Variance σ_x^2 et écart type σ_x:

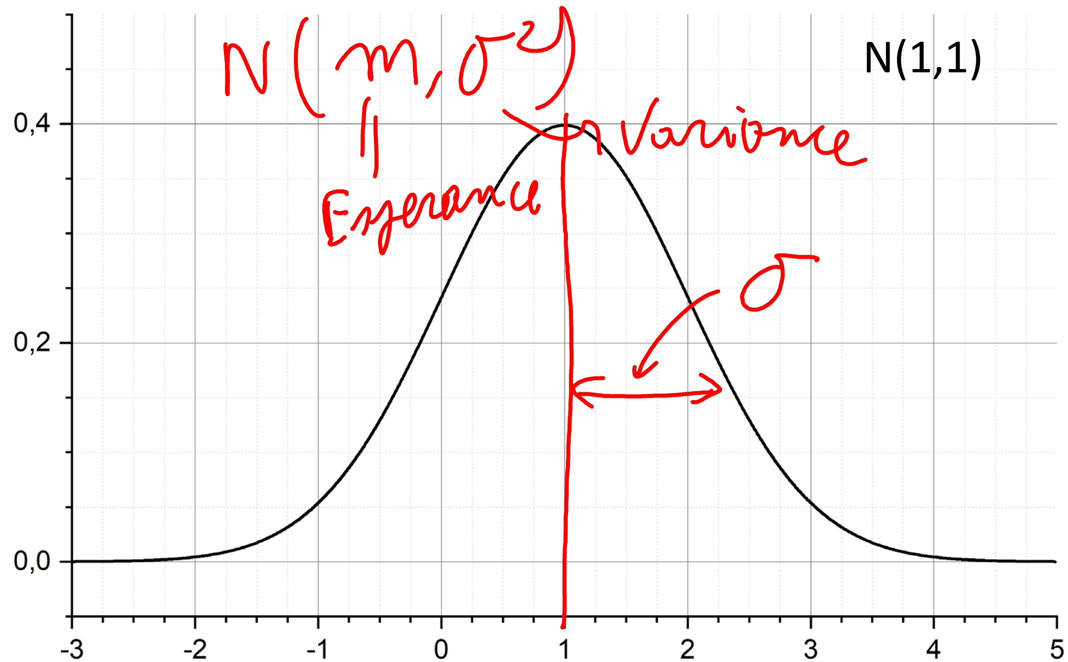
$$\sigma_x^2 = \langle\, (X - \langle X \rangle)^2 \,\rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

Exemple important en physique, les v.a. gaussiennes qui seront omniprésentes:

Espérance Variance

Loi normale $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Formules utiles

Soit $$\boxed{I_n = \int_0^\infty t^n e^{-at^2} dt}$$ avec (a>0)

Relation de récurrence $$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{2a} \mathrm{I}_n$$

Avec $$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ et $$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2a}$$

A vos stylos !

$p_x(x)$ Normée ?
m espérance ?
σ^2 variance ?

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-at^2} dt$$

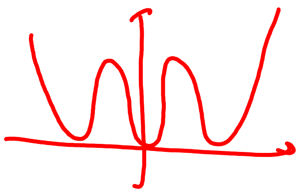
$$I_2 = \frac{1}{2a} I_0$$

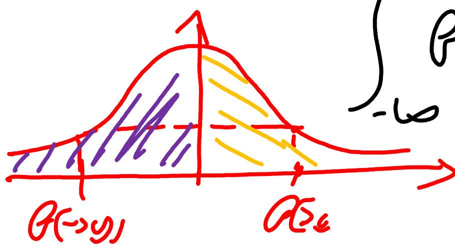
$$\mathrm{I_{n+2}} = \frac{\mathrm{n+1}}{\mathrm{2a}} \mathrm{I_n}$$

$$\mathrm{I_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{a}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{I_1} = \frac{1}{\mathrm{2a}}$$

v.a. $x \to$ loi $N(m, \sigma^2)$

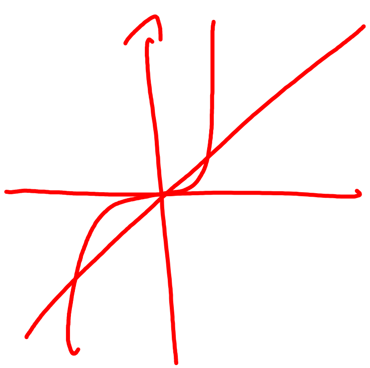
Fonction paire $f(-x) = f(x)$

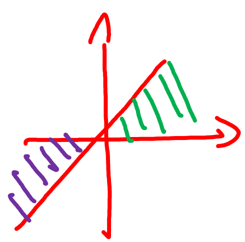




$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2 \times \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$





$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx}_{} = 0$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n \exp(-a t^2)\,dt$$

Normée ? $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$?

