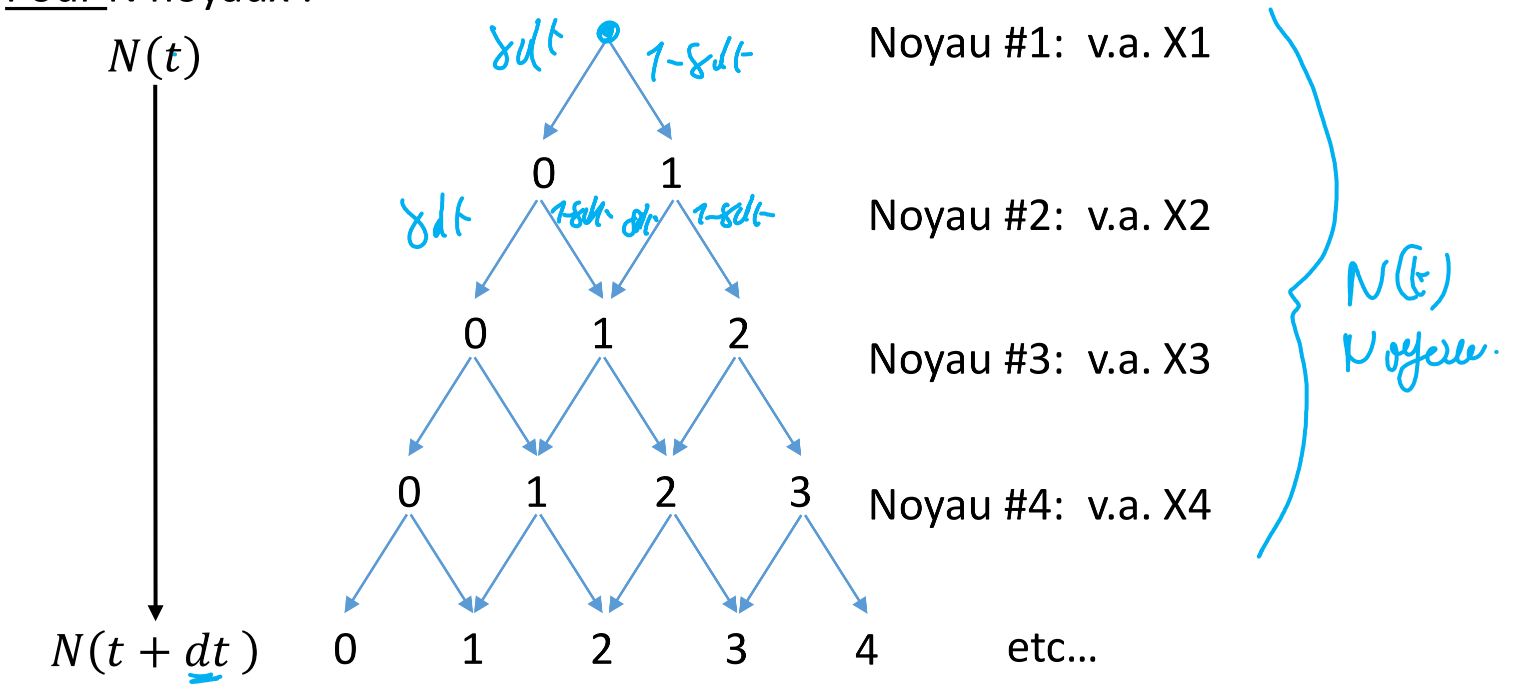
$$\langle X\rangle = 0 * \gamma dt + 1 * (1-\gamma dt) = 1-\gamma dt$$

$$\sigma_X^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

$$\sigma_X^2 = 0^2 * \gamma dt + 1^2 * (1-\gamma dt) - (1-\gamma dt)^2$$

$$\sigma_X^2 = \gamma dt(1-\gamma dt)$$

Pour N noyaux :



On peut construire la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \equiv N(t+dt)$

$E_Y = \{0,1,2,\cdots,N(t)\}$

Loi GRAND NOMBRE

$$N(t+dt) = E(N(t+dt)) = N(t) \times (1-\gamma dt)$$

2-c) Approche statistique

- Avec la loi des grands nombres : $N(t)$ est grand

Les v.a. $\{X_1, X_2 \cdots X_{N(t)}\}$ sont indépendantes et de même loi

$$N(t+dt) \equiv Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \xrightarrow{\text{Tend vers}} N(t)\langle X\rangle = N(t)(1-\gamma \mathrm{dt}) = N(t) - \gamma N(t)\mathrm{dt}$$

