

SEMESTRE 3

MODULE M3102 :

ELASTICITE LINEAIRE

PROBLÈMES et CORRIGES

Bienvenue à vous

au laboratoire de :

Dimensionnement Des Structures

du Département :

Génie Mécanique et Productique

Ce livre électronique est destiné à compléter le cours enseigné durant la deuxième année du module F312, et relatif au Troisième Semestre.

Il reprend le plan suivi en amphithéâtre avec d'avantages de détails, d'illustrations ainsi que des corrigés des Problèmes du fascicule Travaux Dirigés qui, nous l'espérons, vous permettront de mieux comprendre cette matière qui n'est pas si terrible qu'elle peut laisser paraître.

A présent, choisissez sur votre gauche dans l'onglet signet un chapitre du programme que vous désirez voir ou revoir .

BON TRAVAIL-BON COURAGE

M3102

CONTRAINTES et CRITERES

DEFORMATIONS

LOIS DE COMPORTEMENT

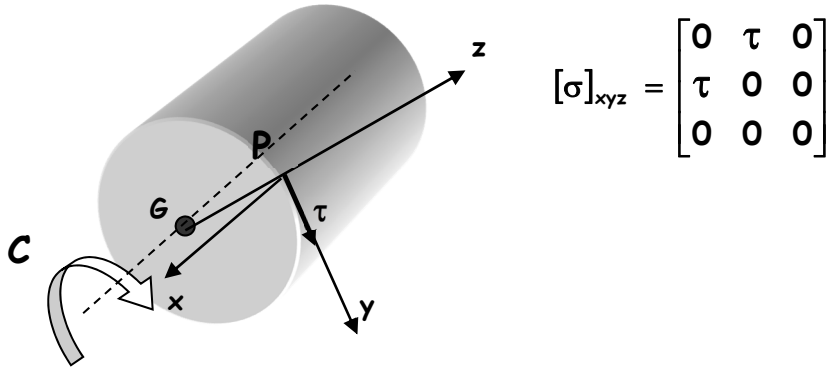
PROBLEMES DE SYNTHESE

CONTACT DE HERTZ

1. CONTRAINTES ET CRITERES

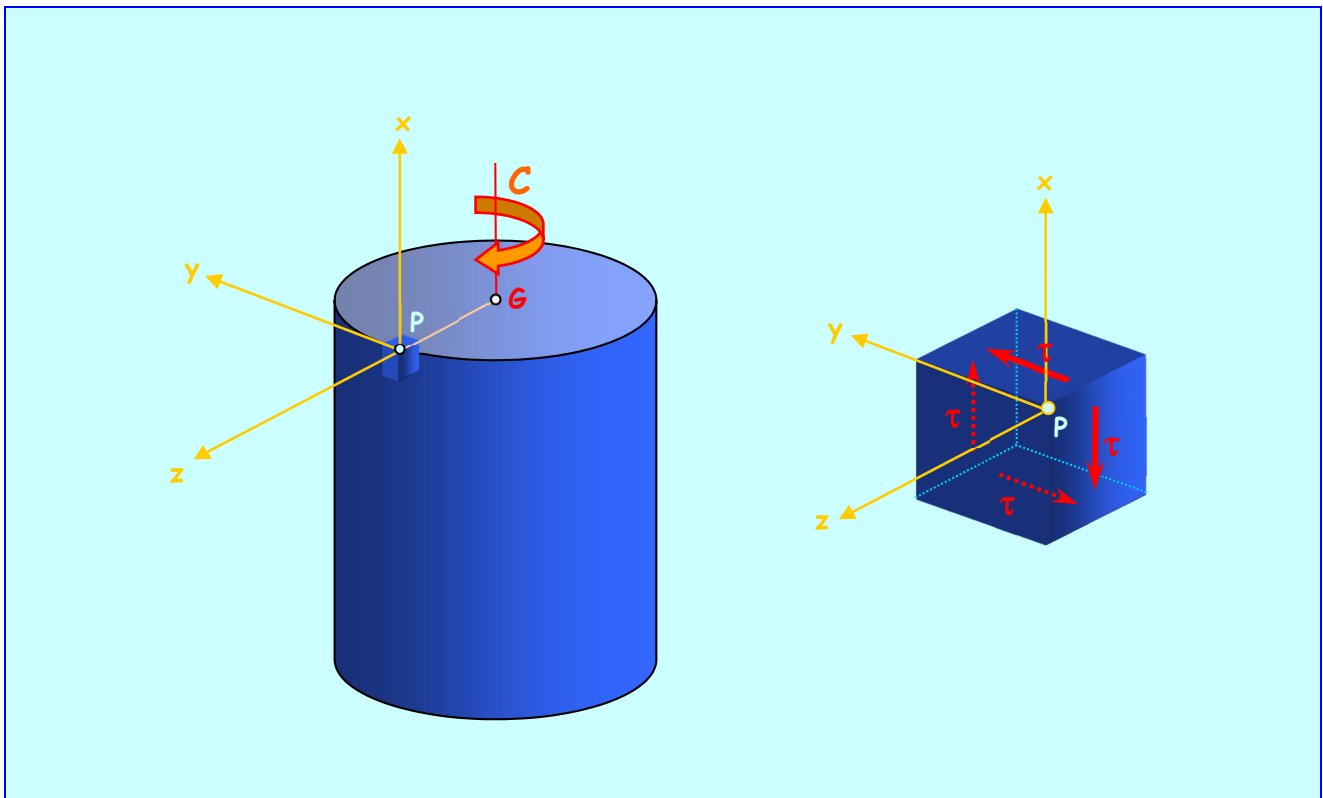
PROBLÈME N°1

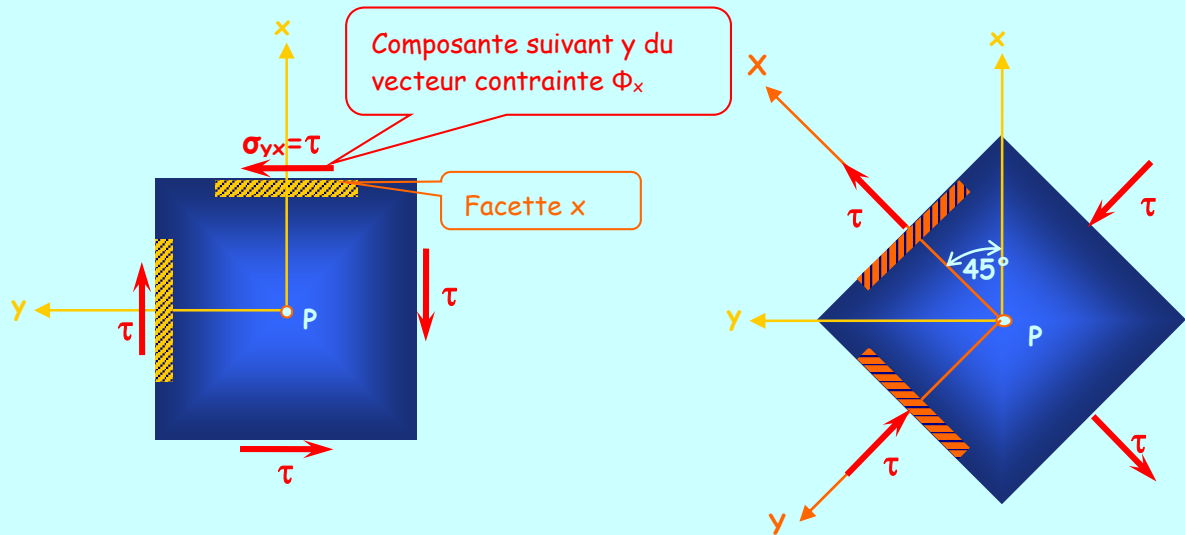
En un point P, situé sur la surface extérieure d'un cylindre soumis à un moment de torsion C, l'état de contraintes est défini par la matrice plane suivante, où τ est la contrainte de torsion :



- 1°) Représenter l'état de contraintes sur les faces d'un cube infiniment petit isolé en P dans les axes xyz.
- 2°) Déterminer les éléments principaux des contraintes.
- 3°) Tracer le tri-cercle de MOHR. En déduire les cisaillements principaux en module.

REPONSES N°1





La facette z est principale, et la contrainte principale associée est nulle. (Bord libre)
C'est donc un état de contraintes planes en un point situé à la surface d'une poutre.
Les éléments principaux des contraintes nous sont donnés par :

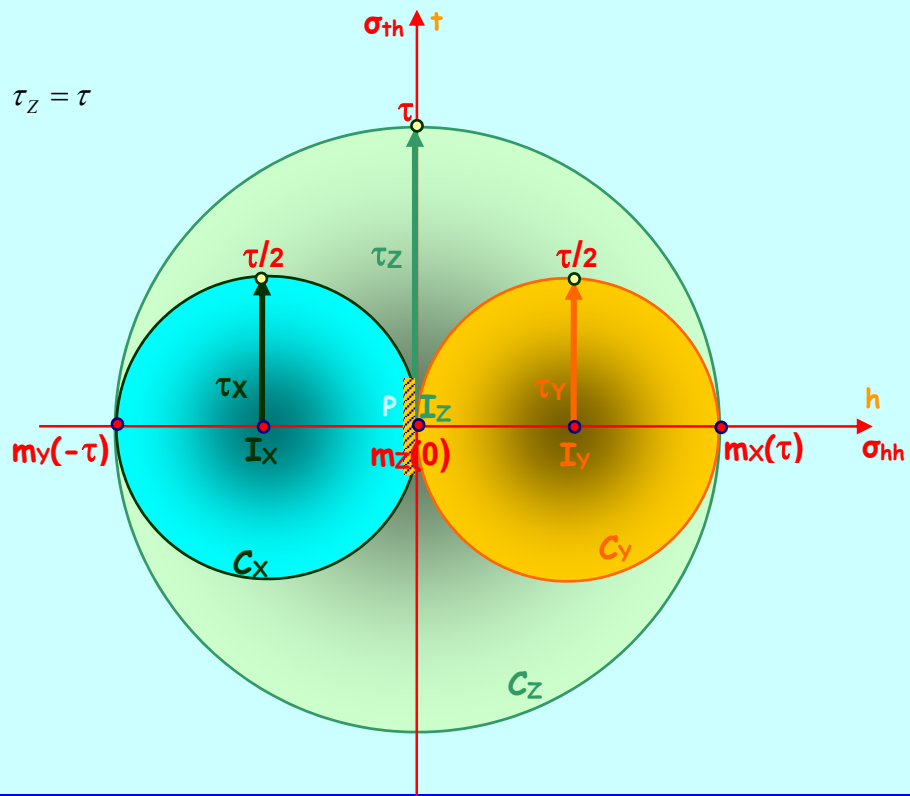
$$\sigma_x^y = \frac{\sigma}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{avec la contrainte normale } \sigma=0 \quad \text{d'où : } \sigma_X = \tau \quad \sigma_Y = -\tau$$

Les axes principaux sont positionnés par $\tan \varphi = \frac{\sigma_X - \sigma}{\tau}$ avec $\hat{\varphi} = (\vec{x}, \vec{X}) = 45^\circ$

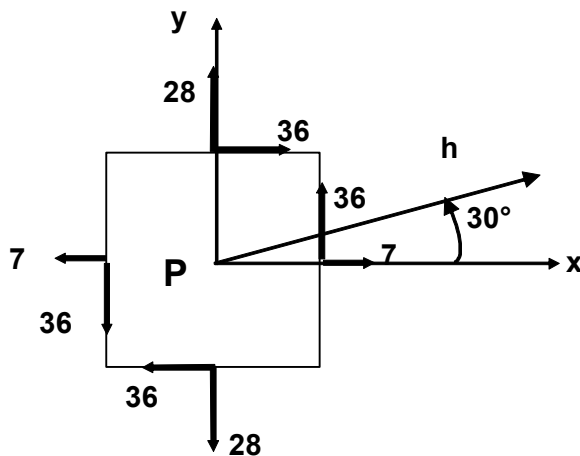
$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_X = \tau_Y = \frac{\tau}{2}$$

$$\tau_Z = \tau$$



PROBLÈME N°2



Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-contre. Les contraintes sont en MPa.

1°) Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère (xyz).

2°) Déterminer les éléments principaux des contraintes.

3°) On se place dans le plan des contraintes (plan xy).

a) Calculer les composantes du vecteur contrainte, ainsi que les contraintes normale et tangentielle s'exerçant sur un plan de coupe dont la normale fait un angle de 30°

par rapport à l'axe x.

b) Déterminer les normales aux plans de coupe sur lesquels s'exercent les contraintes de cisaillement maximum. En déduire la valeur de ce cisaillement et la valeur de la contrainte normale correspondante.

4°) Reprendre le problème avec le cercle de MOHR.

REPONSES N°2

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

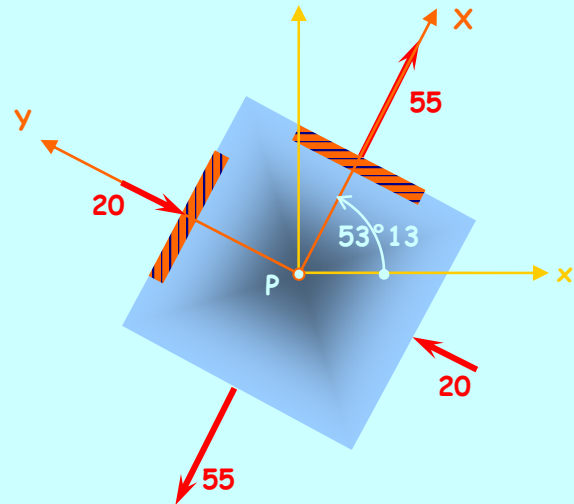
Etat plan de contraintes : la facette z est donc principale et $\sigma_z=0$. Les 2 autres valeurs propres sont données par :

$$\sigma_x^Y = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad \sigma_x=55\text{MPa} \quad \sigma_y=-20\text{MPa}$$

La direction propre X est calculée par $\tan \varphi = \frac{\sigma_X - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$ avec $\hat{\varphi} = (\vec{x}, \vec{X})$

$$\tan \varphi = \frac{55-7}{36} \text{ d'où } \hat{\varphi} = 53^{\circ}13' = (\vec{x}, \vec{X})$$

$$[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

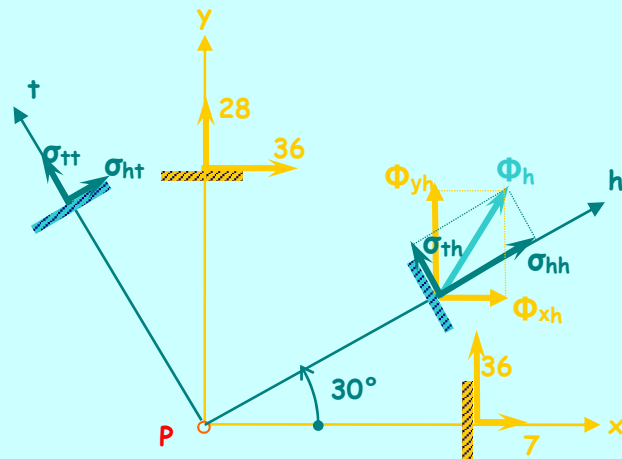


En utilisant la relation de CAUCHY : $[\Phi_h] = [\sigma][h]$ $[\Phi_h]_{/xyz} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[\Phi_h]_{/xyz} = \begin{bmatrix} 7 \cos 30 + 36 \sin 30 \\ 36 \cos 30 + 28 \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi_h]_{/xyz} = \begin{bmatrix} \Phi_{xh} \\ \Phi_{yh} \\ \Phi_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.062 \\ 45.177 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\vec{\Phi}_h = 24,062\vec{x} + 45,177\vec{y}$$



Compte tenu des relations : $\sigma_{hh} = {}^t[h][\sigma][h] = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $\sigma_{th} = {}^t[t][\sigma][h] = \begin{bmatrix} -\sin 30 & \cos 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin 30 \\ \cos 30 \\ 0 \end{bmatrix}$

d'où : $\sigma_{hh} = 7 \cos^2 30 + 28 \sin^2 30 + 2 \cdot 36 \sin 30 \cos 30$ $\sigma_{hh} = 43,42 \text{ MPa}$

$\sigma_{th} = -(7 - 28) \sin 30 \cos 30 + 36 (\cos^2 30 - \sin^2 30)$ $\sigma_{th} = 27,09 \text{ MPa}$

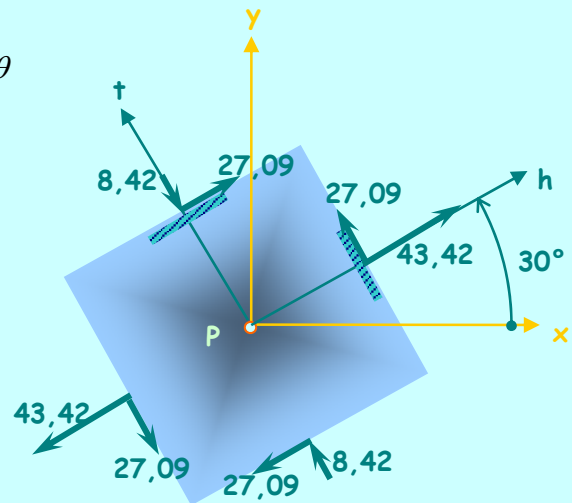
Compte tenu de l'état plan de contraintes, il est possible d'utiliser les relations :

$$\sigma_{hh} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{th} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta$$

qui mènent au même résultat.

$$[\sigma]_{htz}^P = \begin{bmatrix} 43,42 & 27,09 & 0 \\ 27,09 & -8,42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$



σ_{tt} peut être calculé avec la relation donnant σ_{hh} avec l'angle $\theta + 90^\circ$, ou à l'aide du premier invariant linéaire de la matrice σ : $I_{1\sigma} = tr[\sigma]$ $\sigma_{tt} = -8,42 MPa$

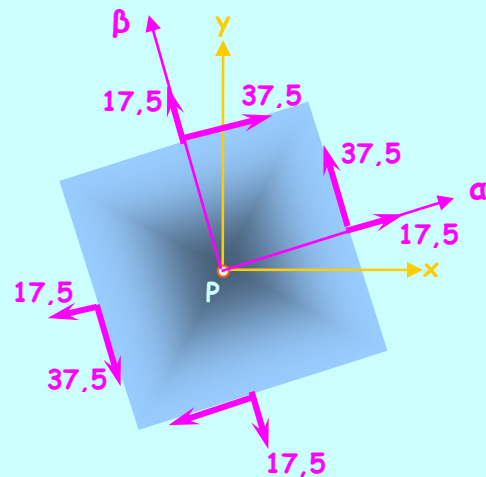
Les facettes sur lesquelles s'exercent les cisaillements maximums sont les plans bissecteurs des dièdres principaux. La valeur de ces cisaillements principaux est égale, en module, à la demie différence des contraintes principales dans chacun des plans principaux. La valeur de la contrainte normale associée à cette facette est la demie somme.

$$\hat{\psi} = \pm 45^\circ$$

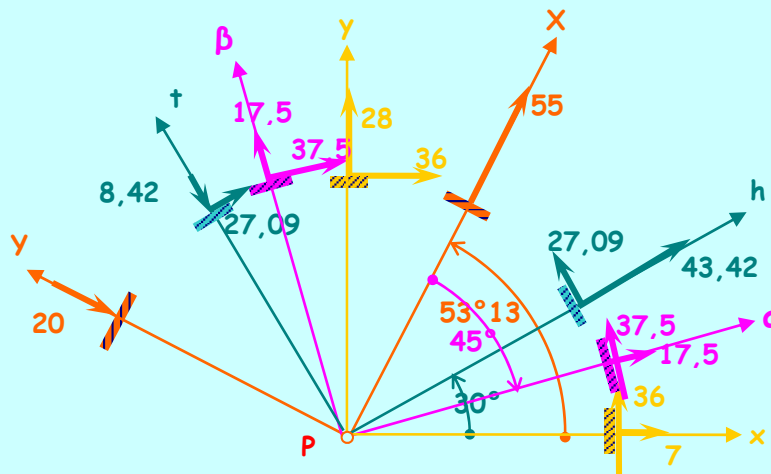
$$\tau_{\max} = \frac{55 + 20}{2} = 37,5 MPa$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{55 - 20}{2} = 17,5 MPa$$

$$[\sigma]_{\alpha\beta z}^P = \begin{bmatrix} 17,5 & -37,5 & 0 \\ -37,5 & 17,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$



Résumé des différents résultats obtenus.



Reprendre le problème avec le cercle de MOHR :

C'est une représentation plane du faisceau des contraintes. Sa construction nécessite la connaissance de 2 vecteurs contraintes s'exerçant sur 2 facettes orthogonales.

Dans notre cas les données du problème sont:

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Les facettes x et y sont orthogonales, et nous devons tout retrouver à l'aide du cercle à partir de la connaissance des trois valeurs :

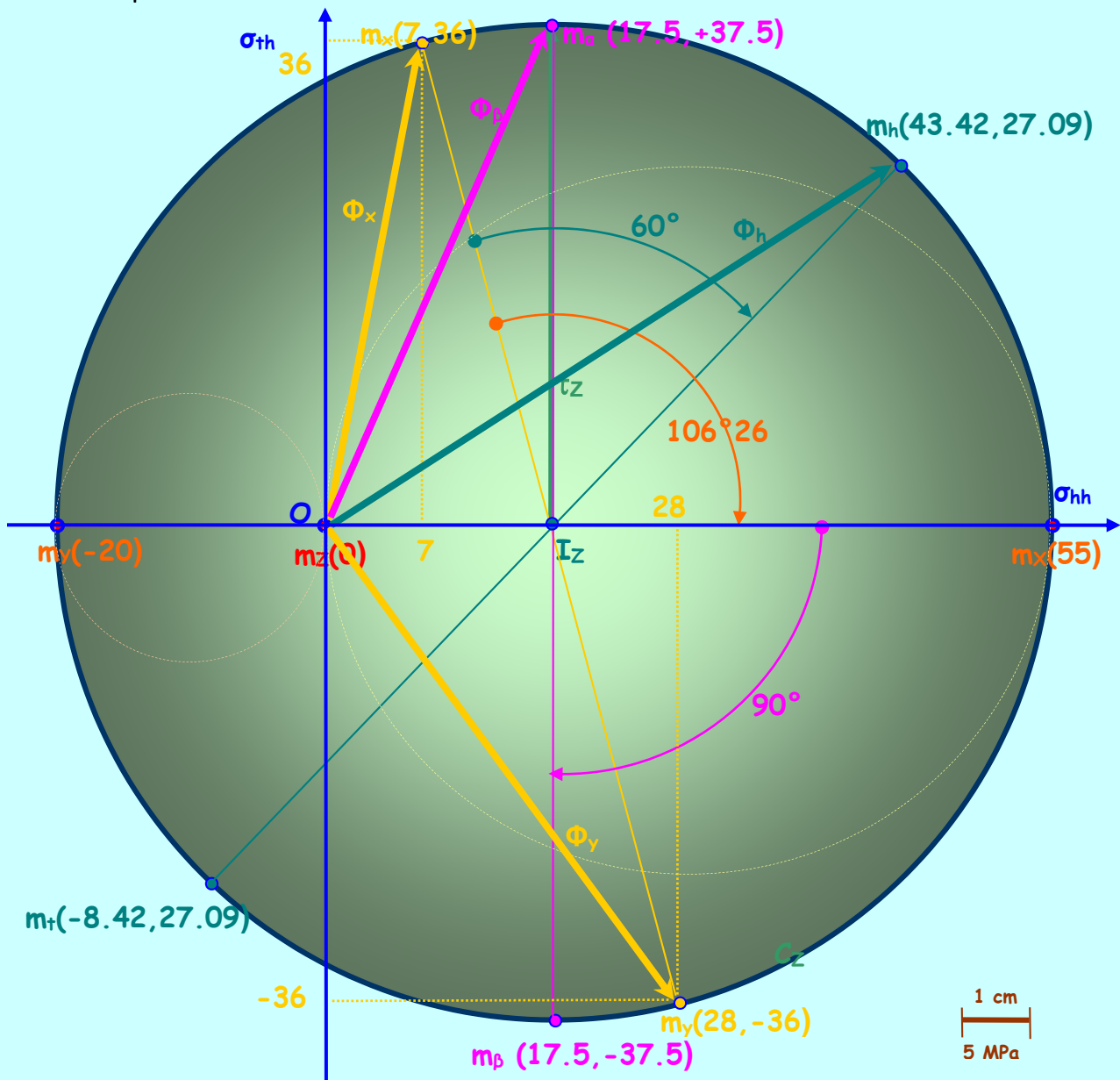
$$\sigma_{xx} = 7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 28 \text{ MPa}$$

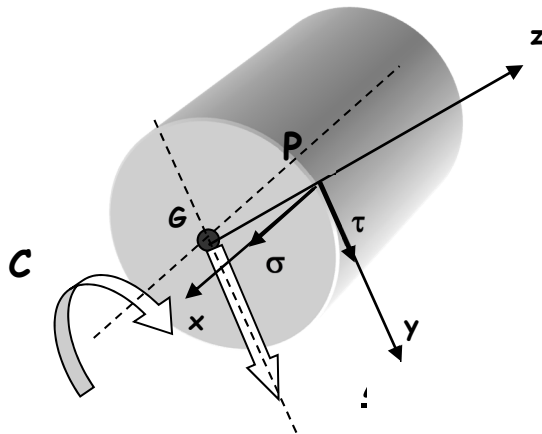
$$\sigma_{xy} = 36 \text{ MPa}$$

$$[\Phi_x]_{xyz} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix} MPa \quad [\Phi_y]_{xyz} = \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

- 1) Tracer les axes σ_{hh} et σ_{th} et adopter une échelle 1cm=10MPa
- 2) Positionner les points $m_x(7,36)$ et $m_y(28,-36)$.
- 3) Tracer le diamètre $m_x m_y$ du cercle. Son intersection avec l'axe des abscisses donne le centre du cercle I_z .
- 4) Tracer le cercle C_z de centre I_z et de rayon $I_z m_x$.
- 5) Les intersections du cercle C_z avec l'axe des abscisses donnent les points m_x et m_y qui « matérialisent » les facettes principales du plan des contraintes. $\overline{Om_x} = 55 = \sigma_x$
 $\overline{Om_y} = -20 = \sigma_y \quad 2\psi = -106^\circ 26'$
- 6) Toutes les autres réponses sont obtenues en positionnant les points sur le cercle qui « matérialisent » les facettes associées et en mesurant les valeurs correspondantes, compte tenu de l'échelle.