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$t = x - m$

$\frac{dt}{dx} = 1 - 0 \iff dt = dx$

si $x \to +\infty$, alors $t \to +\infty$

si $x \to -\infty$, alors $t \to -\infty$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}_{\text{Paire}} dt = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt \equiv I_0$$

σ^2 donné

identification $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2\sigma^2} = a \\ n = 0 \end{array} \right.$

$$I = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times I_0 = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \times \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{a}}}} = 1 \qquad \underline{\text{CQFD}}$$

$$a = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \underbrace{e(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{t+m}{\boxed{x}} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\overbrace{x-m}^{t})^2}{2\sigma^2}\right) \overset{dt}{dx}$$

Σ

$t = x - m \qquad x = t + m$

$dt = dx$

$+\infty \longrightarrow +\infty$

$-\infty \longrightarrow -\infty$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t + m) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} m \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

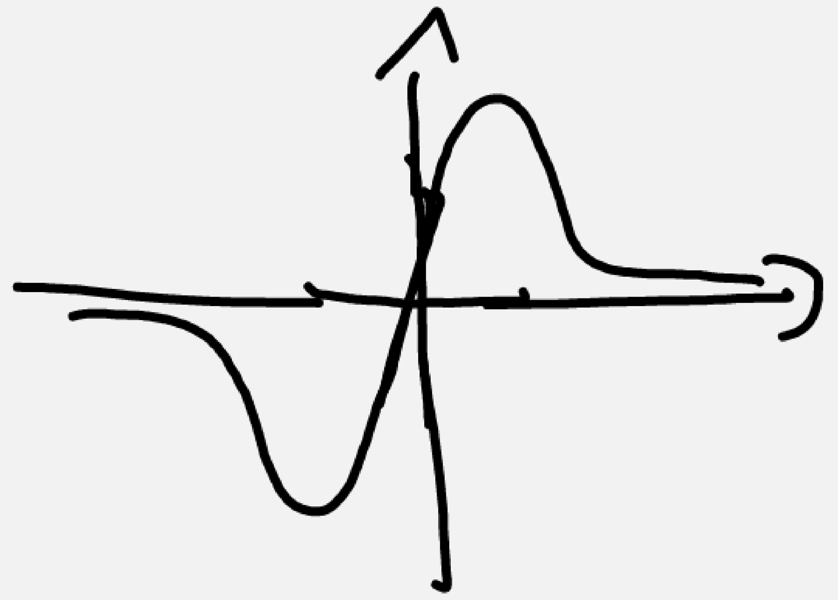
$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt}$$

$g(t)$: Impaire

$g(-t) = -g(t)$

$\Downarrow$

0



$$E(x) = m \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = m \times 1$$

$I_2 = I_{2+0} =$

$$E(f(x)) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e(x)\, dx$$

$$\text{VARIANCE} = E\Big(\big(x - \underset{\substack{\| \\ m}}{E(x)}\big)^2 \Big) = E\Big(\underbrace{(x-m)^2}_{f(x)} \Big)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2\, e(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{(x-m)^2}_{t^2} \exp\left(-\frac{\overbrace{(x-m)^2}^{t^2}}{2\sigma^2}\right) \overbrace{dx}^{dt}$$

$+\infty \to +\infty$, $-\infty \to -\infty$

$t = x - m$

$dt = dx$

$$I_2 = \frac{1}{2a} I_0 = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

FUNCTION PAIRE

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \boxed{\int_0^{\infty} t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt}$$

identification

$n = 2$

$a = \frac{1}{2\sigma^2}$

3.) Variables aléatoires indépendantes (écriture pour v.a. discrètes)

Définition: Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans les ensembles Ex et Ey.
X et Y sont des v.a. **indépendantes** si leurs réalisations sont des évènements indépendants:

$$\mathrm{Prob}(\ \{\mathrm{X}=\mathrm{k_x}\ \mathrm{et}\ \mathrm{Y}=\mathrm{k_y}\}\ )\ =\ \mathrm{Px(k_x)\ Py(k_y)}$$

Normalisation: $$1=\sum_{k_x\in E_x}\sum_{k_y\in E_y} Px(k_x)Py(k_y)=\left(\sum_{k_x\in E_x} Px(k_x)\right)\times\left(\sum_{k_y\in E_y} Py(k_y)\right)$$

$k_x \to k_{x_1} ; k_{x_2}$
$k_y \to k_{y_1} ; k_{y_2}$.