$E(\overset{\|}{N}(t+dt)) \sim N(t+dt)$ loi des grand Nombres

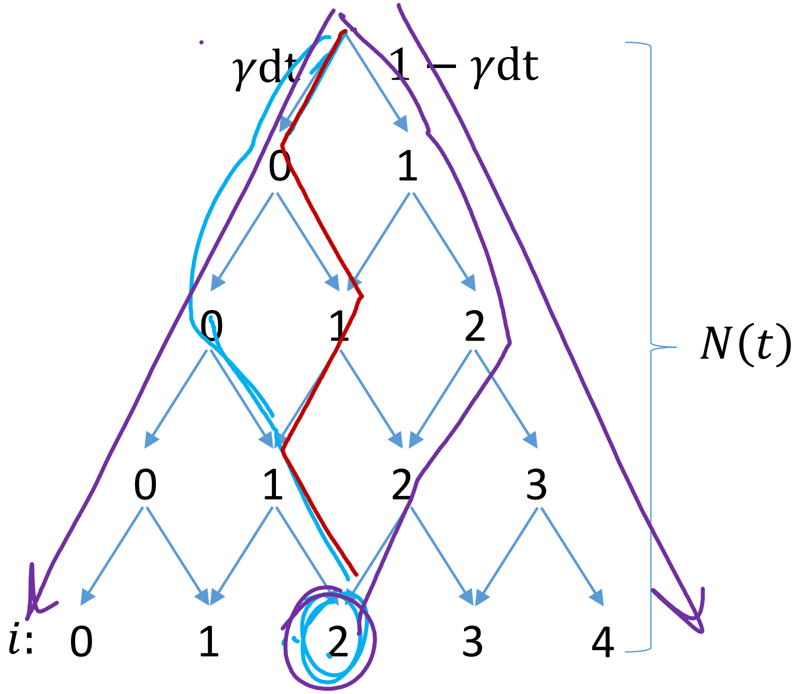
- Calcul direct: Loi Binomiale

Probabilité d'avoir i noyaux non désintégrés durant dt (ou $N(t) - i$ noyaux désintégrés), **quels que soient** les noyaux désintégrés et non désintégrés

$$i \in [0, N(t)], \quad P_Y(i) = \boxed{C^i_{N(t)}}(\gamma \mathrm{dt})^{N(t)-i}(1-\gamma \mathrm{dt})^i$$

Coefficient binomiale, également noté $\binom{N(t)}{i}$: nombre de chemins dans l'arborescence conduisant à i noyaux non désintégrés

Pas de notion d'ordre d'évènement entre les désintégrations. On ne s'intéresse pas à l'information « qui », mais seulement « combien ».



Rappel sur le coefficient binomiale:

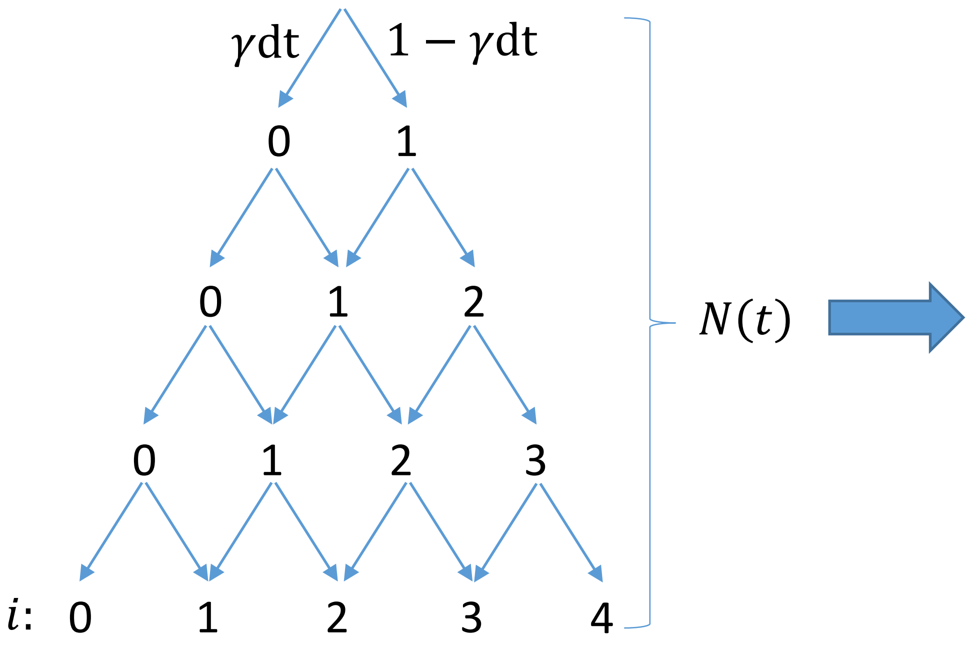
$0! = 1$

$$\binom{N}{i} = C^{i}_{N(t)} = \frac{N(t)!}{i!\ (N(t)-i)!}$$

$N(t)!$ → Nombre de manière d’ordonner N(t) noyaux distinguables

$(N(t)-i)!$ → Nombre de manière d’ordonner $(N(t)-i)$ noyaux désintégrés distinguables