PROBLÈME N°3



Soit un arbre à section circulaire de diamètre 42mm. La section la plus sollicitée est soumise à un moment de flexion M de 800 Nm et un moment de torsion C de 600 Nm.

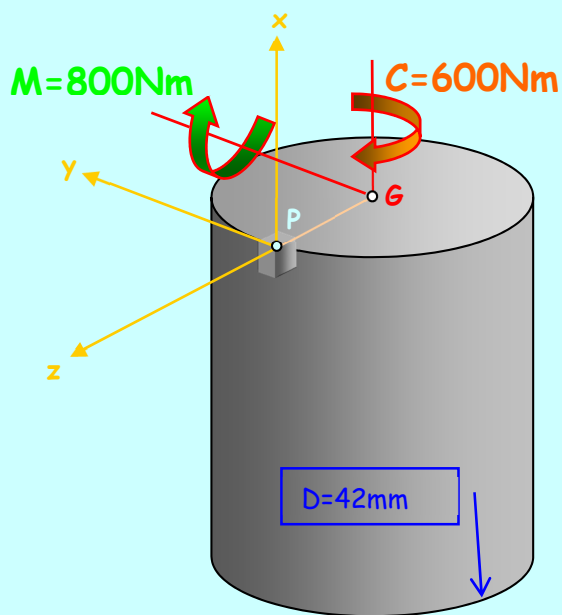
1°) Calculer la matrice des contraintes au point le plus sollicité ($\sigma > 0$) dans le repère xyz .

2°) Déterminer les éléments principaux des contraintes.

3°) Calculer le cisaillement maximum en module.

4°) Reprendre le problème avec le cercle de MOHR.

REPONSES N°3



Isolons le point P de la section G soumise à de la flexion-torsion, dans des axes xyz parallèles aux axes G,xyz de la théorie des poutres.

La facette z est perpendiculaire au bord libre xy .

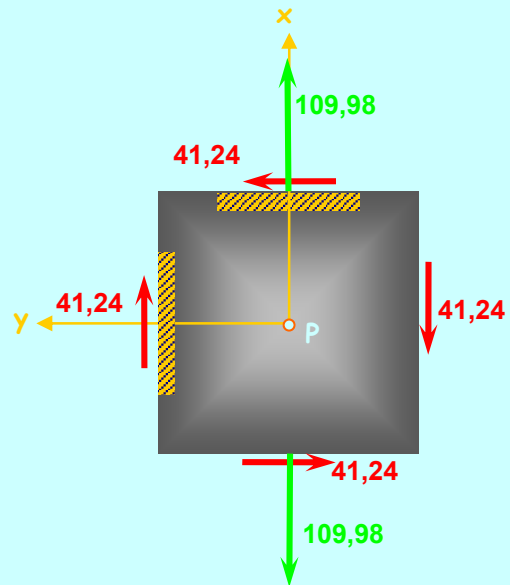
Compte tenu du module F213 :

Cours sur la flexion : $\sigma_{xx}^P = \frac{+M_y}{I_y} Z^P = \frac{800.10^3 \times 64 \times 42}{2 \times \pi \times 42^4} = 109,98 \text{ MPa}$

Cours sur la torsion : $\tau_{\max i}^P = \frac{C}{I_G} R = \frac{600.10^3 \times 32 \times 42}{2 \times \pi \times 42^4} = 41,24 \text{ MPa}$

La matrice des contraintes au point P est donc :

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 109,98 & 41,24 & 0 \\ 41,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



Eléments Principaux des contraintes :

La direction z est principale et $\sigma_z = 0$.

Etat plan de contraintes : Les 2 autres valeurs propres sont données par :

$$\sigma_{x'}^Y = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

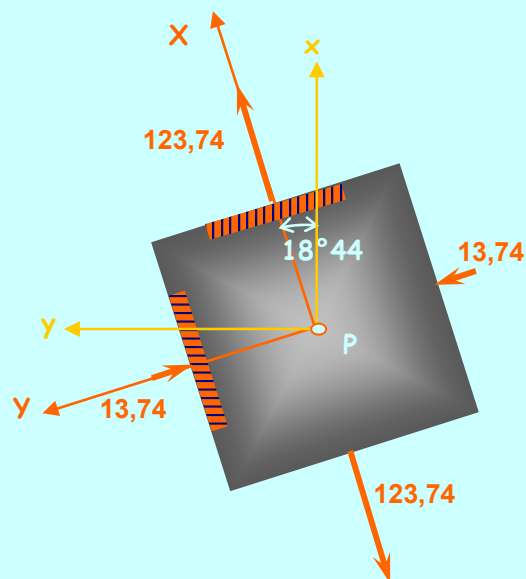
$$\sigma_x = 123,74 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -13,74 \text{ MPa}$$

La direction propre X est calculée par

$$\hat{\phi} = (\vec{x}, \vec{X})$$

$$\tan \phi = \frac{\sigma_X - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad \hat{\phi} = 18^\circ 44' = (\vec{x}, \vec{X})$$

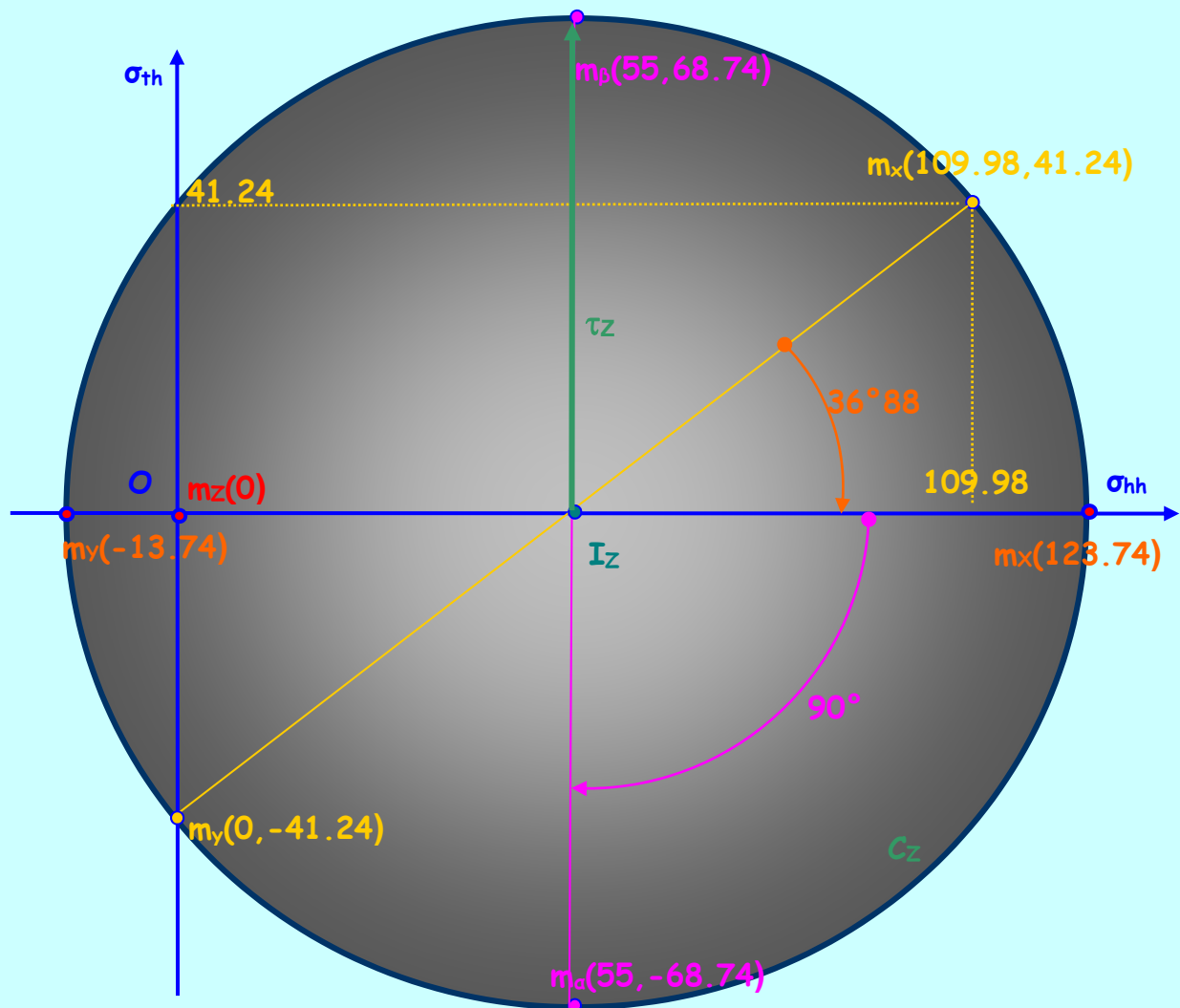
$$[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 123,74 & 0 & 0 \\ 0 & -13,74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



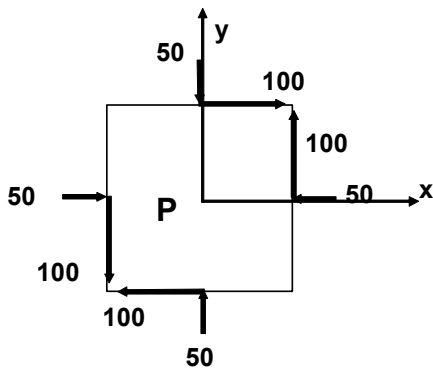
Le cisaillement maximum en module : $\sigma_{th}^{max i} = \tau_z = \left| \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right| = \frac{123,74 + 13,74}{2} = 68,74 MPa$

Cercle de MOHR :

La construction, et la méthodologie est identique au problème précédent.



PROBLÈME N°4



Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-contre. Les contraintes sont en MPa.

1°) Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère xyz.

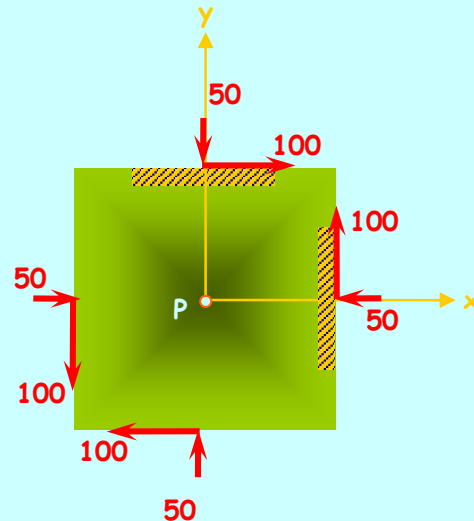
2°) Déterminer les éléments principaux des contraintes. Représenter les éléments principaux des contraintes dans le plan xy

3°) Tracer le tri-cercle de MOHR. En déduire la valeur du cisaillement maximum. Dans quel plan se trouvent les normales relatives aux plans de coupe soumis au cisaillement maximum ?

REPONSES N°4

Matrice des contraintes en P dans le repère xyz :

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 0 \\ 100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

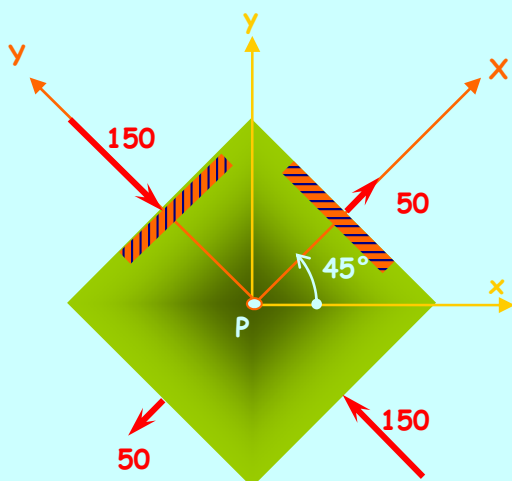


Eléments principaux des contraintes :

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -150 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 0$$

$$\hat{\phi} = 45^\circ = (\vec{x}, \vec{X})$$

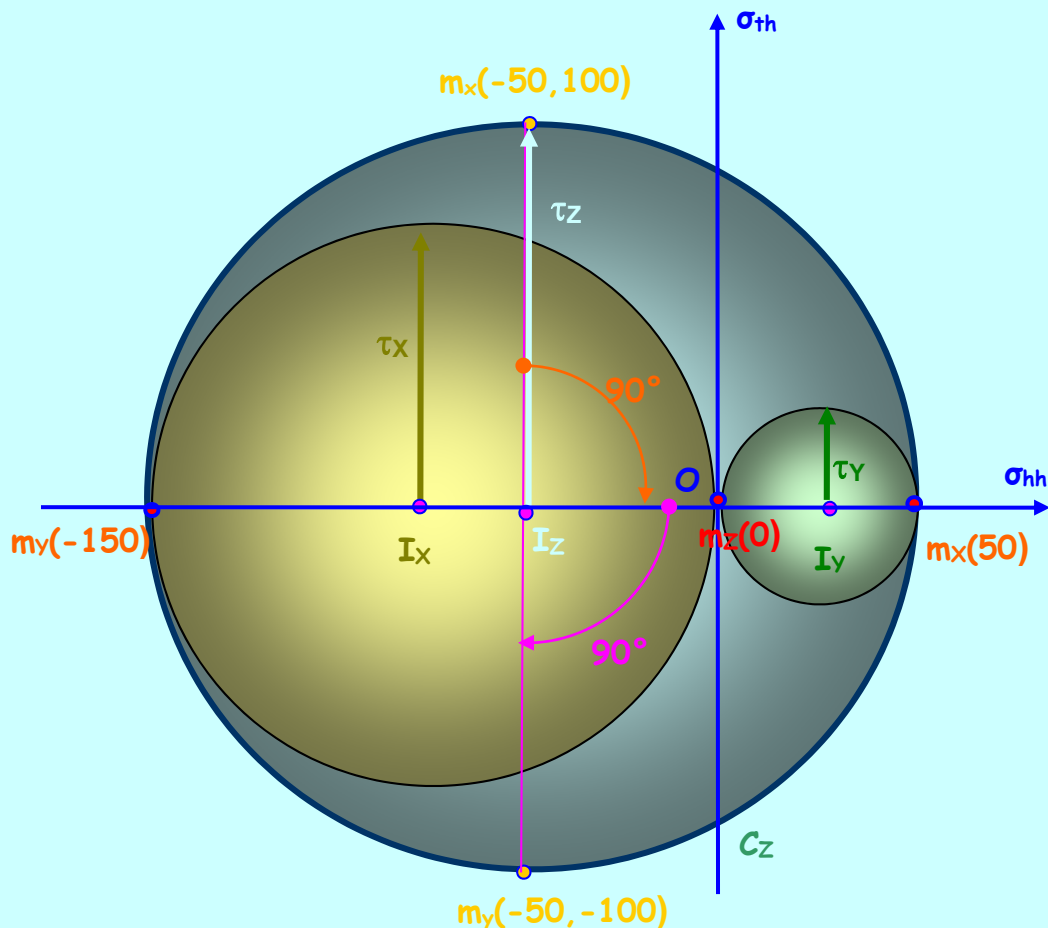
$$[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



Tricercle de MHOR :

Les trois cercles C_x , C_y , et C_z sont construits à partir des 3 valeurs propres de la matrice des contraintes. $\sigma_x=50\text{MPa}$ $\sigma_y=-150\text{MPa}$ $\sigma_z=0$

Positionner les points $m_x(50)$, $m_y(-150)$, et $m_z(0)$, et tracer les 3 cercles.



La valeur du cisaillement maximum est donnée par le rayon du plus grand des 3 cercles :

$$\tau_{\max} = \tau_z = \frac{50 + 150}{2} = 100 \text{ MPa}$$

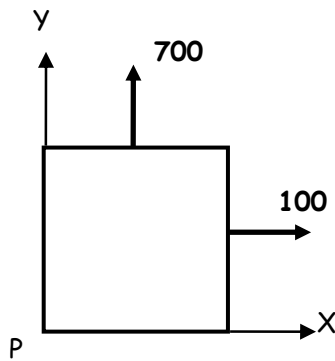
Les normales relatives aux plans de coupe soumis au cisaillement maximum sont les bissectrices du plan principal XY. $\hat{\nu} = \pm 45^\circ$. Ce sont donc les facettes x et y.

PROBLÈME N°5

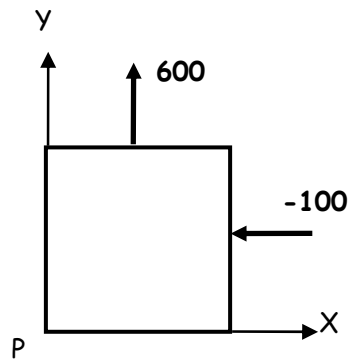
Considérons les trois états plans de contrainte ci-dessous. Les axes sont principaux. Les contraintes sont en MPa.

1°) Ecrire les matrices relatives à ces trois états de contrainte.

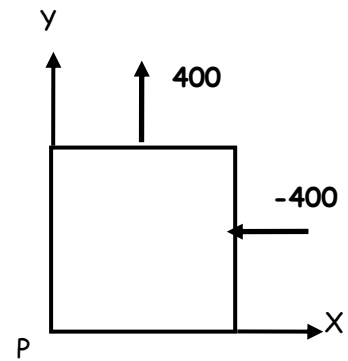
2°) D'après le critère de VON MISES, quel est l'état de contrainte le plus dangereux ?



Cas (a)

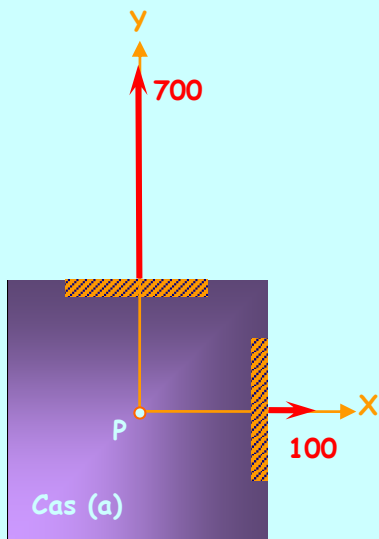


Cas (b)

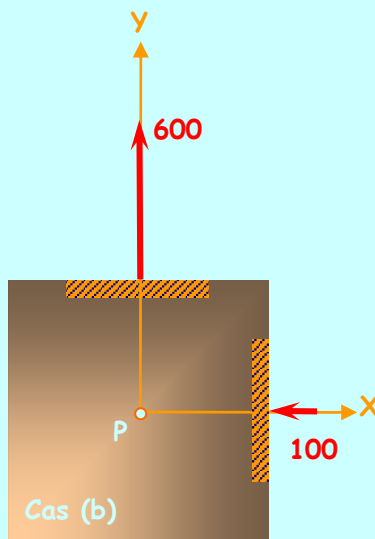


Cas (c)

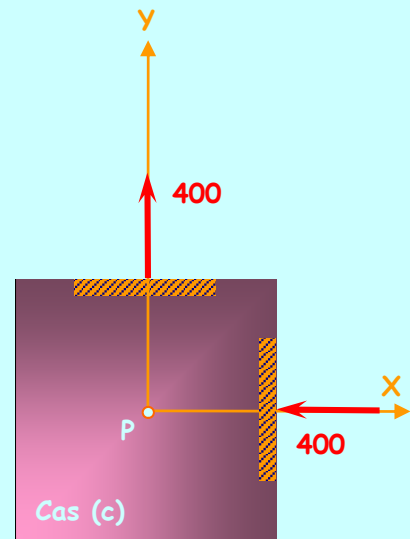
REPONSES N°5



Cas (a)



Cas (b)



Cas (c)

$$[\sigma]_{XYZ}^{P(a)} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} ; [\sigma]_{XYZ}^{P(b)} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} ; [\sigma]_{XYZ}^{P(c)} = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

La contrainte $\sigma_{\text{équi}}^{VM}$ en 2D compte tenu que dans les 3 cas $\sigma_z=0$ s'écrit : $\sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y}$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(a)} = \sqrt{100^2 + 700^2 - 100 \cdot 700} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM(b)} = \sqrt{100^2 + 600^2 + 100 \cdot 600} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM(c)} = \sqrt{400^2 + 400^2 + 400 \cdot 400}$$

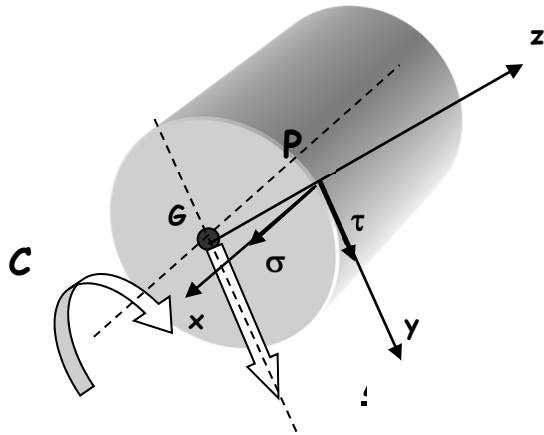
$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(a)} = 655,74 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(b)} = 655,74 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(c)} = 692,82 \text{ MPa}$$

L'état de contrainte le plus dangereux, au sens de VON MISES, est donc le cas (c) .

PROBLÈME N°6

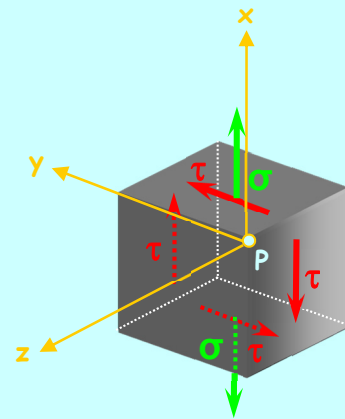
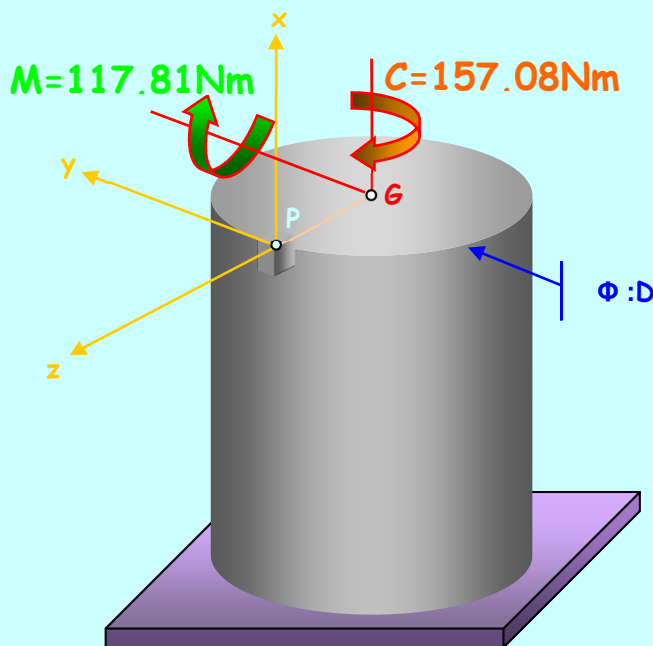


Un arbre de diamètre D est soumis à un moment de flexion M de 117.81 Nm et à un moment de torsion C de 157.08 Nm. Les limites élastiques en traction et compression du matériau sont identiques et valent 750 MPa.

1°) Déterminer les expressions de la contrainte maximum de flexion et de la contrainte maximum de torsion en fonction de D^3 .

2°) En appliquant le critère de VON MISES, calculer (en mm) la valeur du diamètre D pour que l'on ait un coefficient de sécurité de 3.