$k_{x_1} k_{y_1}$ $k_{x_1} k_{y_2}$ $k_{x_2} k_{y_1}$ $k_{x_2} k_{y_2}$

p'

Généralisation: Les v.a. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sont dites indépendantes si la v.a. $Y=\ (X_1, X_2, \dots, X_n)$ à valeur dans $E_1\times\ E_2\times\cdots\times E_n$ admet pour loi le **produit** des lois marginales

$$\mathrm{Py}(\ \mathrm{k_1}, \mathrm{k_2}\ \dots\ \mathrm{k_n})\ =\prod_{i=1}^{N} \mathrm{P_{Xi}(k_i)}$$

$$\text{Variance} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \times \frac{1}{2a} \times \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} = \sigma^2$$

$$a = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$R_x : R_{x_1} \quad R_{x_2}$

$R_y : R_{y_1} \quad R_{y_2}$

$$\rightarrow P_x(R_{x_1}) P_y(R_{y_1}) + P_x(R_{x_1}) P_y(R_{y_2})$$

$$\rightarrow + P_x(R_{x_2}) P_y(R_{y_1}) + P_x(R_{x_2}) P_y(R_{y_2})$$

$$\rightarrow P_x(R_{x_1}) \left[P_y(R_{y_1}) + P_y(R_{y_2}) \right] + P_x(R_{x_2}) \left[P_y(R_{y_1}) + P_y(R_{y_2}) \right]$$

$$= \left[P_x(R_{x_1}) + P_x(R_{x_2}) \right] \times \left[P_y(R_{y_1}) + P_y(R_{y_2}) \right]$$

3.) Variables aléatoires indépendantes (écriture pour v.a. discrètes)

Propriété: si les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ à valeur respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont indépendantes,

alors la variable aléatoire $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ a pour espérance $E(Z) = \prod_{i=1}^{N} E(X_i)$

$$= x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n \qquad \sum \left(\sum \dots \right)$$

$$Z = x_1 x_2$$

$$E(Z) = \sum_{k_1 \in E_1} \left(\sum_{k_2 \in E_2} \mathrm{Prob}\left((x_1 = k_1) \text{ et } (x_2 = k_2) \right) k_1 k_2 \right)$$

v.a. indep

$$= \sum_{k_1 \in E_1} \sum_{k_2 \in E_2} P_{x_1}(k_1) P_{x_2}(k_2) \, k_1 k_2$$

$$= \sum_{k_1 \in E_1} \sum_{k_2 \in E_2} k_2 \times P_{x_2}(k_2) \times k_1 P_{x_1}(k_1) = \overbrace{\left[\sum_{k_2 \in E_2} k_2 P_{x_2}(k_2) \right]}^{E(X_1)} \times \overbrace{\left[\sum_{k_1 \in E_1} k_1 P_{x_1}(k_1) \right]}^{E(X_2)}$$

3.) Variables aléatoires indépendantes (écriture pour v.a. discrètes)

Soit les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeur respectivement dans $E_1, E_2, \ldots, E_n$ indépendantes et suivant la même loi de variance σ^2 et d'espérance m .

Propriété : la v.a. $S = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_i$ a pour espérance $E(S) = N \times m$ et pour variance $\boxed{\sigma_S^2 = \cancel{N} \times \sigma^2 \times \frac{1}{N}}$

Propriété : la v.a. $\boxed{M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i}$ a pour espérance $E(M) = m$ et pour variance $\sigma_M^2 = \frac{\sigma^2}{N}$

$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Loi des grands nombres:

La variable aléatoire M tend vers la v.a. certaine m lorsque N tend vers l'infini:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \to \infty} Prob\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

En physique: *La valeur d'une observable, résultant de la contribution d'un grand nombre d'objets, finit par coïncider avec sa valeur moyenne. On parle d'une grandeur macroscopique (ex: la pression).*

$$Z \to m,\ \sigma^2$$

$$E(aZ) = a\,E(Z)$$

$$\sigma_{aZ}^2 = E\left(\left(aZ - E(aZ)\right)^2\right)$$

$$= E\left(\left(aZ - aE(Z)\right)^2\right)$$

$$= E\left(a^2\left(Z - E(Z)\right)^2\right) = a^2\,E\left(\left(Z - E(Z)\right)^2\right)$$

$$= a^2\sigma^2$$

3.) Variables aléatoires indépendantes (écriture pour v.a. discrètes)

Théorème central limite (ou Théorème central limite):

Soit les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ à valeur respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$ indépendantes et suivant la même loi de variance σ^2 et d'espérance m. On note $\mathrm{N}(m_0, \sigma_0^2)$ la loi normale d'espérance m_0 et de variance σ_0^2.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \overbrace{(X_i - m)}^{z_i} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathrm{N}(N \times m, N \times \sigma^2)$$

$E(X_i) = m$

$E(X_i - m) = 0$

$Z \to m \quad \sigma^2$

$E(aZ) = a\,E(Z)$

$\sigma_{aZ}^2 = E\left(\left(aZ - E(aZ)\right)^2\right)$

$= E\left(a^2\left(Z - E(Z)\right)^2\right)$