$i!$ → Nombre de manière d’ordonner i noyaux non désintégrés distinguables



N(t) = 4 ici

i=2

X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	1	0

L’ordre ne compte pas:

$X_1\ X_2\ X_3\ X_4$

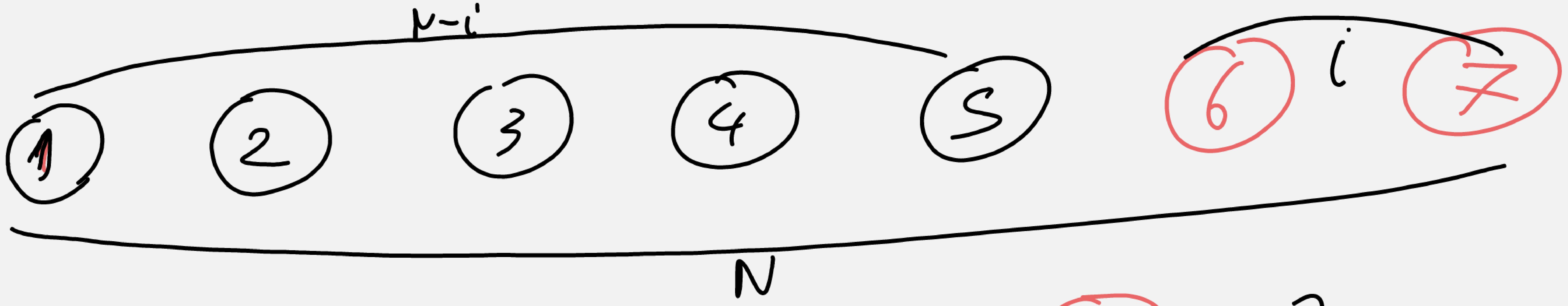
0 0 1 1

et

$X_2\ X_1\ X_3\ X_4$

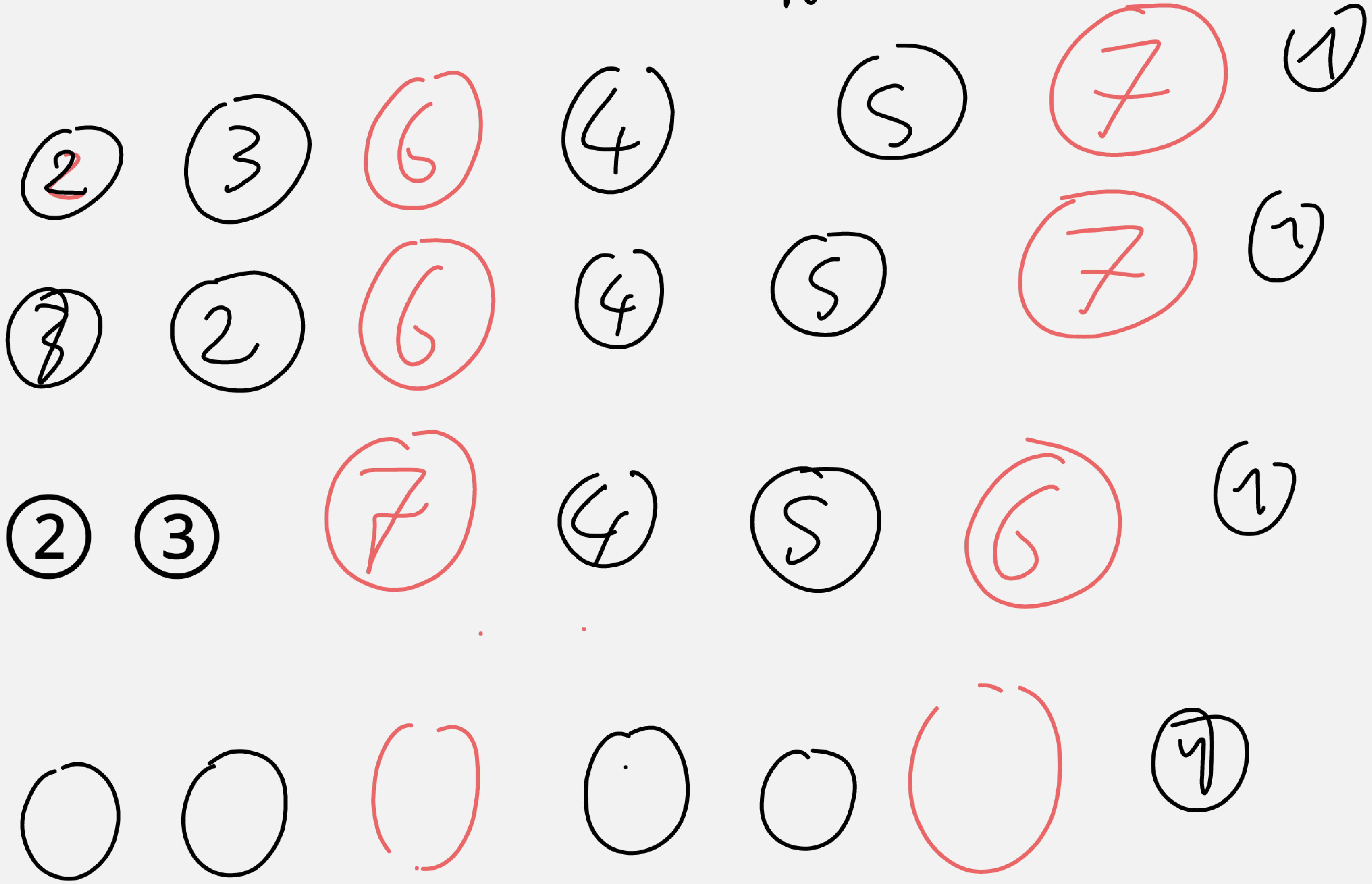
0 0 1 1

Sont équivalents



$N = 7$

$i = 2$



$$\binom{N}{i} = C_N^i = \frac{N!}{(N-i)! \quad i!}$$

Calcul de $N(t+dt)$ moyen:

$$\langle N(t+dt)\rangle = \langle Y\rangle = \sum_{i=0}^{N(t)} i\,P_Y(i) = \sum_{i=1}^{N(t)} i\,P_Y(i) = \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{i * N(t)!}{i!\ (N(t)-i)!}\,(\gamma\mathrm{dt})^{N(t)-i}\,(1-\gamma\mathrm{dt})^{i}$$

$i = 0$

$$\frac{i}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$$

On constate que: $i * C_{N(t)}^{i} = \dfrac{i * N(t)!}{i!\ (N(t)-i)!} = \dfrac{N(t) * (N(t)-1)!}{(i-1)!\ \big((N(t)-1)-(i-1)\big)!} = N(t) * C_{N(t)-1}^{i-1}$

$\binom{N}{i}$

$$\langle N(t+dt)\rangle = N(t)\sum_{i=1}^{N(t)} C_{N(t)-1}^{i-1}\ (\gamma\mathrm{dt})^{N(t)-i}\,(1-\gamma\mathrm{dt})^{i} = N(t)\boxed{\sum_{j=0}^{N(t)-1} C_{N(t)-1}^{j}\ (\gamma\mathrm{dt})^{N(t)-1-j}\,(1-\gamma\mathrm{dt})^{j}} * (1-\gamma\mathrm{dt})$$