REPONSES N°6



La formulation de départ est identique à celle du Problème 3 :

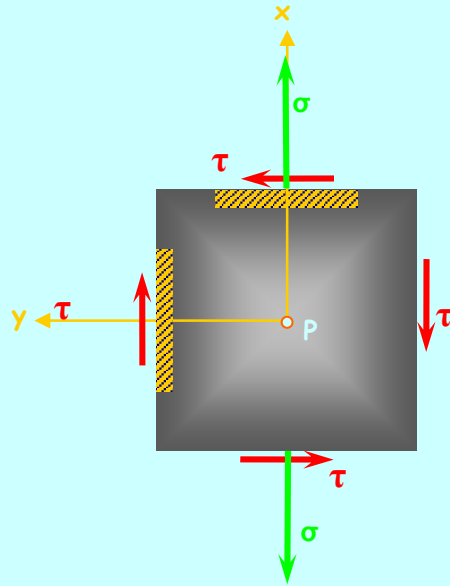
Compte tenu du module F213 :

$$\text{Cours sur la flexion : } \sigma_{xx}^P = \frac{+M_Y}{I_Y} Z^P = \frac{117,81 \cdot 10^3 \times 64 \times D}{2 \times \pi \times D^4} = \frac{1,2}{D^3} 10^6$$

$$\text{Cours sur la torsion : } \tau_{\max i}^P = \frac{C}{I_G} R = \frac{157,08 \cdot 10^3 \times 32 \times D}{2 \times \pi \times D^4} = \frac{0,8}{D^3} 10^6$$

La matrice des contraintes au point P est donc :

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,2}{D^3} 10^6 & \frac{0,8}{D^3} 10^6 & 0 \\ \frac{0,8}{D^3} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



La contrainte équivalente de VON MISES pour une poutre :

$$\sigma_{\text{équ}}^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Et le coefficient de sécurité :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équ}}^{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

$$3 = \frac{750}{\sqrt{\left(\frac{1,2}{D^3} 10^6\right)^2 + 3\left(\frac{0,8}{D^3} 10^6\right)^2}} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{3}{750} \sqrt{(1,2 \cdot 10^6)^2 + 3(0,8 \cdot 10^6)^2}} \quad D = 20 \text{ mm}$$

PROBLÈME N°7

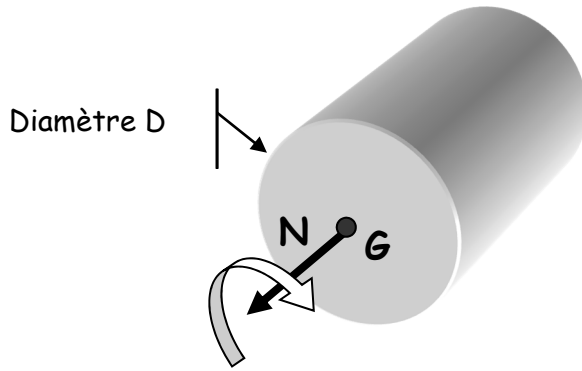


Figure 1

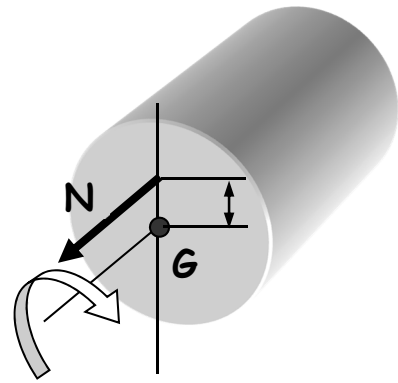


Figure 2

Un arbre de diamètre $D = 20 \text{ mm}$ est soumis suivant son axe à un effort de traction de 62.83 kN et à un moment de torsion de 157.08 mN (figure 1). Les limites élastiques en traction et compression du matériau sont identiques et valent 400 MPa .

1°) Calculer (en MPa) la contrainte de traction et la contrainte maximum de torsion.

2°) En appliquant le critère de VON MISES, calculer le coefficient de sécurité.

3°) L'effort de traction est excentré de x par rapport à l'axe du cylindre (figure 2). Le cylindre est donc soumis à de la torsion, de la traction **et de la flexion**.

Calculer, en appliquant toujours le critère de VON MISES la valeur limite de la contrainte de flexion au-delà de laquelle le matériau devient plastique.

En déduire :

- La valeur du moment de flexion (en Nm).
- La valeur de x (en mm) x (en mm).

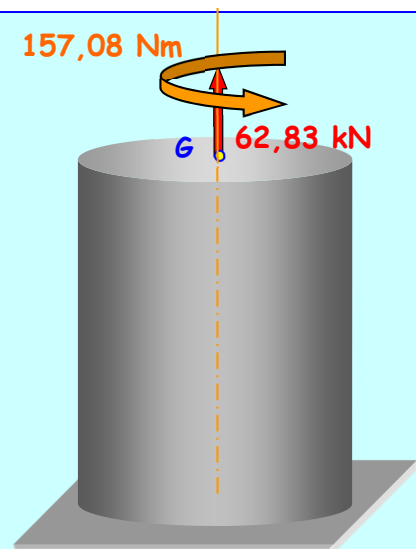
REPONSES N°7

La contrainte de traction due à l'effort normal :

$$\sigma_{\max i} = \frac{N_x}{A} = \frac{62,83 \cdot 10^3 \times 4}{\pi \times 20^2} = 200 \text{ MPa}$$

La contrainte de torsion due au couple :

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{157,08 \cdot 10^3 \times 32 \times 20}{2 \times \pi \times 20^4} = 100 \text{ MPa}$$



La contrainte équivalente de VON MISES pour une poutre :

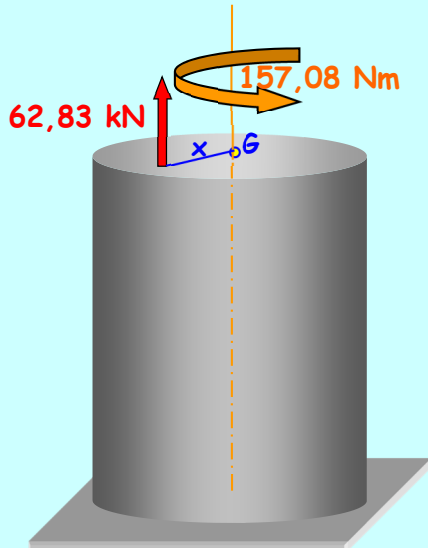
$$\sigma_{\text{équ}}^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Et le coefficient de sécurité :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équ}}^{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

D'où : $\alpha = \frac{400}{\sqrt{(200)^2 + 3(100)^2}} \Rightarrow \alpha = 1,5$

Dans cette deuxième partie l'effort de traction est excentré de x par rapport à l'axe du cylindre. La section G est donc soumise à de la traction, de la flexion et de la torsion.



La contrainte normale est donc la superposition de la contrainte de traction et de celle de flexion

$$\sigma = \sigma_{\text{flexion}} + \sigma_{\text{traction}}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équ}}^{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

En ce plaçant à la limite le coefficient de sécurité vaut 1.

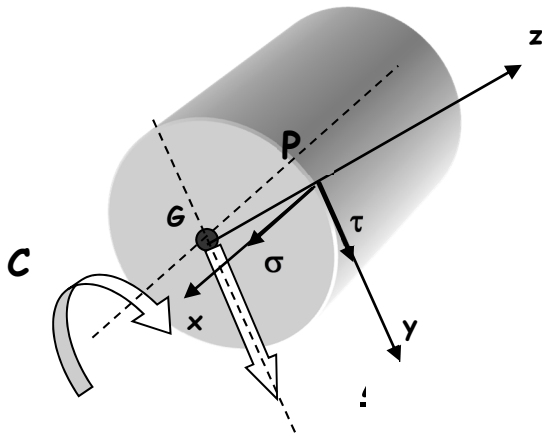
$$1 = \frac{400}{\sqrt{(\sigma_{\text{flexion}} + 200)^2 + 3(100)^2}} ; \quad \sigma_{\text{flexion}} = 160,55 \text{ MPa}$$

Nous pouvons en déduire le moment de flexion :

$$\sigma_{\text{flexion}}^P = \frac{M_{\text{flexion}}}{I_y} Z^P \Rightarrow M_{\text{flexion}} = \frac{160,55 \times \pi \times 20^3}{32} = 126100 \text{ Nmm}$$

$$M_{\text{flexion}} = N_x \times x \Rightarrow x = \frac{126100}{62830} = 2 \text{ mm}$$

PROBLÈME N°8



Une barre à section circulaire de rayon r est soumise simultanément à un couple de torsion C et à un moment de flexion M .

1°) Calculer les contraintes de flexion σ et de torsion τ au point P en fonction de M , C et r .

2°) Donner la relation qui lie M et C lorsque le matériau travaille à la limite en appliquant le critère de VON MISES. Mettre la relation sous

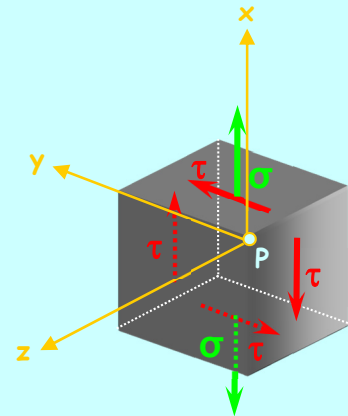
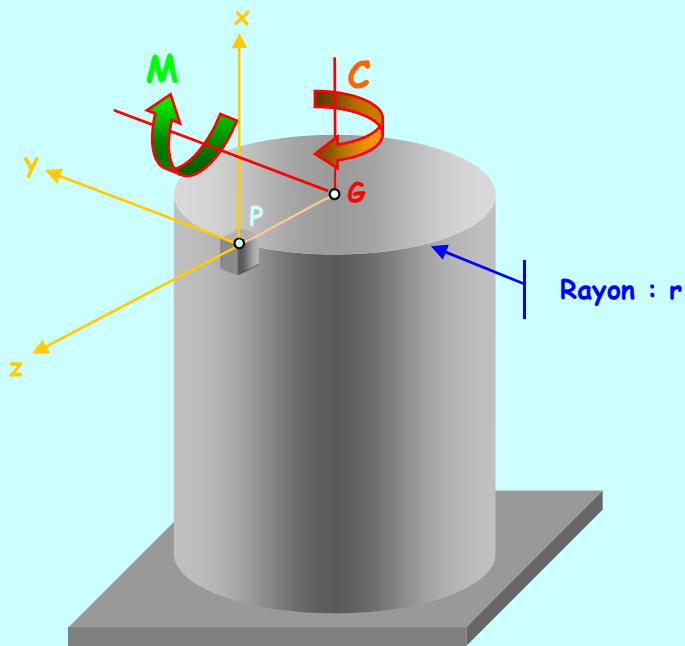
la forme $\frac{M^2}{a^2} + \frac{C^2}{b^2} = 1$ en précisant les

expressions de a et b en fonction de r et σ_e .

3°) Représenter la relation précédente en fonction de R dans des axes M, C .

4°) Calculer les valeurs limites de M et C (en Nm) pour les deux critères dans les conditions suivantes : $M = C$, $r = 10 \text{ mm}$, $\sigma_e = 500 \text{ MPa}$

REPONSES N°8



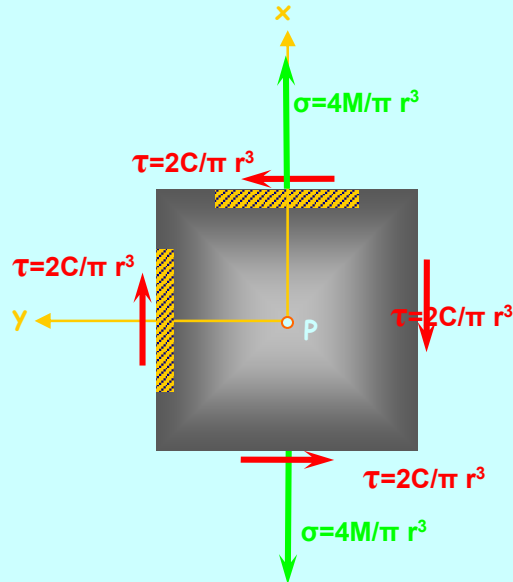
Compte tenu du module F213 :

Cours sur la flexion : $\sigma_{xx}^P = \frac{+M_y}{I_y} Z^P = \frac{M \times 4 \times r}{\pi \times r^4} = \frac{4M}{\pi r^3}$

Cours sur la torsion : $\tau_{\max}^P = \frac{C}{I_G} R = \frac{C \times 2 \times r}{\pi \times r^4} = \frac{2C}{\pi r^3}$

$$\sigma = \frac{4M}{\pi r^3}$$

$$\tau = \frac{2C}{\pi r^3}$$



Si le matériau travaille à la limite, le coefficient de sécurité vaut 1. Appliquons le critère de VON MISES dans le cas des poutres :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équi}}^{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} ; \quad 1 = \frac{\sigma_e}{\sqrt{(\sigma)^2 + 3(\tau)^2}} ; \quad 1 = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\left(\frac{4M}{\pi r^3}\right)^2 + 3\left(\frac{2C}{\pi r^3}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{4M}{\pi r^3}\right)^2 + 3\left(\frac{2C}{\pi r^3}\right)^2 = \sigma_e^2 \Rightarrow \frac{M^2}{\left(\frac{\pi r^3 \sigma_e}{4}\right)^2} + \frac{C^2}{\left(\frac{\pi r^3 \sigma_e}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1 ;$$

Nous en tirons les expressions de a et b en fonction de r et σ_e : $\frac{M^2}{(a)^2} + \frac{C^2}{(b)^2} = 1$

$$a = \frac{\pi r^3 \sigma_e}{4} ; \quad b = \frac{\pi r^3 \sigma_e}{2\sqrt{3}}$$

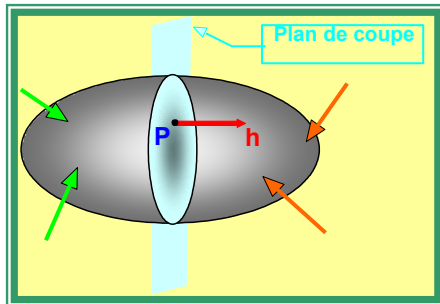
C'est l'équation d'une ellipse de grand et petit axe a et b.

CONTRAINTES

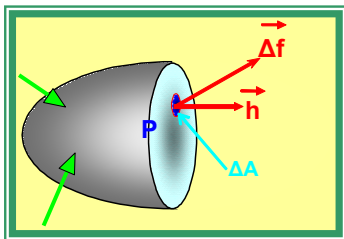
1. Vecteur contrainte en un point P :

1.1. Définition :

Considérons un solide en équilibre sous l'action d'un torseur extérieur et un point P à l'intérieur du solide.

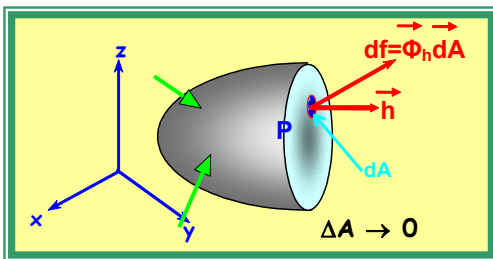


Effectuons une coupe suivant un plan quelconque passant par le point P en dehors des points d'application du chargement et isolons l'une des deux parties résultant de la coupe. Soit $\vec{h}$ la normale au plan de coupe (la normale étant dirigée vers l'**extérieur** de la partie isolée).



La partie isolée est en équilibre sous l'action d'une partie du torseur extérieur et des forces intérieures $\Delta \vec{f}$ s'exerçant sur des éléments de surface d'aires ΔA entourant chaque point P de la surface sectionnée. Ces forces élastiques inconnues sont les forces de cohésion qui remplacent l'action de la partie retirée.

Par définition, le vecteur contrainte au point P relatif au plan de coupe dont la normale **extérieure** (au solide) est $\vec{h}$, est défini par :



$$\vec{\Phi}_h(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} = \frac{d\vec{f}}{dA}$$

Unité de mesure :

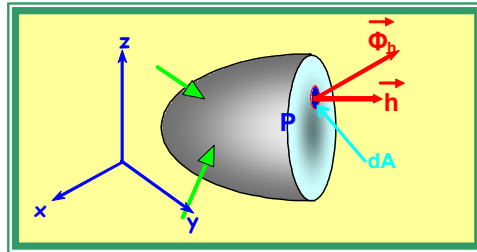
La norme du vecteur contrainte étant homogène à une pression (ou une tension), l'unité SI de contrainte est le Pascal ($1\text{Pa} = 1\text{N} / \text{m}^2$). Le m^2 étant une unité d'aire beaucoup trop grande, le Pascal est une unité beaucoup trop petite. On utilise généralement le MégaPascal ($1\text{MPa} = 10^6 \text{Pa}$) ou le GigaPascal ($1\text{GPa} = 10^9 \text{Pa}$).

$$\begin{aligned} 1 \text{ MPa} &= 10^6 \text{ Pa} = 1\text{N} / \text{mm}^2 \\ 1 \text{ GPa} &= 10^9 \text{ Pa} = 1\text{kN} / \text{mm}^2 \end{aligned}$$

1.2. Composantes du vecteur contrainte :

On note :

✚ Φ_{ih} les composantes de $\vec{\Phi}_h$ si la normale $\vec{h}$ est quelconque par rapport aux axes du repère.

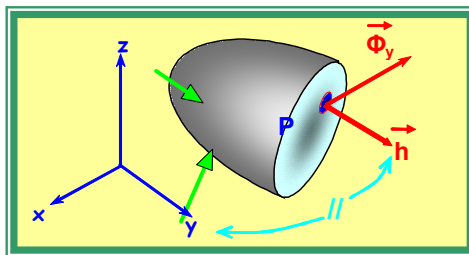
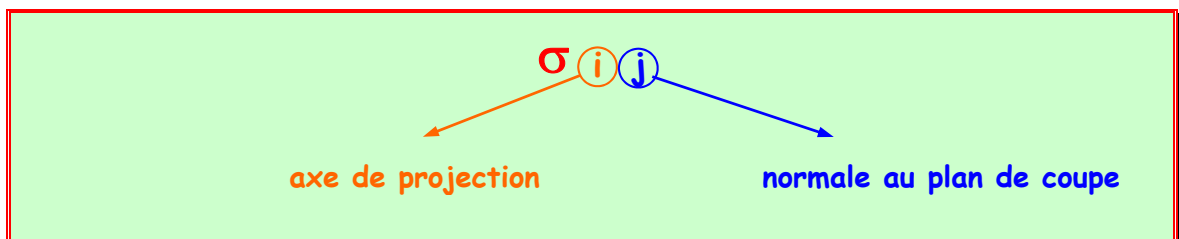


$$\vec{\Phi}_h = \begin{pmatrix} \Phi_{xh} \\ \Phi_{yh} \\ \Phi_{zh} \end{pmatrix}$$

✚ σ_{ij} les composantes de $\vec{\Phi}_h$:

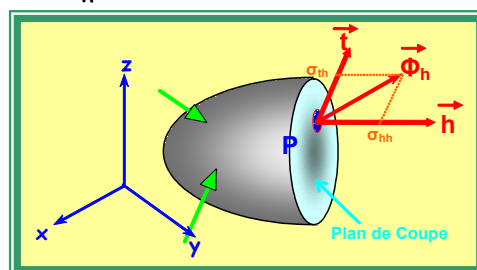
1°) Si la normale $\vec{h}$ est en coïncidence avec l'un des axes du repère xyz.

La notation est alors la suivante pour les composantes du vecteur contrainte $\vec{\Phi}_h$.



$$\vec{\Phi}_y / xyz = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zy} \end{pmatrix}$$

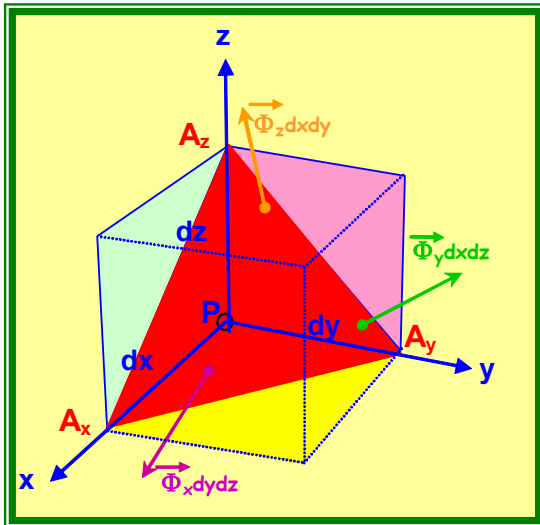
2°) Si on utilise comme repère le repère mobile qui contient la normale $\vec{h}$ au plan de coupe (le deuxième axe t du repère appartient au plan formé par $\vec{h}$ et $\vec{\Phi}_h$).



$$\vec{\Phi}_h / ht = \begin{pmatrix} \sigma_{hh} \\ \sigma_{th} \end{pmatrix}$$

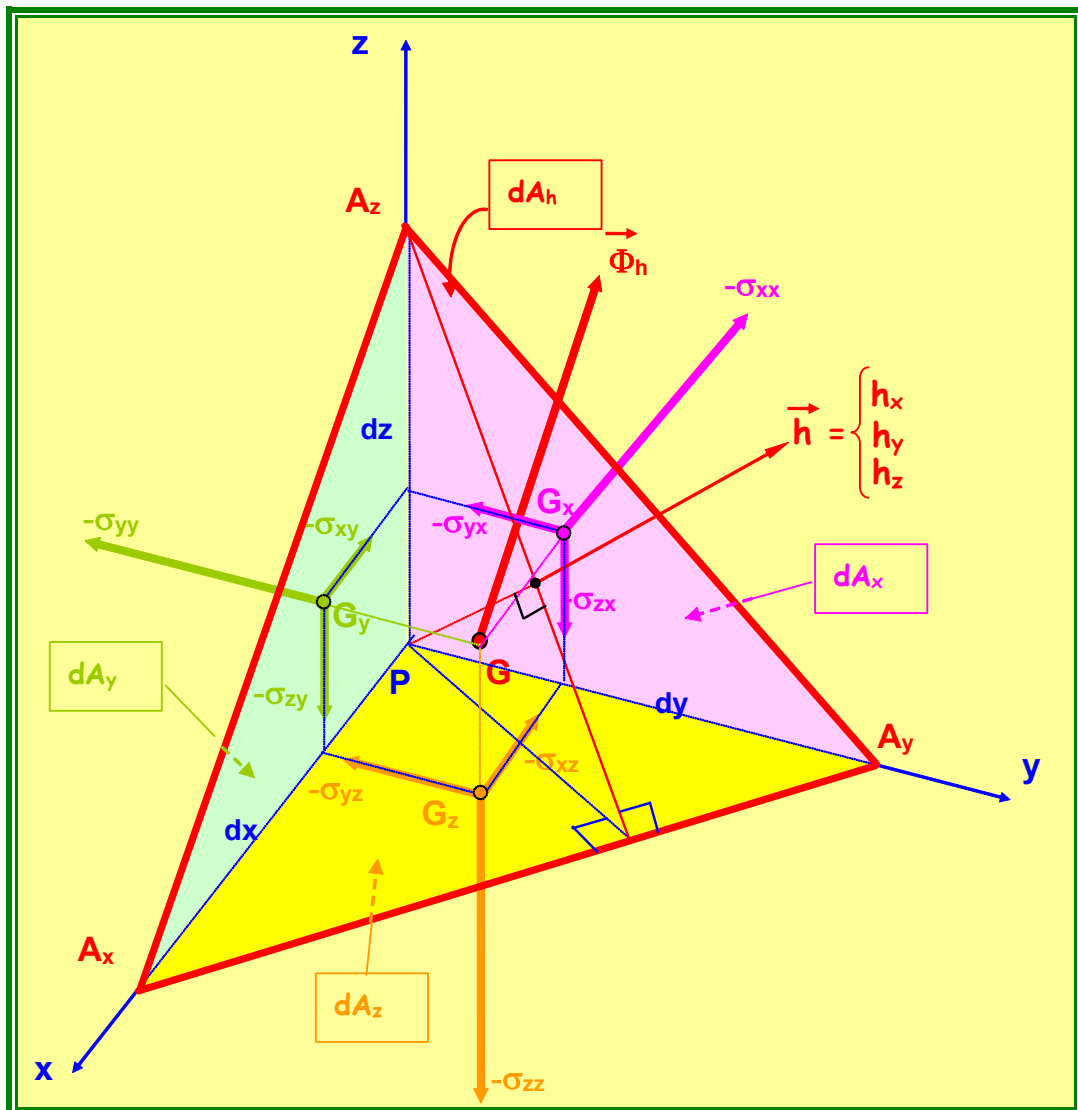
2. État de contraintes en un point. Matrice des contraintes :

2.1. Définition :



Considérons un parallélépipède infiniment petit de côté dx , dy , dz isolé autour d'un point. Il est en équilibre élastique. Coupons le parallélépipède par un plan passant par ses sommets A_x , A_y , et A_z . Le tétraèdre infiniment petit ainsi obtenu est encore en équilibre.

La démonstration de la nature matricielle des contraintes a été faite par **CAUCHY**¹ en mettant en équilibre le tétraèdre infiniment petit.



On néglige le poids ou les forces d'inertie qui s'exercent sur le tétraèdre. En effet le tétraèdre étant infiniment petit elles sont d'ordre supérieur ($dx dy dz$) par rapport aux forces qui s'exercent sur les faces ($dx dy$).

La résultante des forces s'exerçant sur le tétraèdre est nulle.

$$\vec{R} = 0$$

La relation s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xh} \\ \Phi_{yh} \\ \Phi_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

$$[\Phi_h] = [\sigma][h]$$

Le vecteur h est unitaire (sa norme vaut 1).

La matrice $[\sigma]$ est la matrice des contraintes au point P. Le vecteur $\vec{\Phi}_h$ est le vecteur contrainte s'exerçant sur un plan de coupe passant par P et de normale sortante $\vec{h}$ (dirigée vers l'extérieur de la matière).

Le moment résultant (par rapport à G) des forces s'exerçant sur le tétraèdre est nul.

$$\vec{M}_G = 0$$

L'équation d'équilibre du moment donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \end{aligned}$$

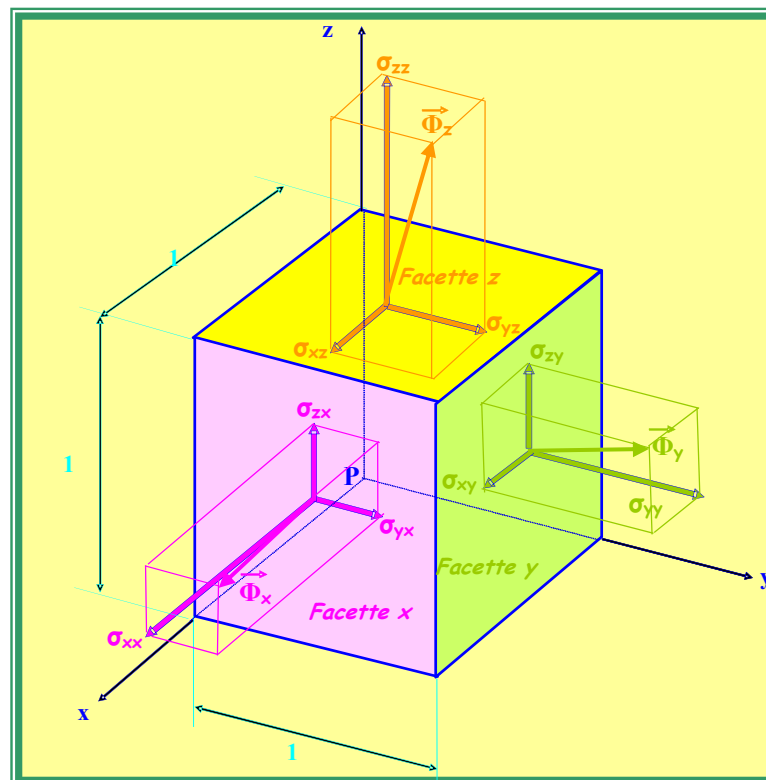
Ces trois égalités constituent le théorème de réciprocité des contraintes tangentielles.

Conséquence : la matrice des contraintes $[\sigma]$ est symétrique.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xh} \\ \Phi_{yh} \\ \Phi_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

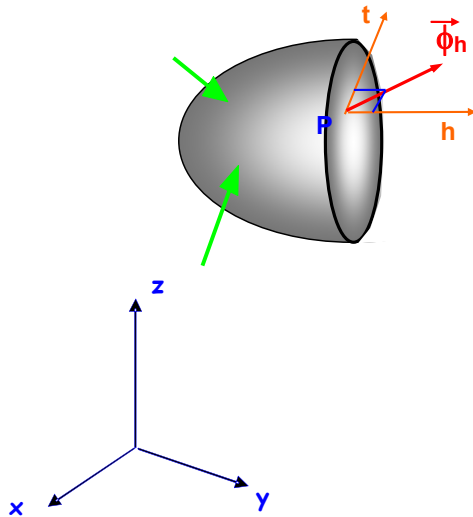
Symétrique

$${}^t[\sigma] = [\sigma]$$

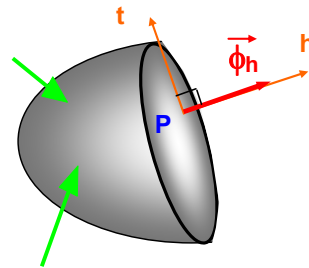


2.2. Eléments Principaux des σ .

On recherche s'il existe des plans de coupe particuliers passant par P tels que la normale $\vec{h}$ au plan de coupe et le vecteur contrainte $\vec{\Phi}_h$ soient colinéaires.



cas général
 $\vec{\Phi}_h$ et $\vec{h}$ non colinéaires



cas particuliers
 $\vec{\Phi}_h$ et $\vec{h}$ colinéaires $\Rightarrow \vec{\Phi}_h = \lambda \vec{h}$

Le cas particulier où $\vec{\Phi}_h$ et $\vec{h}$ sont colinéaires revient à chercher en algèbre linéaire les vecteurs propres $\vec{h}$ de l'espace, λ étant les valeurs propres de $[\sigma]$.

$$\vec{\Phi}_h = \lambda \vec{h}$$

$$[\Phi_h] = \lambda[h] = [\sigma][h]$$

$$[[\sigma] - \lambda[\mathbf{I}]]h = [0]$$

Les vecteurs propres $\vec{h}$ de l'espace devant être non nuls, le système d'équations admet des solutions différentes de 0 que si son déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le développement du déterminant caractéristique $[[\sigma] - \lambda[\mathbf{I}]] = 0$ conduit à l'équation caractéristique du 3^{ème} degré en λ :

$$\lambda^3 - \mathbf{I}_{1\sigma} \lambda^2 + \mathbf{I}_{2\sigma} \lambda - \mathbf{I}_{3\sigma} = 0$$

Les termes $\mathbf{I}_{1\sigma}$, $\mathbf{I}_{2\sigma}$, $\mathbf{I}_{3\sigma}$ sont des invariants de la matrice des contraintes $[\sigma]$ (la recherche des vecteurs propres ne dépend pas de la base initiale xyz).

► $\mathbf{I}_{1\sigma} = \text{tr}[\sigma]$ est l'invariant linéaire de $[\sigma]$.

► $\mathbf{I}_{2\sigma} = \text{tr}[\text{co}\sigma]$ est l'invariant quadratique de $[\sigma]$.

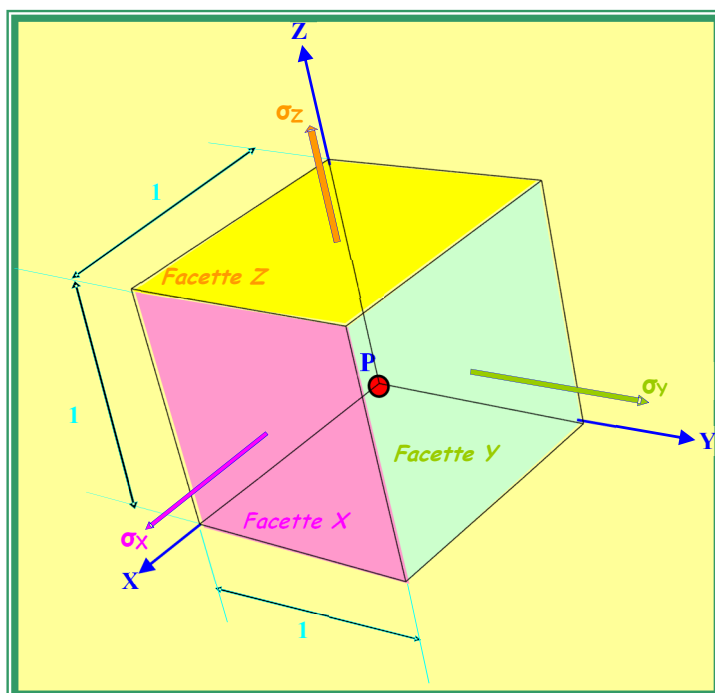
► $\mathbf{I}_{3\sigma} = |[\sigma]|$ est l'invariant cubique de $[\sigma]$.

$\text{tr}[\sigma]$ est la trace de la matrice $[\sigma]$. La trace d'une matrice est égale à la somme des termes situés sur sa diagonale principale.

$$\text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

La matrice $[\sigma]$ étant symétrique, les 3 valeurs propres sont réelles et les 3 vecteurs propres sont orthogonaux et constituent une base dans laquelle la matrice $[\sigma]$ sera diagonale.

On note σ_x , σ_y et σ_z les 3 valeurs propres de $[\sigma]$. Ce sont les contraintes principales. On note **X**, **Y** et **Z** les 3 axes construits sur les 3 vecteurs propres de l'espace. Ce sont les axes principaux des contraintes.

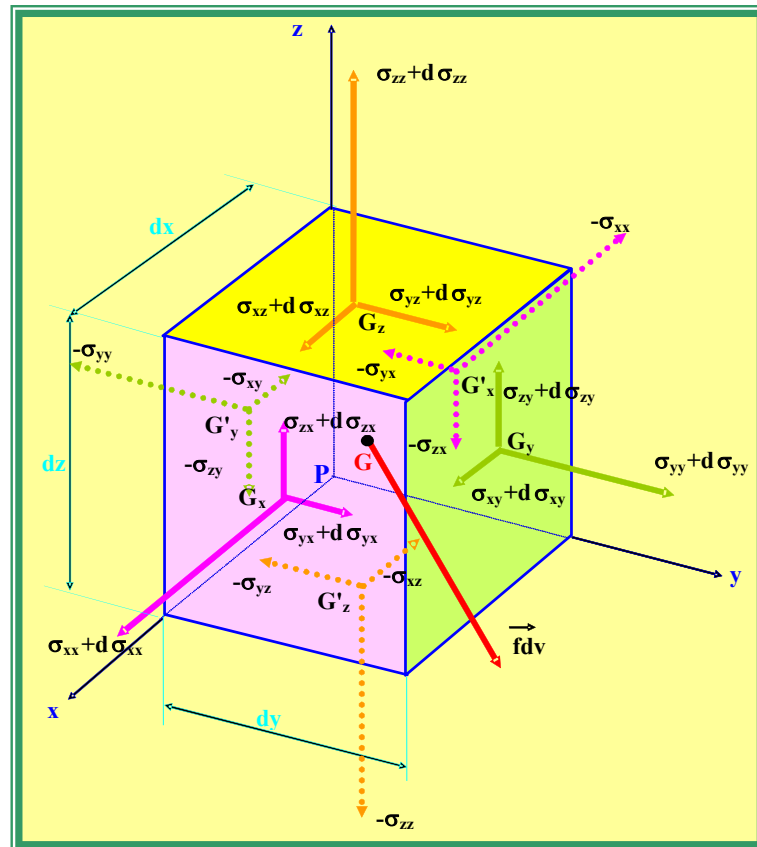


$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2.3. Equations d'équilibre local :

Lorsqu'on se déplace de dx , dy , dz suivant les axes x , y et z à partir d'un point P appartenant à un solide, les contraintes varient. De plus le solide peut être soumis à des forces d'inertie variables. Désignons par $\vec{f}$ la force par unité de volume (poids ou forces d'inertie).

Un parallélépipède isolé autour du point P doit être en équilibre à l'intérieur du corps.



Les équations d'équilibre de la somme des forces s'exerçant sur le parallélépipède conduisent à :

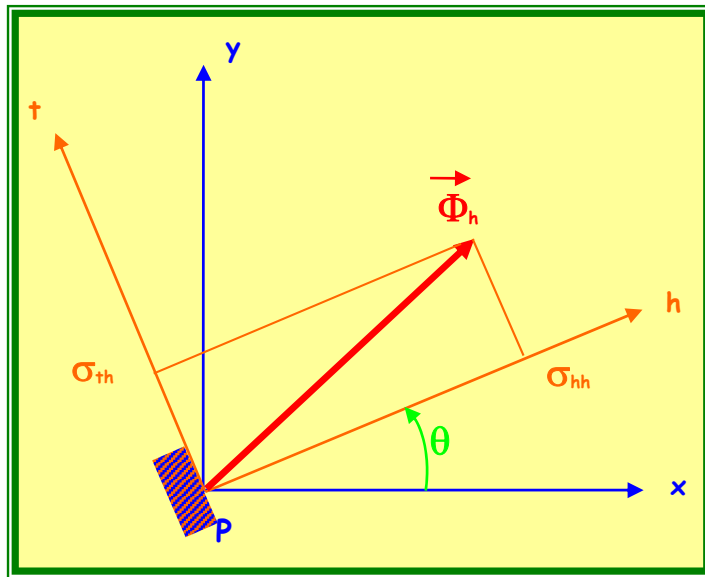
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

Ce sont les équations d'équilibre local.

2.4. Expression des composantes de Φ_h sur un repère ht lié à l'élément d'aire :



$$\begin{aligned}\sigma_{hh} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{th} &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

Ce sont des formules identiques à celles qui existent pour les inerties d'une surface plane.

2.5. Éléments principaux des contraintes :

a) A la surface d'un corps quelconque, dans une membrane ou dans une plaque :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

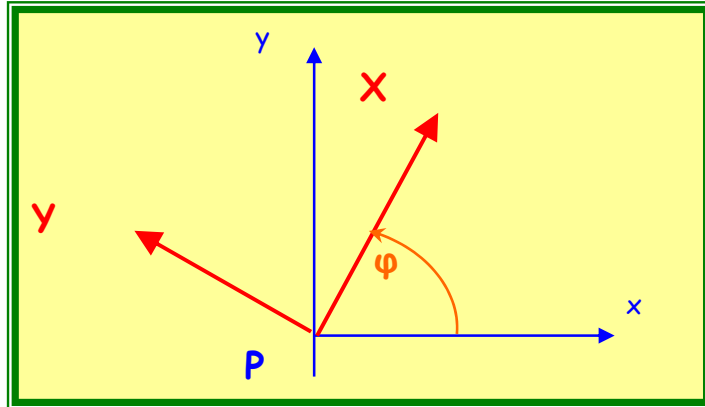
Contrainte principale

$z \equiv Z$

Etant donnée la forme plane de la matrice on peut dire que 0 est une contrainte principale et que l'axe z est un ax principal ($z \equiv Z$).

Le calcul se limite donc à la recherche des deux contraintes principales (σ_x et σ_y) et des deux axes principaux (X et Y) dans le plan xy.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}$$



$$\varphi = (x, X) \quad \text{tg} \varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$$

Le troisième vecteur propre $\vec{Y}$ est perpendiculaire à $\vec{X}$ (de $+\frac{\pi}{2}$) dans le plan des contraintes.

b) Dans une poutre :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_z &= 0 \\ \text{tg} \varphi &= \frac{\sigma_x - \sigma}{\tau} \quad \varphi = (x, X)\end{aligned}$$

Critères de Résistance:

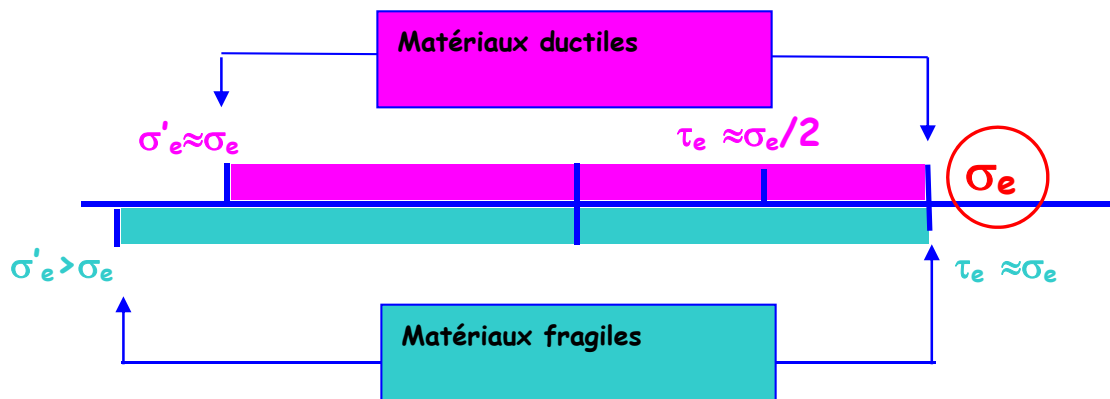
1 Critères de dépassement de la limite élastique pour des matériaux ductiles :

1.1 Limites élastiques d'un matériau homogène et isotrope :

Traction	Compression	Torsion
σ_e	σ'_e	τ_e

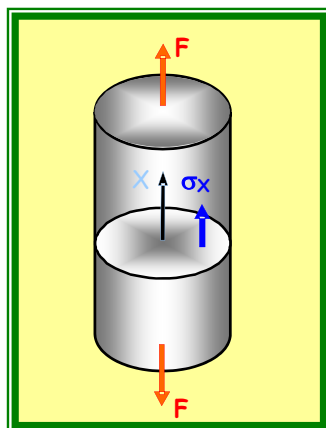
Seule la limite élastique en traction est connue et imposée par la norme.

Les limites élastiques sont considérées comme des nombres positifs.
On classe les matériaux en deux catégories : **les ductiles et les fragiles**.



1.2 Critères élémentaires (pour un matériau ductile) :

a) Traction :

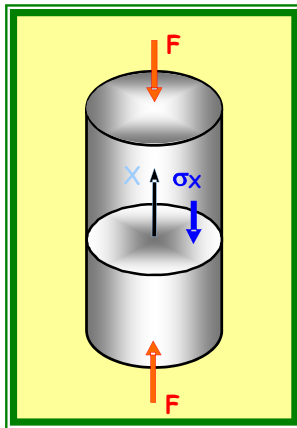


$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \sigma_x = \frac{F}{A}$$

Le coefficient de sécurité α se calcule par : $\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_x}$

b) Compression :

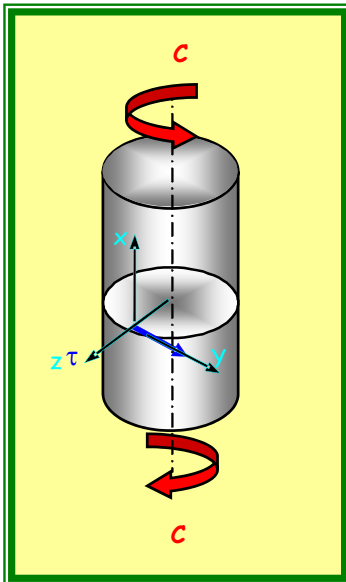


$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } \sigma_x = -\frac{F}{A}$$

Le coefficient de sécurité α se calcule par : $\alpha = \frac{\sigma_e}{|\sigma_x|}$

c) Torsion :



$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte maximum de torsion se calcule par :

$$\tau = \frac{C}{I_p} R$$

On montre que les valeurs propres en torsion sont opposées :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x = +\tau & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y = -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient de sécurité α se calcule par (puisque l'on a supposé que le matériau est ductile et que par conséquent $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$) :

$$\alpha = \frac{\tau_e = \sigma_e/2}{\tau = (\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

1.3 Critères de VON MISES² et de TRESCA³ :

Ce sont deux critères de dépassement de l'état élastique du corps, **pour des matériaux ductiles**. Ils sont basés tous les deux sur le comportement en traction du matériau. Ils s'appliquent à des états de contraintes quelconques (3D ou 2D). Ils sont très voisins l'un de l'autre (l'écart maximum entre les deux critères est d'environ 10%). Le critère le plus récent et le plus utilisé est celui de VON MISES.

On recherche une contrainte dite « équivalente » au sens de la traction telle que le coefficient de sécurité puisse se mettre sous la forme :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{equ}}$$

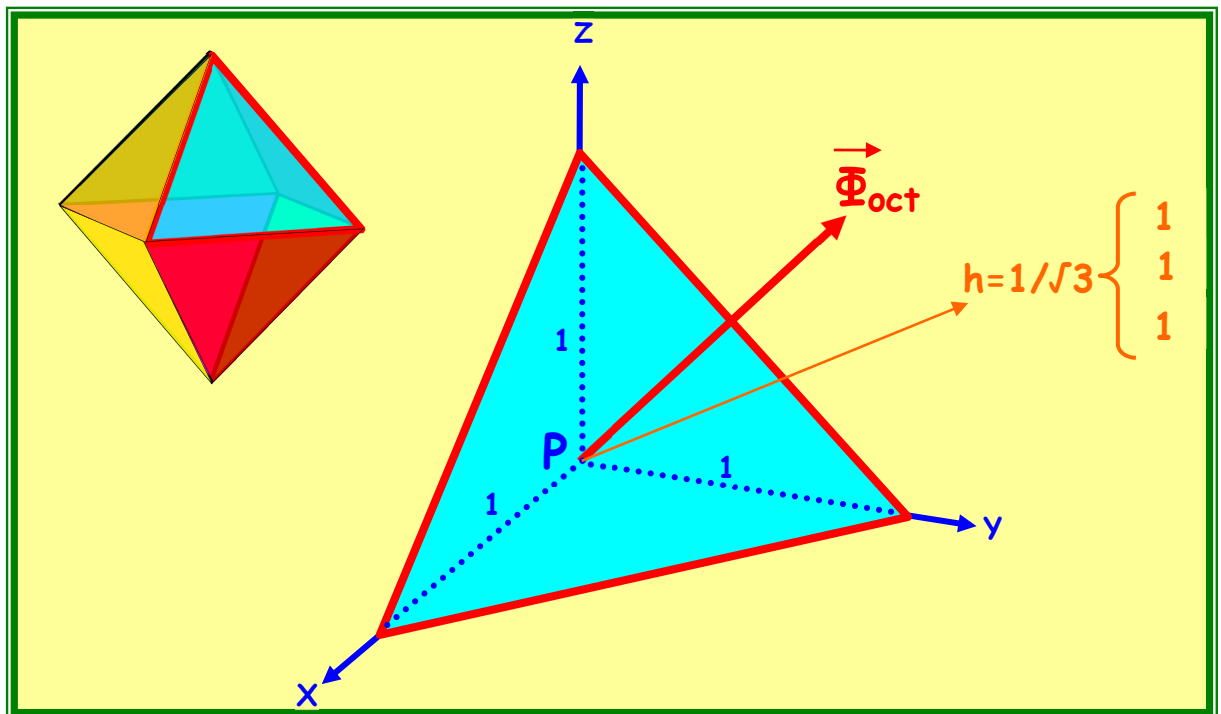
La contrainte σ_{equ} est une fonction f à déterminer des contraintes principales σ_x , σ_y , et σ_z .

Par exemple, pour les critères élémentaires :

- En traction : $f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \sigma_x$
- En compression : $f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = |\sigma_x|$
- En torsion : $f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \sigma_x - \sigma_y$

1.4 Critères de VON MISES ou critère de la contrainte tangentielle octaédrique:

1°) Contrainte tangentielle octaédrique :



² VON MISES Richard (1883-1953)

³ TRESCA Henri (1814-1885)

Considérons l'octaèdre régulier (les huit faces sont des triangles équilatéraux) isolé autour d'un point P dans les axes principaux. Calculons le vecteur contrainte $\vec{\Phi}_h$ s'exerçant sur la face ombrée de l'octaèdre.

$$[\Phi_h] = [\Phi_{oct}] = [\sigma][h] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Calculons la contrainte normale octaédrique, puis la contrainte tangentielle octaédrique.

$$\sigma_{hh} = \sigma_{oct} = \vec{\Phi}_h \cdot \vec{h} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma_{th} = \tau_{oct} = \sqrt{\Phi_{oct}^2 - \tau_{oct}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{3} - \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{9}}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}$$

2°) Enoncé du critère :

Pour qu'un solide reste dans l'état élastique il faut que la contrainte tangentielle octaédrique soit inférieure à la limite qu'elle atteint dans un essai de traction.

$$\tau_{oct} \leq \tau_{oct}^{lim}$$

3°) Calcul de τ_{oct}^{lim} :

La matrice des contraintes en traction s'écrit lorsqu'on atteint la limite élastique :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{oct}^{lim} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_e^2}$$

$$\tau_{oct}^{lim} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e$$

4°) Formulation du critère en 3D. Contrainte équivalente de VON MISES :

En introduisant un coefficient $\alpha \geq 1$ (le coefficient de sécurité) :

$$\alpha \tau_{\text{oct}} = \tau_{\text{oct}}^{\text{lim}}$$

$$\alpha \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$

α est le coefficient de sécurité.

$$\sigma_{\text{equ}}^{\text{VM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

5°) Formulation et image du critère en 2D :

* Pour un corps quelconque :

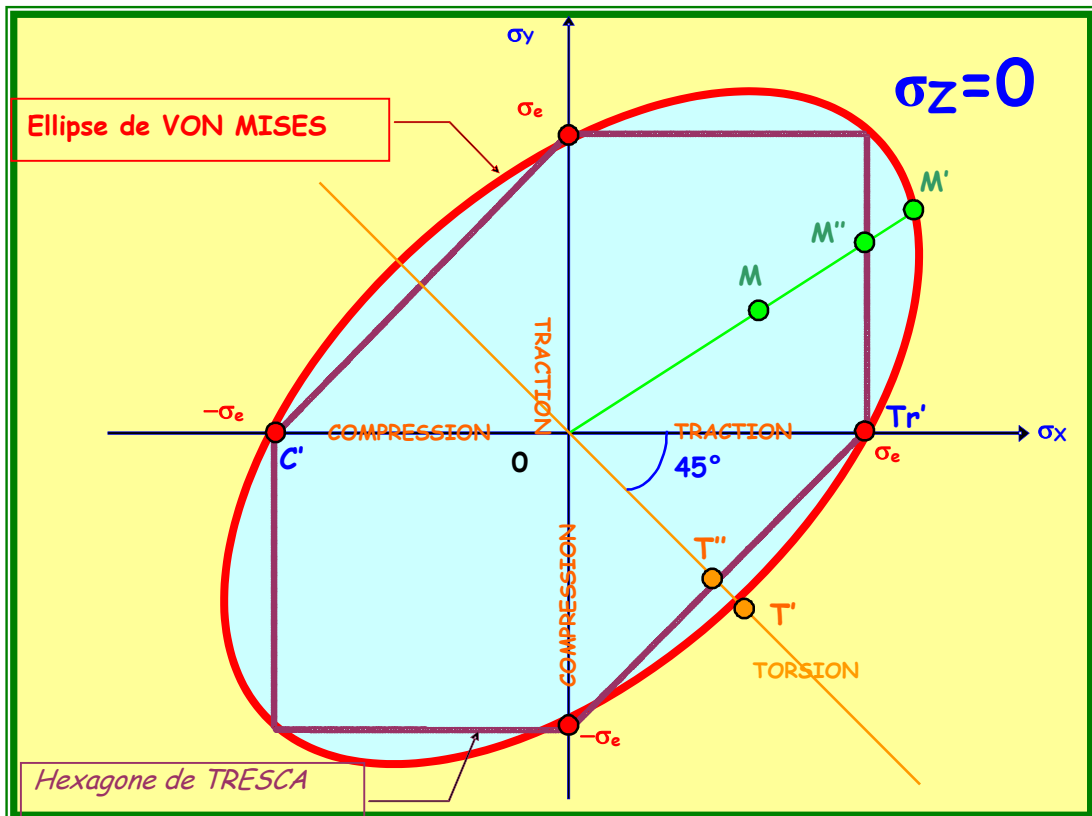
La formule en 3D de VON MISES s'écrit en 2D compte tenu que $\sigma_z = 0$:

$$[\sigma]_{\text{xyz}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}}$$

$$\sigma_{\text{equ}}^{\text{VM}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$$

La courbe limite (lorsque le coefficient de sécurité α vaut 1) est une ellipse d'équation : $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y = \sigma_e^2$



L'état du corps sera élastique si le point M représentatif d'un état de contraintes planes se trouve à l'intérieur de l'ellipse. L'état limite est représenté par le point M' situé sur l'ellipse.