Changement de variable $j = i - 1$

$$= (\gamma\mathrm{dt} + 1 - \gamma\mathrm{dt})^{N(t)-1} = 1$$

Rappel:

$$\boxed{(a+b)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i\ a^{N-i}\ b^i}$$

Ce qui conduit à $\langle N(t+dt)\rangle = N(t) * (1-\gamma\mathrm{dt})$

$(a+b) = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = \underset{\uparrow C_3^0}{1}a^3 + \underset{\uparrow C_3^1}{3}a^2b + \underset{\uparrow C_3^2}{3}ab^2 + \underset{\uparrow C_3^3}{1}b^3$

- - -

$$(a+b)^N = \sum_{i=1}^{N} C_N^i a^i b^{N-i} = \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} a^i b^{N-i}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & \xrightarrow{i} & & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & & \\ N \downarrow & 1 & 1 & 0 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

....

$$\binom{N}{i-1} + \binom{N}{i} = \binom{N+1}{i}$$

- A partir du théorème de la limite centrale

$$N(t+dt) \equiv Y = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \xrightarrow{\text{Tend vers}} \mathcal{N}\left(N(t)\langle X\rangle, N(t)\sigma_X^2 \right)$$

$$= \mathcal{N}\Big(\underbrace{N(t)(1-\gamma\mathrm{dt})}_{} \, , \underbrace{N(t)\,\gamma\mathrm{dt}\,(1-\gamma\mathrm{dt})}_{} \Big)$$