Le coefficient de sécurité peut alors se mettre sous la forme : $\alpha = \frac{OM'}{OM}$

$$* \text{ Pour une poutre : } [\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On reporte les expressions des contraintes principales pour une poutre dans

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}}. \text{ On rappelle que les contraintes principales pour une}$$

poutre valent (en fonction de la contrainte de flexion σ et de la contrainte de

$$\text{torsion } \tau): \quad \sigma_{x,y} = \frac{\sigma}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

On obtient ainsi l'expression du coefficient de sécurité de VON MISES pour une poutre qui est à la fois fléchie et tordue :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

$$\sigma_{equ}^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

6°) Vérification du critère à la compression et à la torsion :

Le critère de VON MISES étant basé sur la traction il faut qu'il vérifie la compression et la torsion.

Compression

D'après l'ellipse de VON MISES, on constate que les limites élastiques en traction (point Tr') et en compression (point C') doivent être identiques. Autrement dit le matériau doit être symétrique, ce qui est caractéristique d'un matériau ductile.

$$\sigma_e' = \sigma_e$$

Torsion

En torsion les valeurs propres sont opposées (point T' sur l'ellipse). La relation de sécurité pour les poutres donne à la limite puisque $\alpha=1$ et $\tau = \tau_e$.

$$1 = \frac{\sigma_e}{\sqrt{0^2 + 3\tau_e^2}}$$

On obtient donc la relation entre les limites élastiques en traction et en torsion :

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \approx 0.577\sigma_e$$

Cette relation caractérise un matériau ductile.

N.B. Le critère de VON MISES est donc un critère bien adapté aux matériaux ductiles, mais on peut quand même l'appliquer aux matériaux fragiles. On obtient alors une sécurité un peu plus faible qu'elle n'est en réalité.

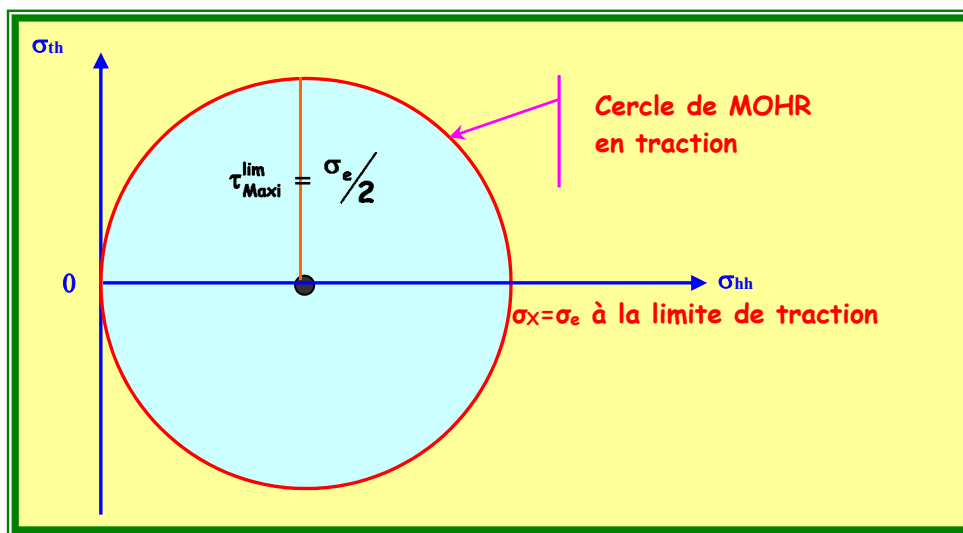
1.5 Critères de TRESCA ou critère de la contrainte tangentielle maximum :

1°) Enoncé du critère :

Pour qu'un solide reste dans l'état élastique il faut que la contrainte tangentielle maximum soit inférieure à la limite qu'elle atteint dans un essai de traction.

$$\tau_{\text{Maxi}} \leq \tau_{\text{Maxi}}^{\text{lim}}$$

2°) Calcul de $\tau_{\text{Maxi}}^{\text{lim}}$:



$$\tau_{\text{Maxi}}^{\text{lim}} = \frac{\sigma_e}{2}$$

3°) Formulation du critère en 3D. Contrainte équivalente de TRESCA :

$$\tau_{\text{Maxi}} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

Ou encore, en introduisant un coefficient $\alpha \geq 1$ (le coefficient de sécurité) :

$$\alpha \tau_{\text{Maxi}} = \frac{\sigma_e}{2}$$

Le cisaillement maximum est le rayon du plus grand cercle de MOHR :

$$\tau_{\text{Maxi}} = \text{Max} \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}$$

$$\alpha \tau_{\text{Maxi}} = \alpha \text{Max} \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{2\tau_{\text{Maxi}}} = \frac{\sigma_e}{\text{Max}|\sigma_i - \sigma_j|}$$

α est le coefficient de sécurité.

σ_i, σ_j sont les contraintes principales

$$\sigma_{\text{equ}}^T = 2\tau_{\text{Maxi}}$$

4°) Formulation et image du critère en 2D :

* Pour un corps quelconque :

On montre que la courbe limite est un hexagone

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état du corps sera élastique si le point M représentatif d'un état de contraintes planes se trouve à l'intérieur de l'hexagone. L'état limite est représenté par le point M'' situé sur l'hexagone.

Le coefficient de sécurité peut alors se mettre sous la forme : $\alpha = \frac{OM''}{OM}$

* Pour une poutre : $[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > 0$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0$$

$$\sigma_z = 0$$

Etant donné le signe des contraintes principales, le cisaillement maximum est

$$\tau_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

La relation de sécurité s'écrit :

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{2\tau_{\text{Maxi}}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

$$\sigma_{\text{equ}}^T = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

5°) Vérification du critère à la compression et à la torsion :

Compression

D'après l'hexagone de TRESCA, on constate que les limites élastiques en traction (point Tr') et en compression (point C') doivent être identiques. Autrement dit le matériau doit être symétrique, ce qui est caractéristique d'un matériau ductile.

$$\sigma'_e = \sigma_e$$

Torsion

En torsion les valeurs propre sont opposées (point T'' sur l'hexagone de TRESCA). La relation de sécurité pour les poutres donne à la limite puisque $\alpha=1$ et $\tau = \tau_e$.

$$1 = \frac{\sigma_e}{\sqrt{0^2 + 4\tau_e^2}}$$

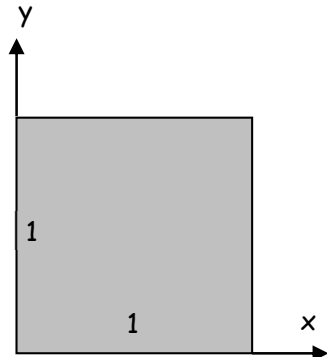
On obtient donc la relation entre les limites élastiques en traction et en torsion :

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

Cette relation caractérise un matériau ductile.

2. DEFORMATIONS

PROBLÈME N°9



Considérons le carré infiniment petit, de côté unité, dans les axes xy .

Les déformations dans le plan x,y valent :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 50 \mu d$$

$$\varepsilon_{xy} = -100 \mu d$$

1°) Tracer la figure déformée du carré.

2°) Déterminer les éléments principaux de la déformation.

Tracer la figure déformée d'un carré isolé dans les axes principaux et de côté $\sqrt{2}$

REPONSES N°9

Matrice de déformation :

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans notre cas :

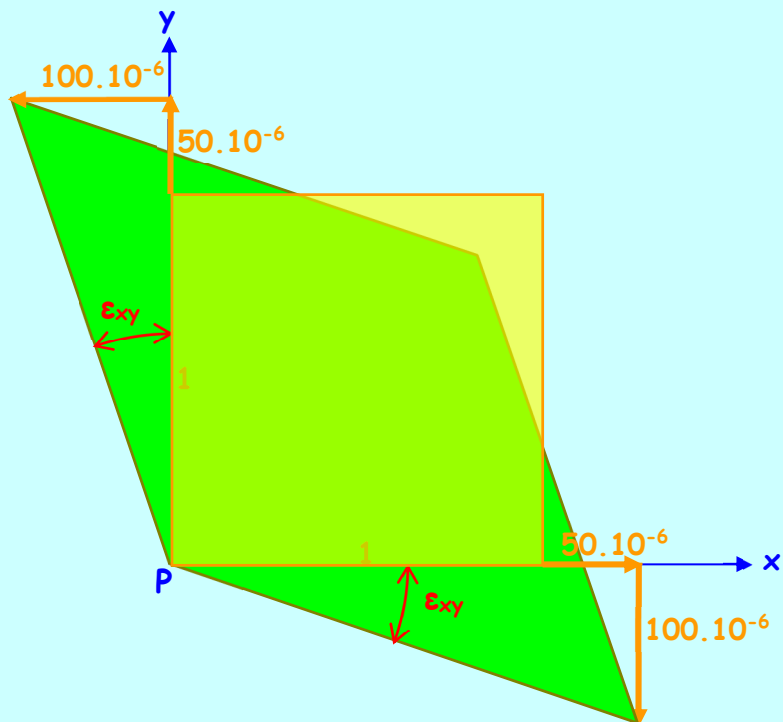
$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{\Delta l}{l} \right)_x \quad \text{or } l=1 \quad \Delta l = 1 \times \varepsilon_{xx}$$

$$\text{De même pour } \varepsilon_{yy} = \left(\frac{\Delta l}{l} \right)_y$$

Le carré se transforme après déformation en un parallélogramme.

L'angle initialement droit entre les axes x et y vaut après déformation $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{xy}$



Éléments principaux de la déformation :

$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 50 & -100 & 0 \\ -100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

La direction z est principale et $\varepsilon_z = \varepsilon_{zz}$.

Les 2 autres valeurs propres sont données par :

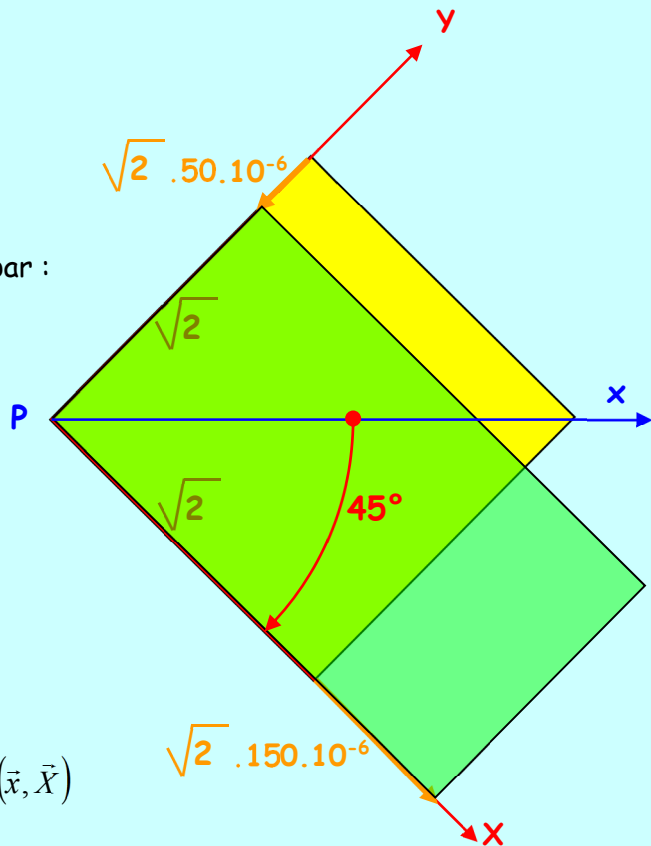
$$\varepsilon_X^Y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_X = 150 \mu d \quad \varepsilon_Y = -50 \mu d$$

La direction propre X est calculée par :

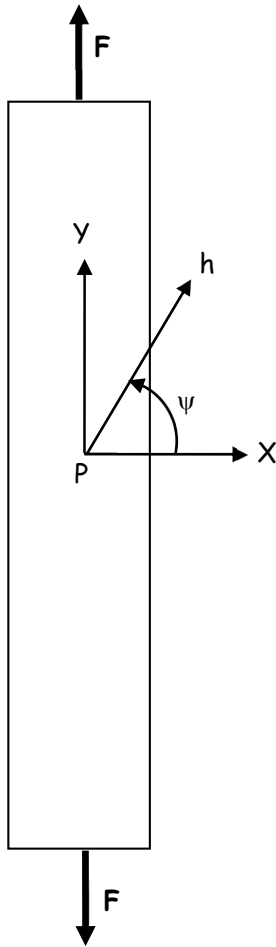
$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = -1 \quad \text{d'où } \hat{\varphi} = -45^\circ = (\vec{x}, \vec{X})$$

$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \mu d$$



Le carré se transforme après déformation, dans les axes principaux, en un rectangle. L'angle droit reste droit après déformation, car la distorsion angulaire est nulle. Les déformations principales ε_X et ε_Y représentent les extremums des dilatations linéaires unitaires au point P.

PROBLÈME N°10



Considérons une barre en traction.

1°) Ecrire la matrice des déformations dans le repère principal en fonction de la déformation longitudinale ε_X et du coefficient de POISSON ν du matériau.

2°) Déterminer dans le repère principal XY la position angulaire des axes h pour lesquelles $\varepsilon_{hh}=0$.

Application numérique : Le matériau est un AU4G. Calculer la position angulaire en ° des axes h par rapport à l'axe de traction.

REPONSES N°10

Matrice de déformation dans le repère principal:

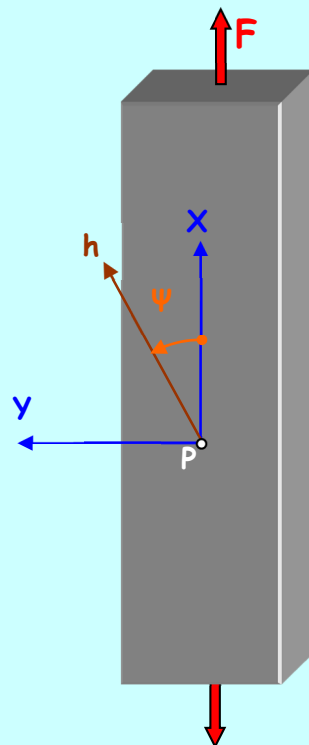
$$[\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}$$

L'axe de traction X est principal et enregistre le maximum des élongations unitaires : ε_X

L'axe Y est principal et enregistre le maximum des raccourcissements unitaires : ε_Y

D'après la loi de POISSON : $\varepsilon_Y = -\nu\varepsilon_X$ et $\varepsilon_Z = -\nu\varepsilon_X$

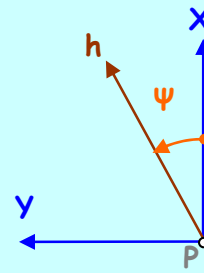
$$[\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_X & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_X \end{bmatrix}$$



$$[\varepsilon]_{XYZ}^P = \varepsilon_X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

Ecrivons l'expression donnant ε_{hh} dans des axes quelconques :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$



Adaptons cette relation dans les axes principaux :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \cos 2\psi \quad \text{car la distorsion angulaire est nulle .}$$

Nous cherchons la position de la direction h qui enregistre une dilatation linéaire unitaire nulle . Si une jauge était collée dans la direction h, elle mesurerait zéro, quelque soit la valeur de l'effort de traction.

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \cos 2\psi = 0 ;$$

$$\cos 2\psi = -\frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{\varepsilon_X - \varepsilon_Y} \quad \cos 2\psi = -\frac{\varepsilon_X - \nu \varepsilon_X}{\varepsilon_X + \nu \varepsilon_X} = -\frac{1 - \nu}{1 + \nu}$$

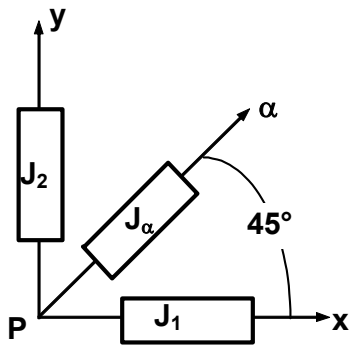
$$\cos 2\psi = \frac{1 - \frac{1}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu}} \quad \text{or} \quad \cos 2\psi = \frac{1 - \tan^2 \psi}{1 + \tan^2 \psi} \quad \text{d'où} \quad \tan^2 \psi = \frac{1}{\nu}$$

$$\tan \psi = \pm \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

Le coefficient de POISSON d'un AU4G est égal à 0,33

$$\tan \psi = \pm \frac{1}{\sqrt{0,33}} \quad \psi \approx \pm 60^\circ$$

PROBLÈME N°11



On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° collée dans le plan tangent en P sont respectivement :

jauge J₁: 950 μd

jauge J_α: -175 μd

jauge J₂: -475 μd

- 1°) Quels sont les éléments principaux de la déformation.
- 2°) Dans quelle direction α' enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle?
- 3°) Dans quel système d'axes enregistrerait-on une distorsion extremum ?

REPONSES N°11

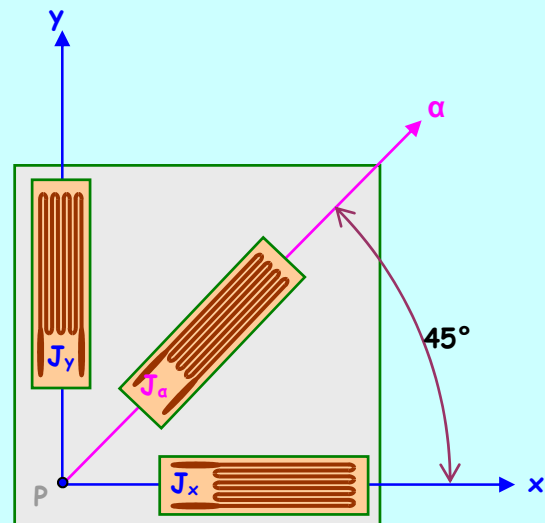
Le point P se situant à la surface d'un corps où ne s'applique aucune force extérieure, la forme de la matrice des déformations est la suivante :

$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Les jauges J_x et J_y mesurent respectivement
Les dilatations linéaires unitaires ε_{xx} et ε_{yy}.

La demi distorsion angulaire ε_{xy} est déterminée indirectement par la troisième jauge J_α.

La dilatation linéaire est calculée par les lois de comportement et nécessite la connaissance du coefficient de Poisson



$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 950 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & -475 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

Pour calculer ε_{xy} , utilisons la relation $\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$ en faisant coïncider h avec a.

$$\varepsilon_{aa} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 90 + \varepsilon_{xy} \sin 90 \quad \varepsilon_{aa} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{aa} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \quad \varepsilon_{xy} = -175 - \frac{950 - 475}{2} \quad \varepsilon_{xy} = -412,5 \cdot 10^{-6}$$

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 950 & -412,5 & 0 \\ -412,5 & -475 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

Éléments principaux de la déformation :

La direction z perpendiculaire au plan où est coller la rosette est principale.

Nous recherchons donc les directions propres, et les valeurs propres dans le plan de la rosette xy.

Les 2 autres valeurs propres sont données par :

$$\varepsilon_x^y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \quad \varepsilon_x^y = \frac{950 - 475}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(950 + 475)^2 + 4 \times 412,5^2}$$

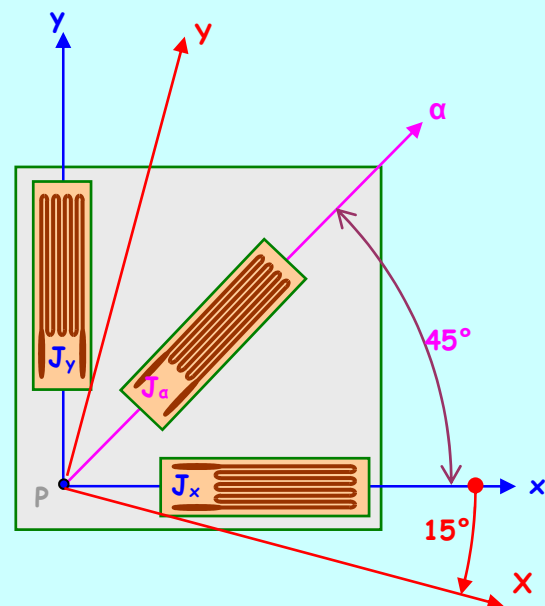
$$\varepsilon_x = 1061 \mu d \quad \varepsilon_y = -586 \mu d$$

La direction propre X est calculée par :

$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{1061 - 950}{-412,5} \approx 0,269$$

$$\text{d'où } \hat{\varphi} = -15^\circ = (\vec{x}, \vec{X})$$

$$[\varepsilon]_{XYZ}^p = \begin{bmatrix} 1061 & 0 & 0 \\ 0 & -586 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \mu d$$



Cherchons la direction α' pour laquelle on enregistrerait une dilatation linéaire nulle :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\psi = 0 ; \cos 2\psi = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad \cos 2\psi = -\frac{1061 - 586}{1061 + 586} \approx -0,288$$

$$\psi \approx \pm 53^\circ 4$$

Cherchons le système d'axes pour lequel on enregistrerait une distorsion extremum :

$$(\gamma_{th})_{\max i} = (2\varepsilon_{th})_{\max i}$$

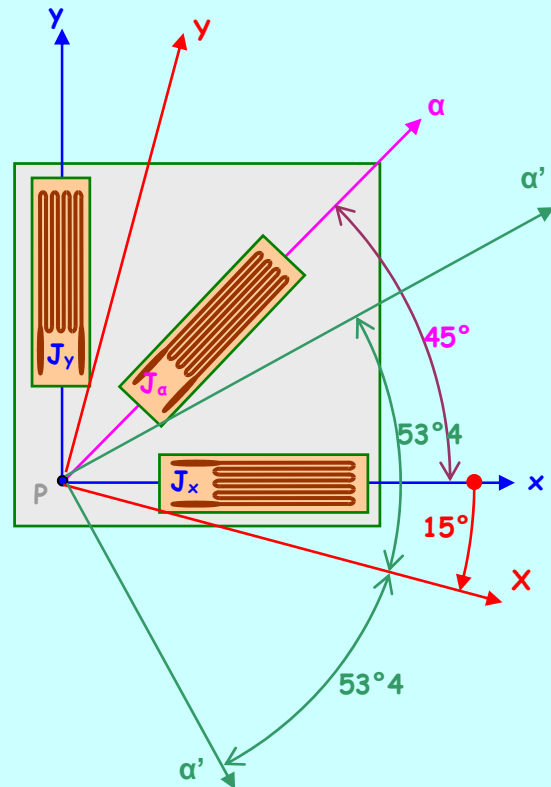
$$\varepsilon_{th} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$$

Dans les axes principaux,
la relation devient :

$$\varepsilon_{th} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\psi$$

ε_{ht} est maximum pour $\sin 2\psi$ maxi

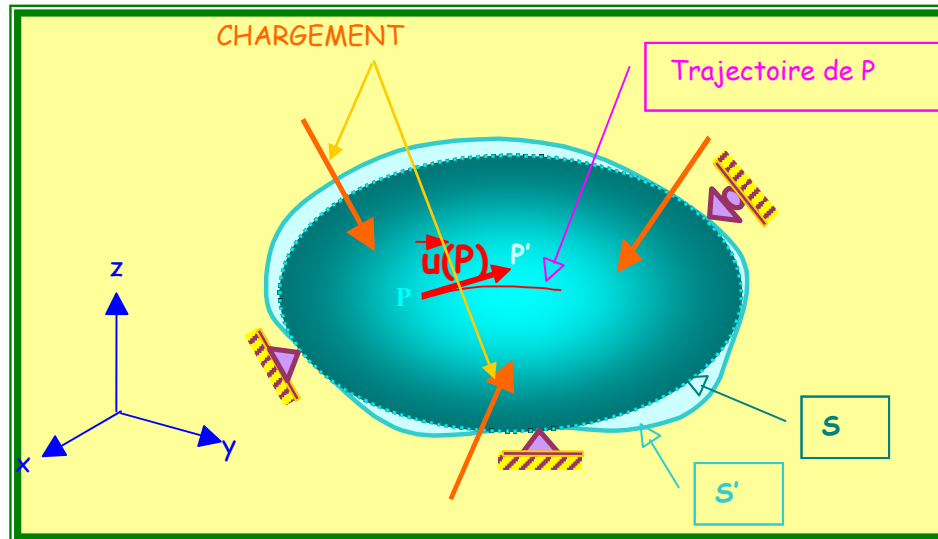
$$\sin 2\psi = \pm 1 \quad \psi = \pm 45^\circ$$



DÉFORMATIONS:

1. Déplacements et Déformations

1.1. Vecteurs déplacement d'un point P :



Soit un point P quelconque du solide dans son état initial S. Après chargement le solide passe dans son état final S' et le point P décrit une certaine trajectoire qui l'amène dans la position P'.

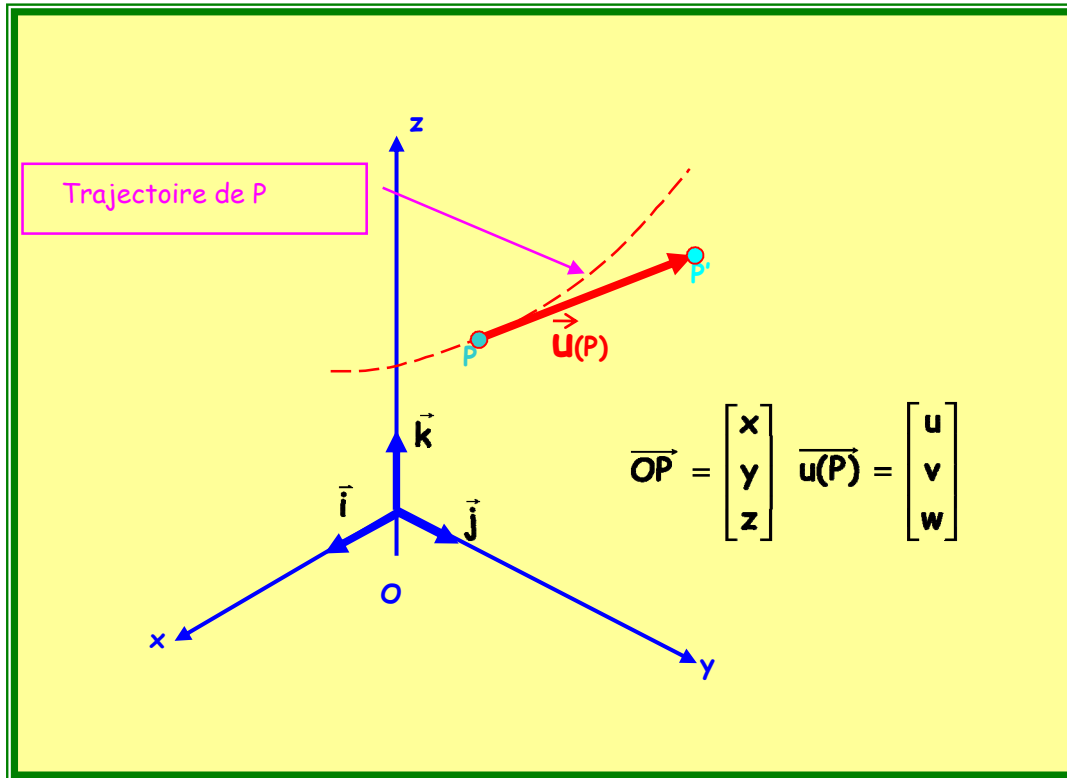
Soit $\bar{u}(P) = \overline{PP'}$ le vecteur déplacement du point P. **C'est une fonction vectorielle des trois coordonnées initiales x, y, et z du point P.**

Pour simplifier au maximum on suppose que le déplacement $\bar{u}(P) = \overline{PP'}$:

✚ Est petit (1% de la plus grande dimension du solide). **C'est l'hypothèse des petits déplacements.** De ce fait on peut considérer que le déplacement de P (qui s'effectue théoriquement le long de la trajectoire) est tangent à cette trajectoire.

✚ Qu'il possède des dérivées partielles par rapport aux variables x, y et z faibles (10^{-3}). Les déformations dans le solide qui dépendent des dérivées seront donc du même ordre. **C'est l'hypothèse des petites déformations.**

1.2. Décomposition d'une matrice carrée quelconque :



Une matrice carrée **quelconque** $[T]$ peut toujours être décomposée en une somme d'une matrice **symétrique** $[\varepsilon]$ et d'une matrice **antisymétrique** $[\eta]$

$$[T] = [\cancel{\varepsilon}] + [\cancel{r}]$$

- $[T]$ carrée quelconque de terme T_{ij} .
- $[\varepsilon]$ carrée symétrique de terme ε_{ij} ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$).
- $[r]$ carrée antisymétrique de terme r_{ij} ($r_{ij} = -r_{ji}$ et par conséquent $r_{ii} = 0$)

Avec :

$$\begin{aligned} 1^\circ) [\varepsilon] &= \frac{1}{2} ([\mathbf{T}]_+^\dagger [\mathbf{T}]) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ji}) \\ \varepsilon_{ji} &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{ji} + \mathbf{T}_{ij}) = \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

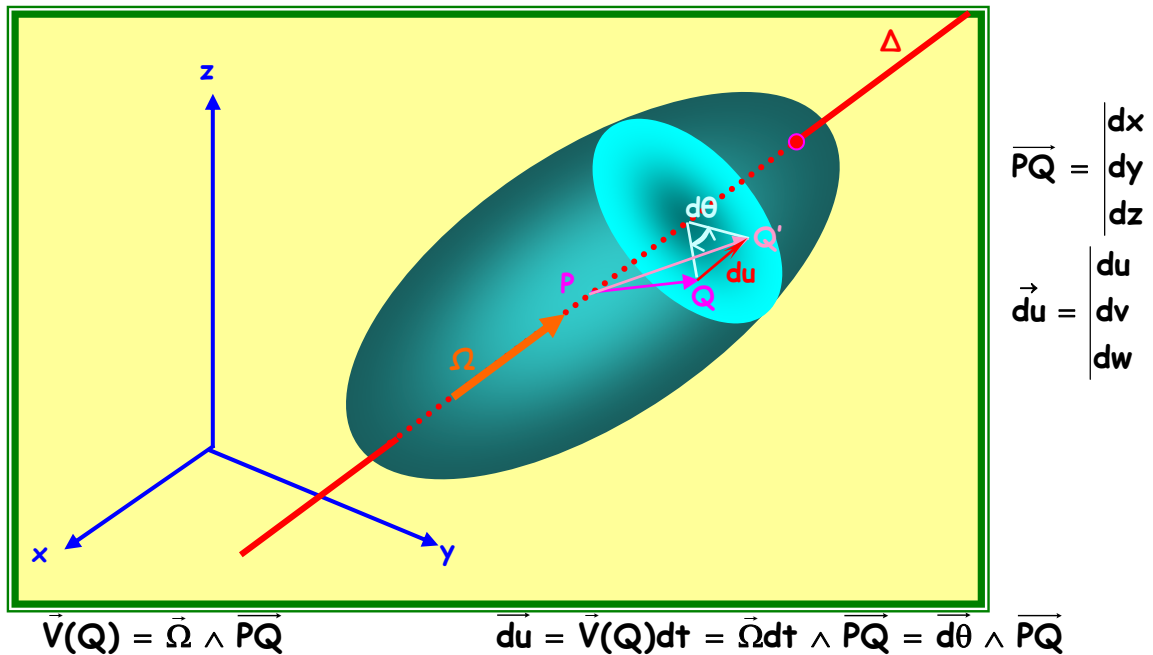
La matrice $[\varepsilon]$ est donc symétrique.

$$\begin{aligned} 2^\circ) [\mathbf{r}] &= \frac{1}{2} ([\mathbf{T}]^{-\dagger} [\mathbf{T}]) & \mathbf{r}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{ij} - \mathbf{T}_{ji}) \\ & & \mathbf{r}_{ji} &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{ji} - \mathbf{T}_{ij}) = -\mathbf{r}_{ij} \end{aligned}$$

La matrice $[\mathbf{r}]$ est donc antisymétrique.

1.3. Petite rotation autour d'un axe quelconque :

Considérons un solide soumis à une petite rotation autour d'un axe Δ pendant un intervalle de temps dt .



$$\vec{du} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_y dz - r_z dy \\ r_z dx - r_x dz \\ r_x dy - r_y dx \end{bmatrix}$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$[du] = [r][da]$$

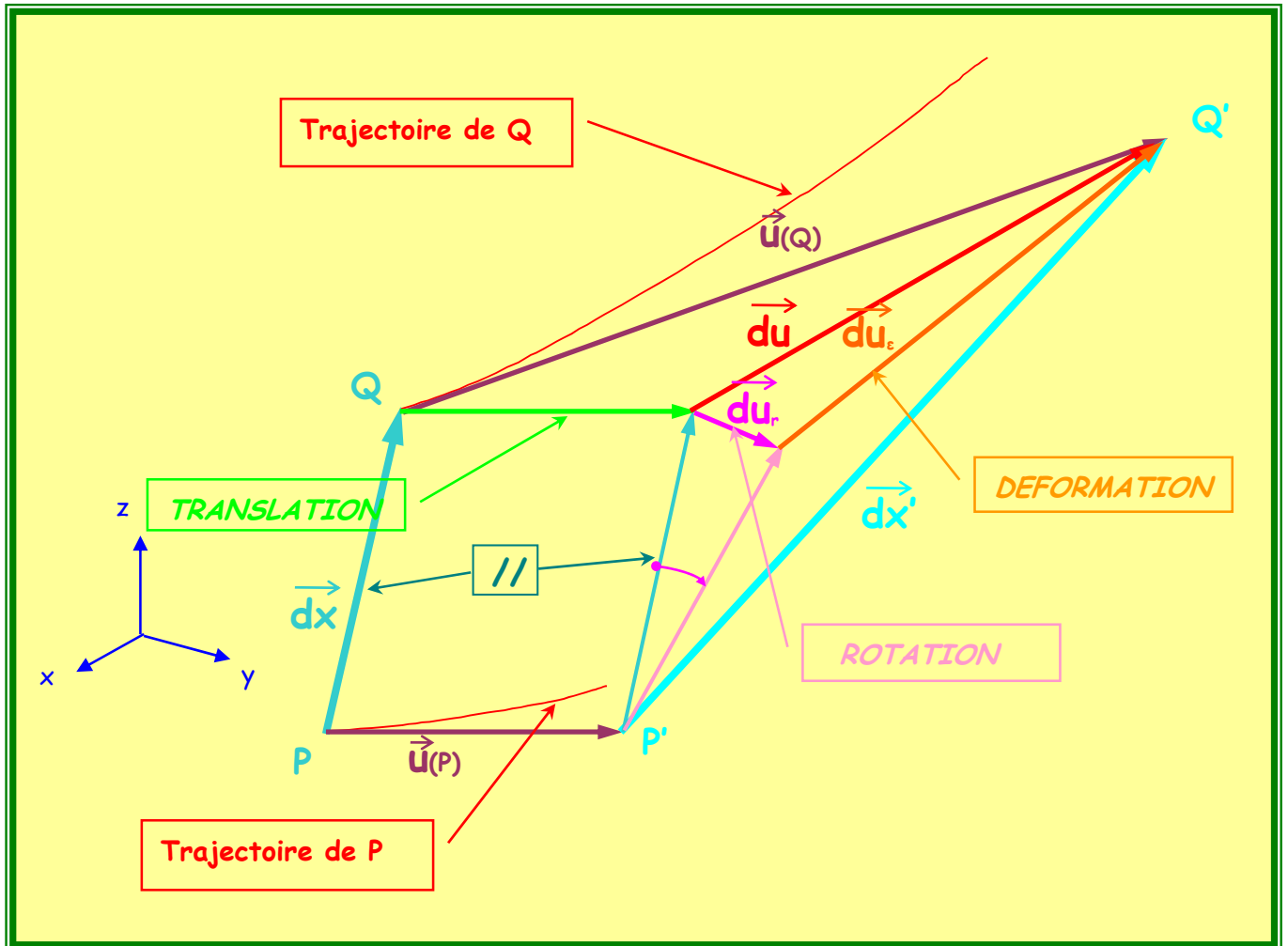
antisymétrique

Une petite rotation est donc caractérisée par une matrice antisymétrique $[r]$.

1.4. Etat de déformations en un point. Matrice des déformations :

1.4.1. Relations déplacements-déformations :

Pour évaluer les déformations dans le solide, considérons deux points voisins P et Q dans le solide. Soient $\vec{u}(P)$ et $\vec{u}(Q)$ les déplacements (tangents aux trajectoires) des deux points P et Q. L'écart entre $\vec{u}(Q)$ et $\vec{u}(P)$ est la différentielle $\vec{du}$ du vecteur $\vec{u}(P)$.



La petite transformation de $\vec{dx}$ en $\vec{dx}'$ est la somme de trois transformations élémentaires et petites (l'ordre dans lequel s'effectue les transformations n'intervient pas) :

- ✚ Une translation caractérisée par $\vec{u}(P_0)$.
- ✚ Une rotation autour de P' caractérisée par $\vec{du}_r$.
- ✚ Une déformation caractérisée par $\vec{du}_e$.

La rotation et la déformation sont contenues dans $\vec{du}$.

$$\vec{du} = \vec{du}_r + \vec{du}_e$$

La différentielle $\vec{du}$ d'un vecteur $\vec{u}(P)$ se calcule par :

$$\vec{du} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz \quad \text{Avec :} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k} \end{aligned}$$

On reporte les dérivées partielles de $\vec{u}$ dans la différentielle $\vec{du}$.

$$\vec{du} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \vec{k}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Or : $d\vec{u} = du \vec{i} + dv \vec{j} + dw \vec{k}$ *en identifiant* : $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \boxed{[du] = [T][dx]}$$

La matrice carrée (non symétrique) $[T]$ est la matrice de transformation.

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La matrice $[T]$ est toujours décomposable en une somme d'une matrice symétrique $[\varepsilon]$ et d'une matrice antisymétrique $[r]$.

La matrice symétrique $[\varepsilon]$ caractérise la déformation. La matrice antisymétrique $[r]$ caractérise la rotation.

$$[du] = [T][dx]$$

$$[du] = [[\varepsilon] + [r]][dx] \text{ avec : } [\varepsilon] = \frac{1}{2} ([T] + {}^t[T]) \text{ et } [r] = \frac{1}{2} ([T] - {}^t[T])$$

$$[du] = [\varepsilon][dx] + [r][dx] \text{ d'où } [du] = [du_\varepsilon] + [du_r] \text{ avec } [du_\varepsilon] = [\varepsilon][dx] \text{ et } [du_r] = [r][dx]$$

Le vecteur $\vec{du}_\varepsilon$ représente la différentielle pendant la déformation. Le vecteur $\vec{du}_r$ représente la différentielle pendant la rotation.

La matrice carrée symétrique $[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([T] + {}^t[T])$ caractérise donc la déformation pure au voisinage du point P. C'est la matrice des petites déformations de GREEN⁴ au point P. Ses termes sont petits (de l'ordre de 10^{-3}).

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the symmetry of the strain matrix $[\varepsilon]$. Red arrows point from the diagonal elements to the off-diagonal elements, indicating that $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. For example, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$, and $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$.

$${}^t[\varepsilon] = [\varepsilon]$$

avec :

$$[du_\varepsilon] = [\varepsilon][dx]$$

Symétrique

De la relation $[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([T] + {}^t[T])$ on tire les relations « déplacements-déformations » :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

⁴ GREEN George (1793-1841)

1.4.2. Signification géométrique des termes de $[\varepsilon]$:

a) Déformée d'un cube de côté unité :

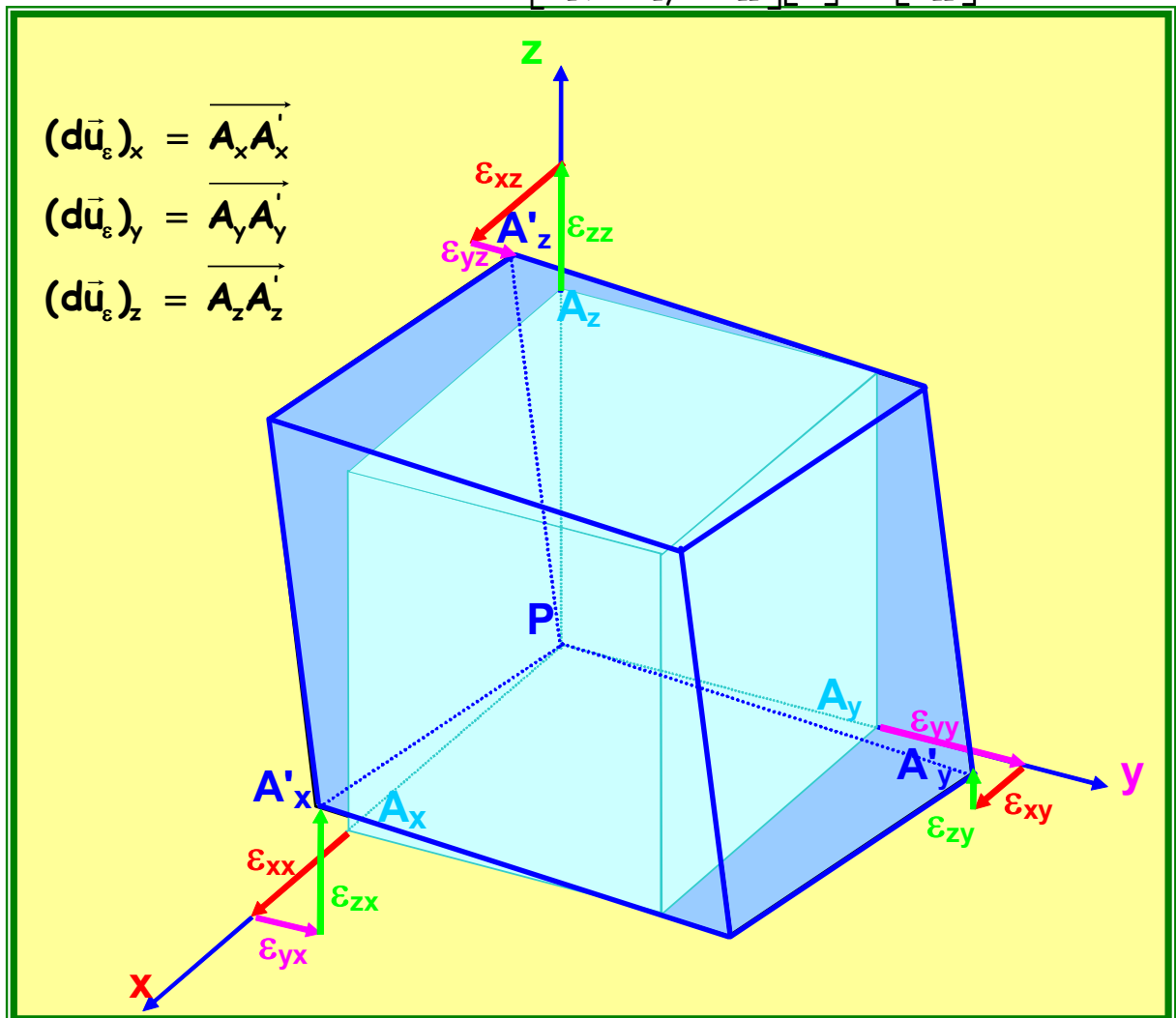
Considérons un cube de **côté unité** isolé en P dans le repère xyz avant déformation et cherchons la déformée de ce cube.

Les vecteurs différentiels des côtés PA_x , PA_y et PA_z pendant la déformation se calculent avec : $[du_\varepsilon] = [\varepsilon][da]$

$$\text{Côté } PA_x \text{ du cube : } [du_\varepsilon]_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\text{Côté } PA_y \text{ du cube : } [du_\varepsilon]_y = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Côté } PA_z \text{ du cube : } [du_\varepsilon]_z = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



Dans un repère quelconque un cube infiniment petit de côté unité ($PA_x=PA_y=PA_z=1$) se transforme en un parallélépipède à faces obliques.

b) Interprétation des termes $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$:

Calculons le rapport $(\frac{\Delta l}{l})_x$.

$(\frac{\Delta l}{l})_x$ est la dilatation linéaire unitaire (sans dimension) suivant l'axe x du repère.

Les termes sans dimension $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$, représentent donc sensiblement les variations de longueurs des côtés du cube, quand les côtés de celui-ci valent 1. Si les côtés du cube, ne valent pas 1 mais l, on a les relations :

$$\varepsilon_{xx} \approx (\frac{\Delta l}{l})_x \quad \varepsilon_{yy} \approx (\frac{\Delta l}{l})_y \quad \varepsilon_{zz} \approx (\frac{\Delta l}{l})_z$$

Remarque :

Le rapport $\frac{V - V_0}{V_0}$ est la dilatation cubique unitaire (ou dilatation volumique) en un point P.

Volume initial du cube : $V_0=1$

Volume final V du parallélépipède à faces obliques :

$$V = (\vec{PA'_x} \wedge \vec{PA'_y}) \cdot \vec{PA'_z}$$

$$\vec{PA'_x} \wedge \vec{PA'_y} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \end{vmatrix}$$

$$V = (\vec{PA'_x} \wedge \vec{PA'_y}) \cdot \vec{PA'_z} \approx 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \approx 1 + \text{tr}[\varepsilon]$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} \approx \text{tr}[\varepsilon]$$

La dilatation cubique est une constante physique qui ne dépend pas du repère où elle est calculée. La trace $\text{tr}[\varepsilon]$ de la matrice des déformations est donc invariante.

c) Interprétation des termes ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} :

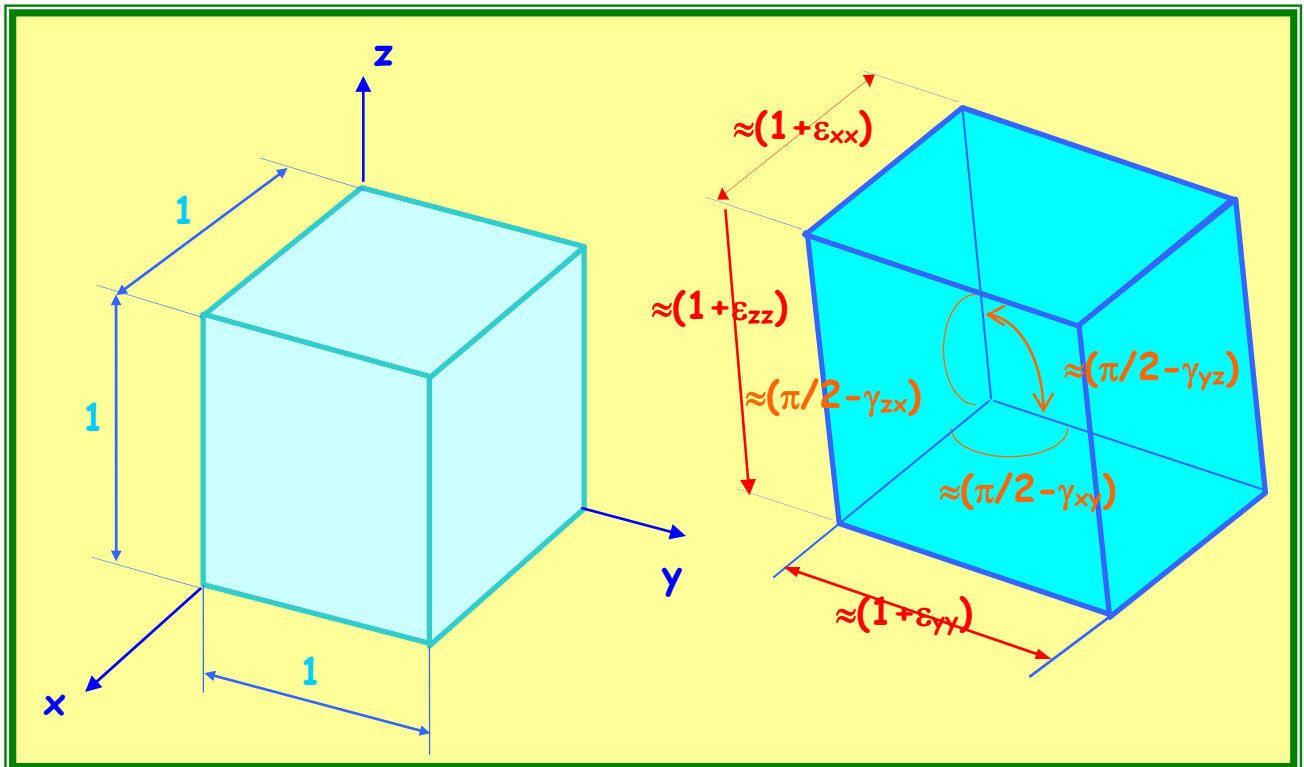
Calculons l'angle $\hat{A'_x P A'_y}$ entre les vecteurs $\overrightarrow{PA'_x}$ et $\overrightarrow{PA'_y}$ en posant :

$$\hat{A'_x P A'_y} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

γ_{xy} est la distorsion de l'angle droit x,y du repère (en rd).

$$\gamma_{xy} \approx 2\varepsilon_{xy} \quad \gamma_{yz} \approx 2\varepsilon_{yz} \quad \gamma_{zx} \approx 2\varepsilon_{zx}$$

Les termes sans dimension ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} , représentent donc sensiblement les **demi-distorsions** des faces du cube.



⚠ **REMARQUE :** On peut, puisque la matrice des déformations $[\varepsilon]$ est symétrique, et quelle ne comporte donc que six termes indépendants, utiliser pour la matrice des déformations $[\varepsilon]$ une notation, assez pratique, en colonne :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

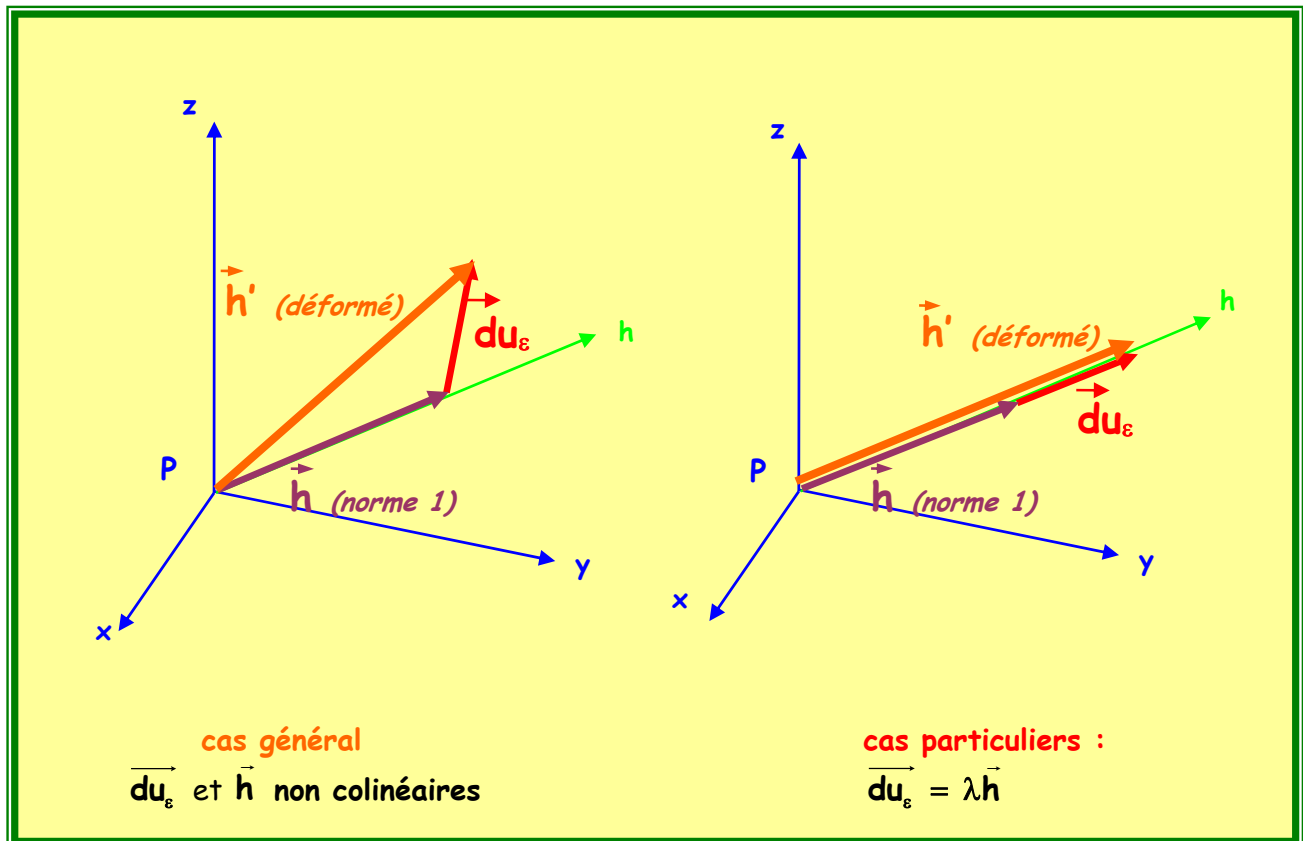
Attention !

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

1.4.3. Eléments principaux de $[\varepsilon]$:

On recherche s'il existe des axes h particuliers passant par P tels que le vecteur unitaire $\vec{h}$ de l'axe h et la différentielle de la déformation $\overrightarrow{du_\varepsilon}$ de $\vec{h}$ soient colinéaires.

Le schéma suivant ne représente que la déformation pure d'un vecteur qui est le vecteur unitaire $\vec{h}$ d'un axe h passant par P (la rotation et la translation ne sont pas représentées).



Comme pour les contraintes, le problème revient à chercher les vecteurs propres $\vec{h}$ de l'espace, λ étant les valeurs propres de $[\varepsilon]$.

Les vecteurs propres $\vec{h}$ de l'espace devant être non nuls, le système d'équations admet des solutions différentes de 0 que si son déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le développement du déterminant caractéristique de $[\varepsilon] - \lambda[\mathbf{I}]$ conduit à l'équation caractéristique :

$$\lambda^3 - \mathbf{I}_{1\varepsilon} \lambda^2 + \mathbf{I}_{2\varepsilon} \lambda - \mathbf{I}_{3\varepsilon} = 0$$

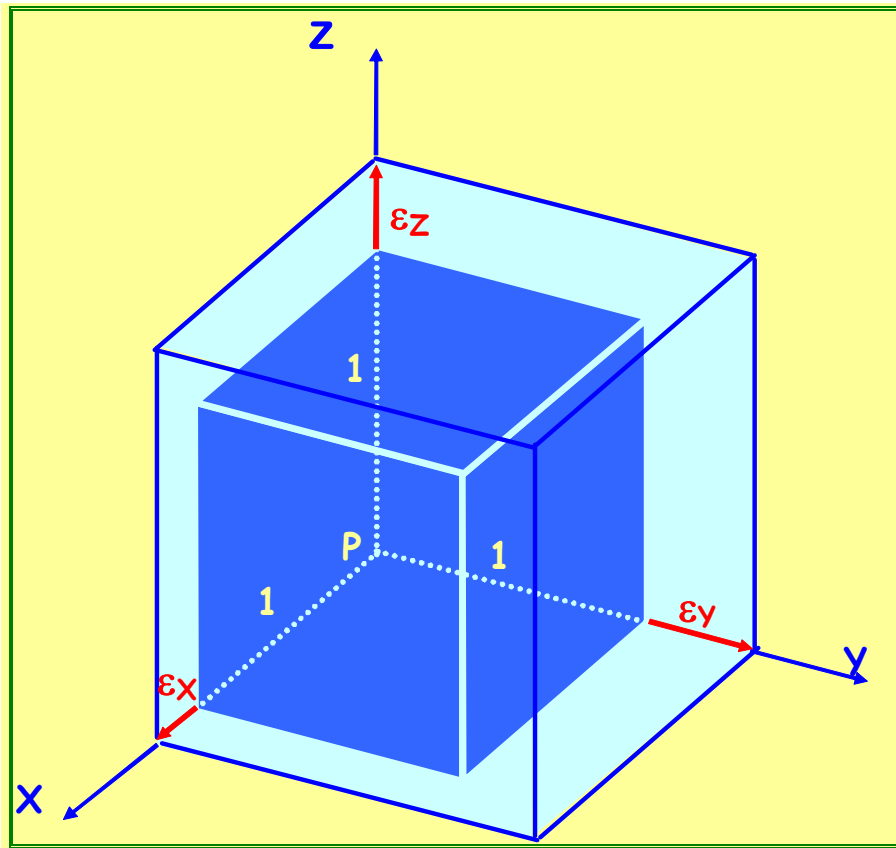
$I_{1\varepsilon} = \text{tr}[\varepsilon]$ est l'invariant linéaire (la dilatation cubique).

$I_{2\varepsilon} = \text{tr}[\text{co}\varepsilon]$ est l'invariant quadratique.

$I_{3\varepsilon} = \|\varepsilon\|$ est l'invariant cubique.

La matrice $[\varepsilon]$ étant symétrique, les 3 valeurs propres sont réelles et les 3 vecteurs propres sont orthogonaux et constituent une base dans laquelle la matrice $[\varepsilon]$ sera diagonale.

On note, ε_x , ε_y et ε_z les 3 valeurs propres de $[\varepsilon]$. Ce sont les déformations principales. On note **X**, **Y** et **Z** les 3 axes construits sur les 3 vecteurs propres de l'espace. Ce sont les axes principaux des déformations



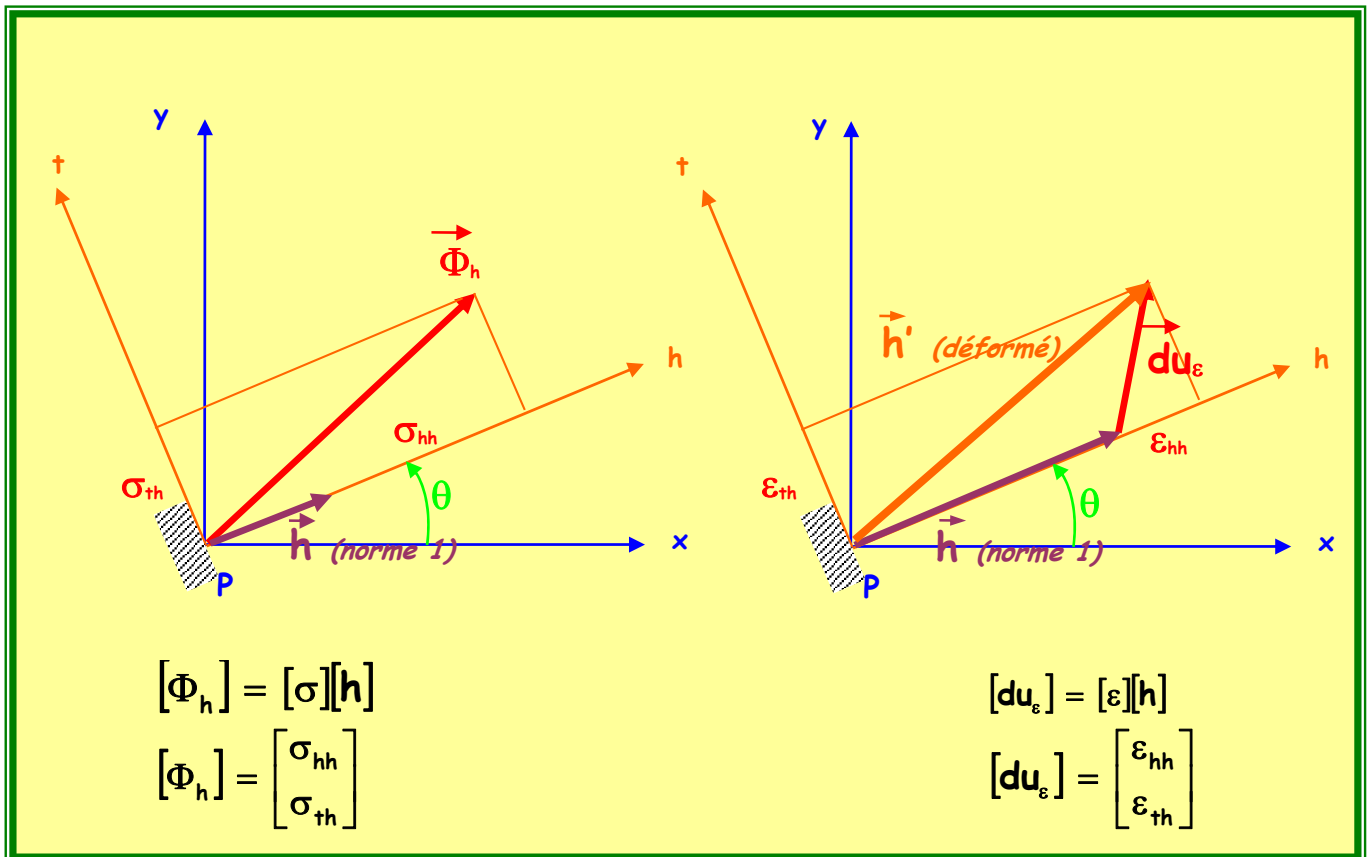
Dans le repère principal un cube infiniment petit de côté unité se transforme en un parallélépipède à faces rectangulaires.

$$[\varepsilon]_{XYZ} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

✚ NOTATION EN COLONNE POUR $[\varepsilon]$: $[\varepsilon]_{XYZ} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$

1.5. Etat de déformations planes :

Tout ce qui a été écrit à propos de l'état de contraintes planes est intégralement transposable à ce paragraphe consacré à l'état de déformations planes. Aucune démonstration ne sera donc faite dans ce paragraphe. Il suffit de faire le parallèle entre le vecteur contrainte $\vec{\Phi}_h$ et le vecteur différentiel $\vec{du}_\varepsilon$ quand la norme du vecteur qui se déforme $\vec{dx}$ vaut 1 ($\vec{dx} = \vec{h}$).



1.5.1. Définition :

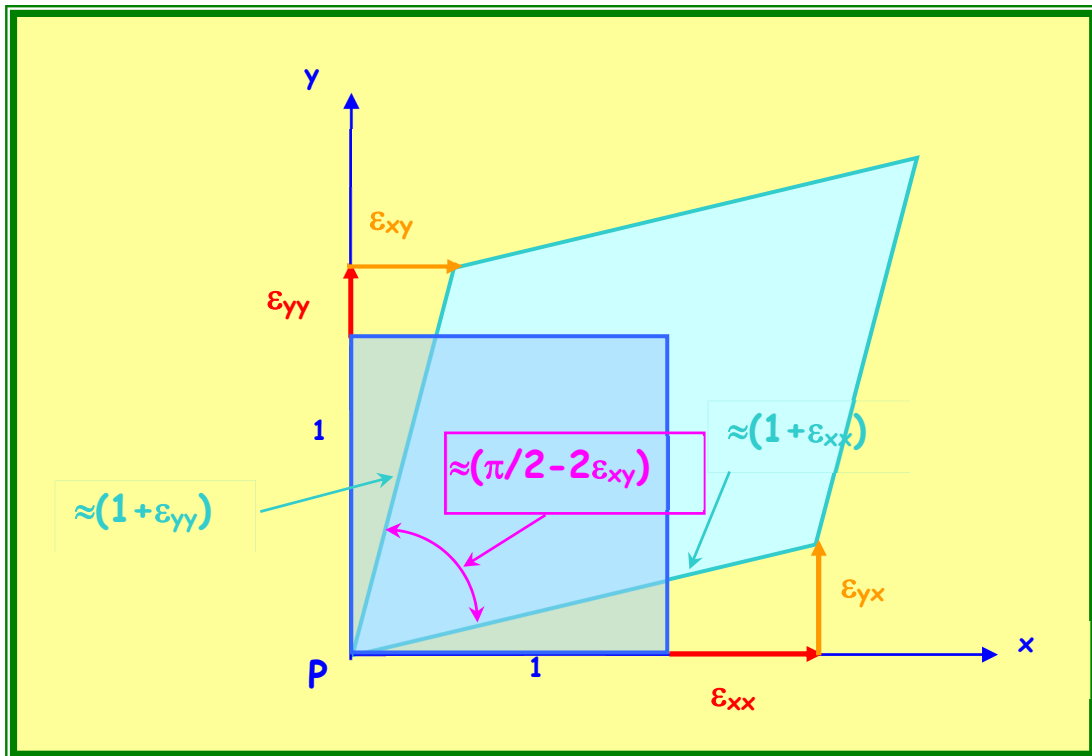
Un état de déformations planes est tel que toutes les déformations sont contenues dans un plan (xy par exemple).

La matrice des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

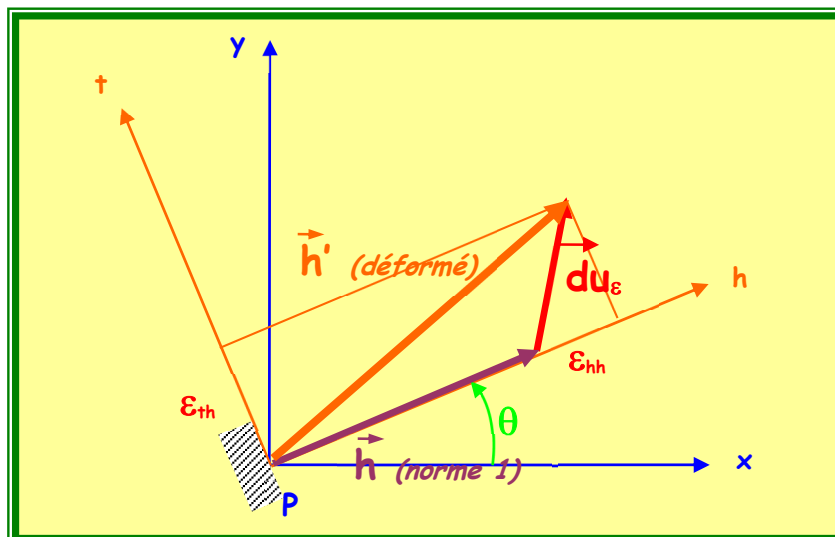
$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

La visualisation d'un état de déformations planes xy peut se faire à l'aide d'un carré de côté unité isolé dans le plan xy.



NB. Si $\varepsilon_{zz} \neq 0$ l'état de déformation est dit « pseudo plan » mais cet état est régi par les mêmes équations que l'état plan.

1.5.2. Expression des composantes de $\overrightarrow{du}_\varepsilon$ sur un repère ht lié au point P :



$$\begin{aligned}\varepsilon_{hh} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{th} &= -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

1.5.3. Eléments principaux des déformations :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 $\mathbf{z} \equiv \mathbf{Z}$

Déformation principale

Etant donnée la forme plane de la matrice on peut dire que 0 est une déformation principale et que l'axe z est un axe principal ($\mathbf{z} \equiv \mathbf{Z}$).

Le calcul se limite donc à la recherche des deux déformations principales (ε_x et ε_y) et des deux axes principaux (X et Y) dans le plan xy.

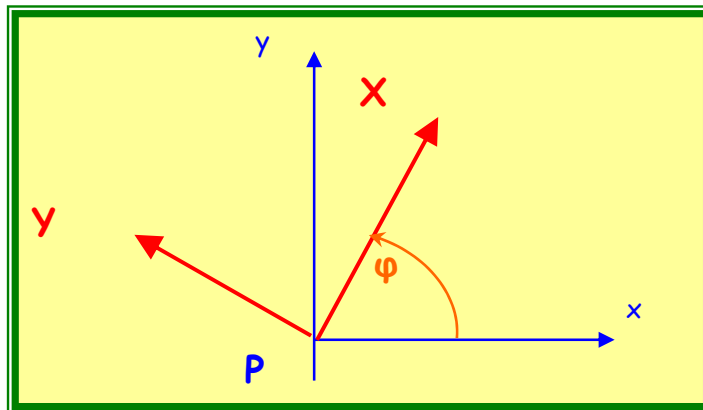
Le calcul donne :

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

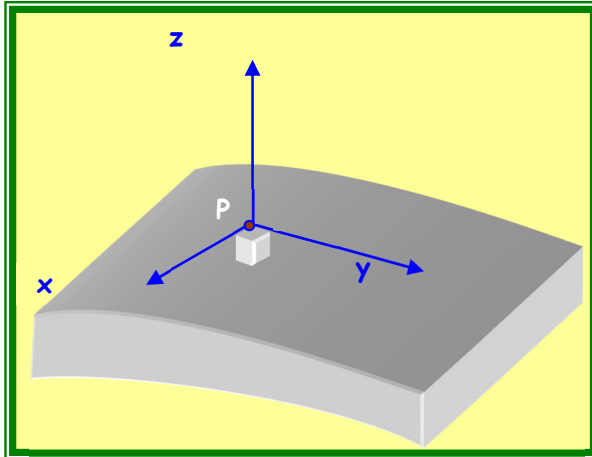
$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \quad \varphi = (1, X)$$



Le deuxième vecteur propre $\vec{Y}$ est perpendiculaire à $\vec{X}$ (de $+\frac{\pi}{2}$) dans le plan des déformations.

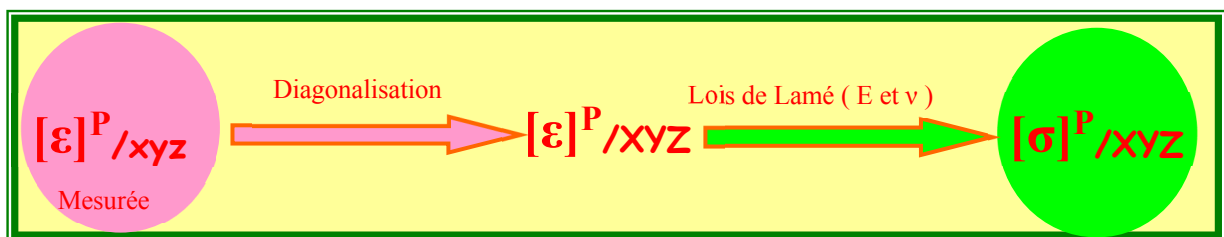
EXTENSOMÉTRIE

1. But :

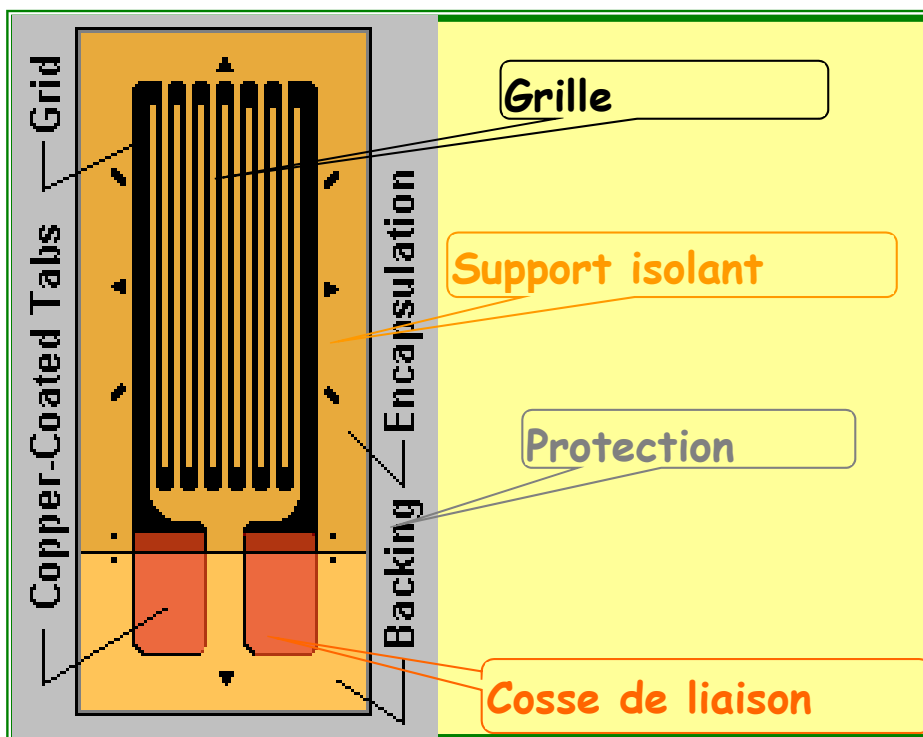


Détermination expérimentale d'un état plan de contrainte en un point P.

2. Principe :



3. Méthode :



Pour mesurer l'état de déformation au point P, on utilise des "jauges de déformation". Ce sont des résistances ($R=120\Omega$) très minces que l'on colle sur la structure au point P.

3.1 Une jauge de déformation est constituée d'une grille très fine ($2\mu\text{m}$) imprimé

selon une technique de photogravure sur un support isolant très mince ($30\mu\text{m}$). Le fil qui constitue la grille est généralement en constantan (Cu+Ni) qui est un alliage

dont la résistance est stable aux alentours de 20°C. Le support isolant est un polyimide.

3.2 Facteur de jauge :

Il est déterminé en traction.

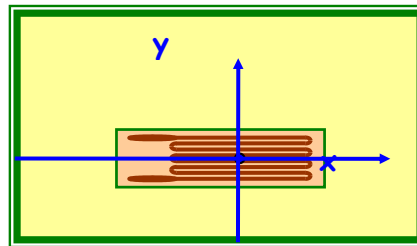
Les brins de la grille étant alignés suivant x, le fil subit une déformation de traction (comme s'il était tendu à ses extrémités). Le fil subit donc une déformation ε_{xx} suivant x et une déformation $-\nu\varepsilon_{xx}$ suivant y à cause de l'effet de POISSON.

La résistance du fil vaut :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta S}{S}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta D}{D} = -2\nu \frac{\Delta L}{L}$$



En outre, on montre que lors de la déformation la résistivité du fil varie de façon proportionnelle à son volume (loi de BRIDGMAN). C étant la constante de BRIDGMAN du matériau constituant le fil, on peut écrire :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = C \frac{\Delta V}{V} = C \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta S}{S} \right) = C(1 - 2\nu) \frac{\Delta L}{L}$$

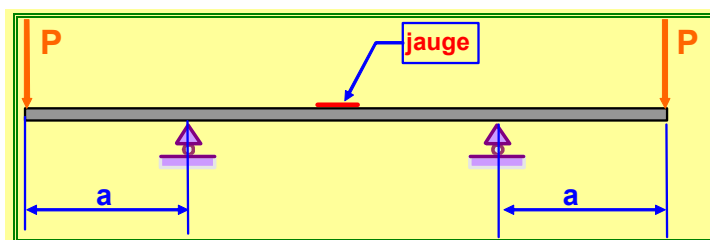
$$\frac{\Delta R}{R} = (C(1 - 2\nu) + (1 + 2\nu)) \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta L}{L}$$

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = K \varepsilon_{xx}}$$

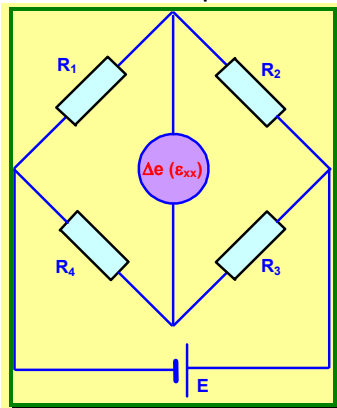
avec $K = C(1 - 2\nu) + (1 + 2\nu)$

La constante K est le facteur de jauge. Pour le constantan $C \approx 1.13$ et $\nu \approx 0.285 \Rightarrow K \approx 2.05$. La valeur de K donnée par le constructeur est déterminée expérimentalement en flexion 4 points par prélèvements statistiques. En flexion 4 points, la partie supérieure de la barre est soumise à de la traction.



3.3 Les instruments de mesure :

Pour mesurer la variation de résistance $\Delta R/R$ on utilise un pont de WHEATSTONE.
On montre que :



$$e = E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

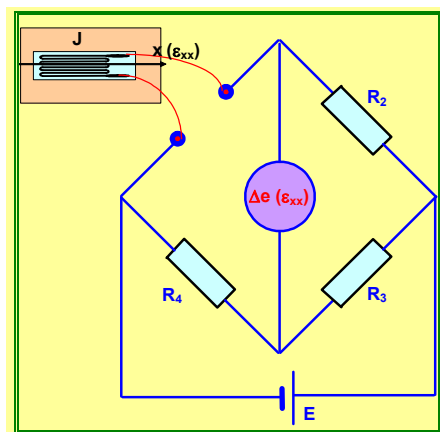
Le pont est dit en équilibre si $e=0 \Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$
Supposons que les quatre résistances varient. On obtient :

$$\Delta e = E \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right)$$

On remarque que deux résistances adjacentes agissent en sens opposé, tandis que deux résistances opposées agissent dans le même sens.

3.4 Les câblages :

Le câblage le plus simple est le "montage quart de pont - deux fils". On remplace une résistance du pont par une jauge J, de résistance R. Après avoir réalisé l'équilibre du pont ($e=0$) et déformé la structure sur laquelle est collée la jauge, la résistance de la jauge varie de ΔR . La tension de sortie Δe est donnée par :

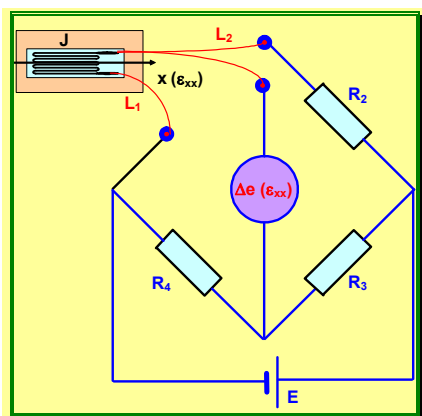


$$\Delta e = \frac{E}{4} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)$$

$$\Delta e = \frac{E}{4} (K \varepsilon_{xx})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{4}{KE} \Delta e$$

La valeur de ε_{xx} se lit directement sur le cadran du voltmètre en microdéformations ($1\mu d = 10^{-6}$ m/m).

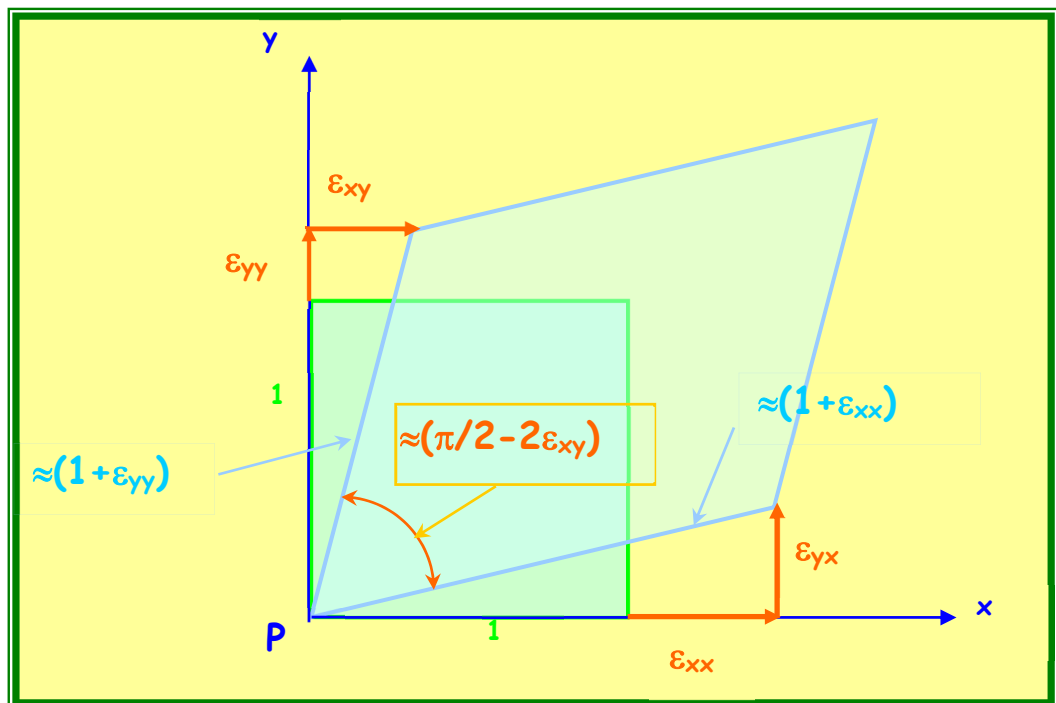


La dilatation des fils de liaison, si la température varie pendant la mesure, peut entraîner une erreur non négligeable. On utilise alors le "montage quart de pont - trois fils". Si $L_1 = L_2$ les variations de résistance des fils dues à des effets thermiques se compensent puisqu'ils sont situés dans deux branches adjacentes du pont.

3.5 Les effets parasites :

Le principal est la sensibilité latérale de la jauge. La résistance d'une jauge ne se modifie pas uniquement en raison de la déformation longitudinale ε_{xx} suivant l'axe de ses brins mais aussi, pour une faible part, en raison de la déformation transversale ε_{yy} . (en effet la jauge ne travaille pas, lorsqu'elle est collée sur une structure quelconque, dans les mêmes conditions que lors de son étalonnage en traction). On peut effectuer une correction de la déformation ε_{xx} en utilisant le facteur de sensibilité transversale K_t de la jauge (ce facteur est fourni par le constructeur).

4. Mesure de l'état de déformation à la surface d'un corps :



A la surface d'un corps la matrice des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

La déformation ε_{zz} n'est pas indépendante. Elle vaut :

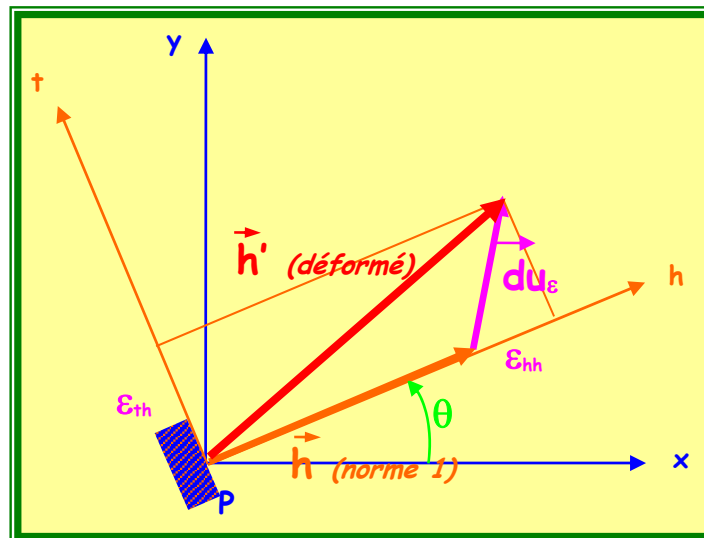
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

Au voisinage d'un point, et à la surface d'un corps, un carré infiniment petit de côté unité se transforme en un parallélogramme.

Il faut donc mesurer trois quantités pour définir complètement la déformation :

- ✱ ε_{xx} qui est la dilatation linéaire unitaire suivant l'axe x.
- ✱ ε_{yy} qui est la dilatation linéaire unitaire suivant l'axe y.
- ✱ ε_{xy} qui est la demi-distorsion γ_{xy} de l'angle droit xy.

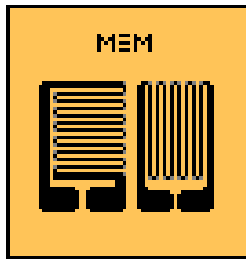
ε_{xx} et ε_{yy} peuvent se mesurer avec deux jauges placées suivant les axes x et y. La demi-distorsion ε_{xy} étant un angle, on ne peut pas la mesurer directement avec une jauge. On effectue une troisième mesure de dilatation linéaire unitaire dans le plan xy suivant un axe h.



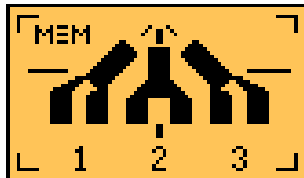
On a montré au § 3.5.3. que la dilatation linéaire unitaire ε_{hh} suivant l'axe h se calcule par :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

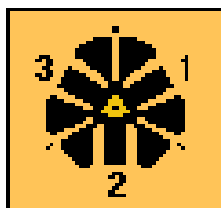
La relation précédente, dans laquelle ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{hh} sont mesurées et θ fixé, permet de calculer ε_{xy} .



0°-90°
"Tee"
Rosette



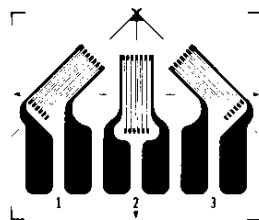
0°-45°-90°
Rectangular
Rosette



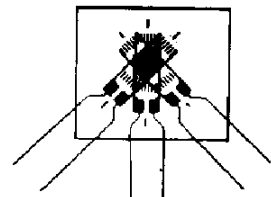
0°-60°-120°
Delta
Rosette

On utilise pour mesurer ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{hh} des dispositifs appelées "rosettes", constituées de trois jauges collées sur le même support et espacées angulairement de 45° ou 120°.

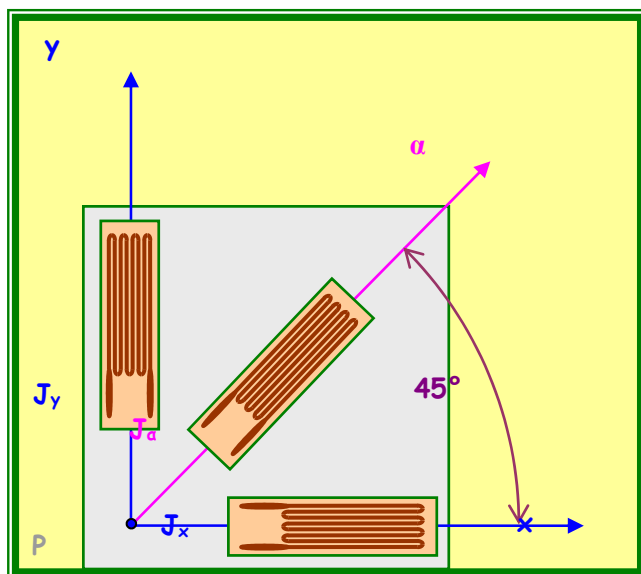
□ Rosette 45° (ou rosette rectangulaire) :



Jauges distinctes



Jauges superposées



Quantités mesurées

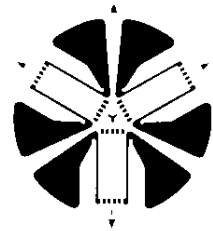
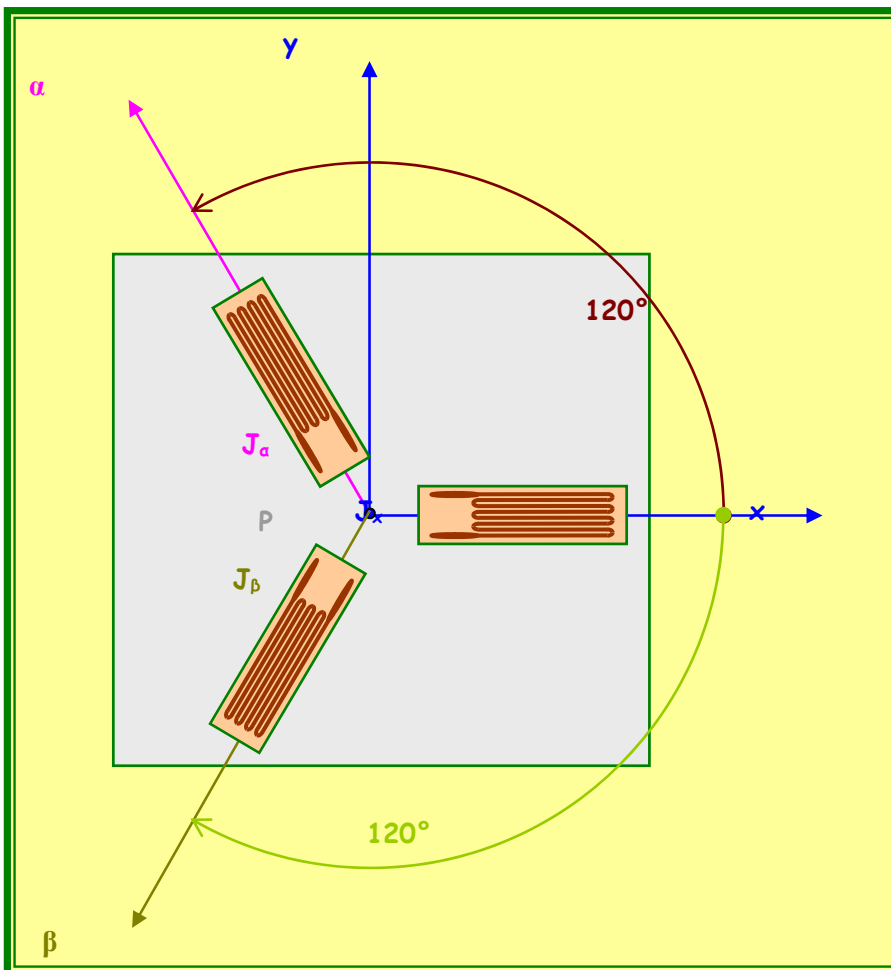
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=45^\circ} \end{cases}$$

De la relation : $\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$ on tire compte tenu que $\theta=45^\circ$:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx}}{2} + \frac{\varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{\alpha\alpha} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}$$

□ Rosette 120° (ou rosette delta) :



Quantités mesurées

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=120} \\ \varepsilon_{\beta\beta} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=-120} \end{cases}$$

De la relation : $\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$ on tire compte tenu que :

$$1^\circ) \theta = 120^\circ \rightarrow \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{xy}$$

$$2^\circ) \theta = -120^\circ \rightarrow \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{xx})$$

Pour les deux rosettes :

a) Les déformations principales se calculent par :

$$\varepsilon_X = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}$$

a) La position du repère principal dans le plan se calcule par :

$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \quad \varphi = (1, X)$$

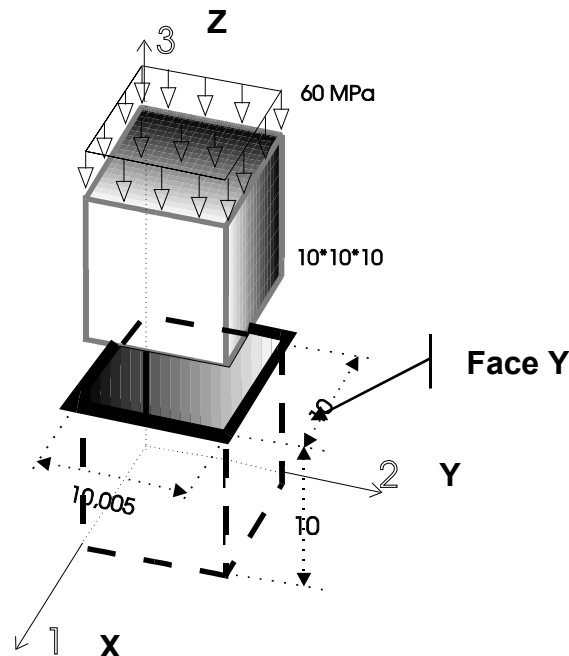
c) Les contraintes principales se calculent par les lois de Lamé dans un état de contraintes planes :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

3. LOIS DE COMPORTEMENT

PROBLÈME N°12



Dans une plaque supposée indéformable, on pratique un logement parallélépipédique de 10 mm par 10,005 mm par 10 mm. Dans ce logement, on introduit un cube en aluminium, qui lui est susceptible de se déformer.

Les côtés du cube d'aluminium valent 10 mm.

Les constantes élastiques de l'aluminium valent : $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 1/3$.

Le cube d'aluminium est comprimé sur sa face supérieure avec une pression de 60 MPa. Le frottement est négligé. Le repère XYZ est le repère principal des contraintes et des déformations.

1°) Le cube vient-il en contact avec la face Y du logement ?

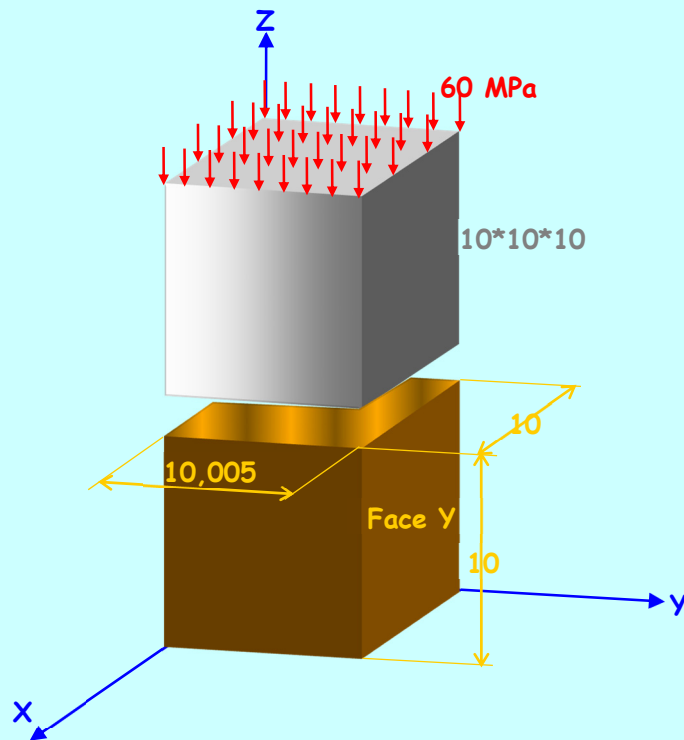
On supposera pour résoudre cette question que le cube vient en contact avec la face Y du logement. Donnez dans ces conditions les valeurs de ε_x , ε_y et σ_z , et calculez la contrainte σ_y .

Pour que le contact se réalise il faut que la contrainte σ_y soit négative.

Dans le cas contraire prendre $\sigma_y = 0$ puisqu'il n'y a pas contact et calculer σ_x , ε_y et ε_z .

2°) Quelle devrait être la valeur minimum de σ_z pour que le contact se réalise ?

REPONSES N°12



Ecrivons la loi de HOOKE $[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}tr[\sigma][I]$ sous forme développée et dans les axes principaux :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) & (1) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) & (2) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & (3) \end{cases}$$

Supposons que le cube vient en contact avec la face Y du logement . Dans ces conditions :

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = 5.10^{-4}$$

$$\sigma_z = -60MPa$$

$$\begin{cases} 0 = \left(\sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_y - 60) \right) & (1) \\ 5.10^{-4} = \frac{1}{70.10^3} \left(\sigma_y - \frac{1}{3}(-60 + \sigma_x) \right) & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_y - 60) & (1) \\ 35 = \sigma_y - \frac{1}{3}(-60 + \sigma_x) & (2) \end{cases}$$

La résolution des équations (1) et (2) conduit à : $\sigma_Y = 9,375 \text{ MPa}$

Cette contrainte étant positive, le contact ne se réalise pas.

Le contact ne se réalisant pas, prenons $\sigma_Y = 0$ et toujours $\varepsilon_X = 0$ et $\sigma_Z = -60 \text{ MPa}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sigma_X - \frac{-60}{3} \quad (1) \\ \varepsilon_Y = \frac{1}{70.10^3} \left(0 - \frac{1}{3} (-60 + \sigma_X) \right) \quad (2) \\ \varepsilon_Z = \frac{1}{70.10^3} \left(-60 - \frac{\sigma_X}{3} \right) \quad (3) \end{array} \right. \quad \text{La résolution donne :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_X = -20 \text{ MPa} \\ \varepsilon_Y = 381.10^{-6} \\ \varepsilon_Z = -762.10^{-6} \end{array} \right.$$

La valeur minimum de σ_Z pour que le contact se réalise conduit aux conditions :

$$\varepsilon_X = 0 \quad \varepsilon_Y = 5.10^{-4} \quad \sigma_Y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sigma_X - \frac{\sigma_Z}{3} \quad (1) \\ 5.10^{-4} = \frac{1}{70.10^3} \left(0 - \frac{1}{3} (\sigma_Z + \sigma_X) \right) \quad (2) \\ \varepsilon_Z = \frac{1}{70.10^3} \left(\sigma_Z - \frac{\sigma_X}{3} \right) \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\text{La résolution donne :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_X = -26,25 \text{ MPa} \\ \sigma_Z = -78,75 \text{ MPa} \\ \varepsilon_Z = -10^{-3} \end{array} \right.$$

La valeur minimum de σ_Z pour que le contact se réalise : $-78,75 \text{ MPa}$

PROBLÈME N°13

On donne une matrice de déformation dans les axes principaux :

$$[\varepsilon]_{XYZ} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Le matériau a comme caractéristiques : $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$.

Calculer la matrice des contraintes correspondante.

- En contraintes planes.
- En déformations planes.

REPONSES N°13

Ecrivons la loi de LAME:

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda \text{tr}[\varepsilon][I]$$

Sachant que : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Dans les axes principaux :

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) [I]$$

Ecrivons la loi de LAME en contraintes planes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecrivons la loi de LAME en déformations planes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{XYZ}^P + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_X + \varepsilon_Y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contraintes planes

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix} 10^{-6} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1000 - 200 + \varepsilon_Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix} 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800 + \varepsilon_Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \times 1000 \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800 + \varepsilon_Z) \cdot 10^{-6} & (1) \\ \sigma_Y = -\frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \times 200 \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800 + \varepsilon_Z) \cdot 10^{-6} & (2) \\ 0 = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \times \varepsilon_Z \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800 + \varepsilon_Z) \cdot 10^{-6} & (3) \end{cases}$$

De l'équation (3) nous tirons :

$$\varepsilon_Z = -343 \cdot 10^{-6}$$

Valeur reportée dans les équations (1) et (2) : $\sigma_X = 207 \text{ MPa}$ et $\sigma_Y = 22 \text{ MPa}$

$$[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 207 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad [\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -343 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Autre approche possible :

Dans des axes principaux :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_X + \nu \varepsilon_Y) \\ \sigma_Y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_Y + \nu \varepsilon_X) \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_Z = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_X + \varepsilon_Y)$$

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{200 \cdot 10^3}{1-0,3^2} (1000 + 0,3(-200)) \cdot 10^{-6} \\ \sigma_Y = \frac{200 \cdot 10^3}{1-0,3^2} (-200 + 0,3 \cdot 1000) \cdot 10^{-6} \end{cases} \quad \varepsilon_Z = \frac{-0,3}{0,7} (1000 - 200) \cdot 10^{-6}$$

Déformations planes

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1000 - 200) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^P = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \times 1000 \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800) \cdot 10^{-6} & (1) \\ \sigma_Y = -\frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \times 200 \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800) \cdot 10^{-6} & (2) \\ \sigma_Z = \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800) \cdot 10^{-6} & (3) \end{cases}$$

De la résolution du système nous tirons : $\sigma_X = 246 \text{ MPa}$; $\sigma_Y = 62 \text{ MPa}$; $\sigma_Z = 92 \text{ MPa}$

$$[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 246 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 0 \\ 0 & 0 & 92 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad [\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Vérification :

$$\sigma_Z = \nu(\sigma_X + \sigma_Y) \quad \sigma_Z = 0,3(246 + 62)$$

LOIS DE COMPORTEMENT

1. Relations Contraintes-Déformations

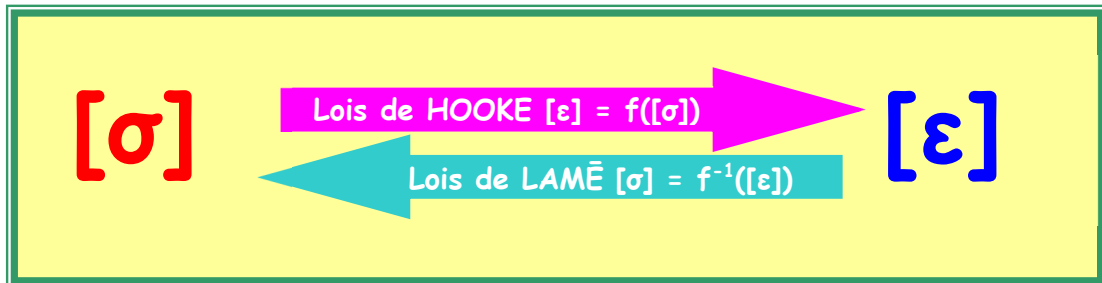
On cherche, dans ce paragraphe, à établir les relations entre la matrice des contraintes $[\sigma]$ et la matrice des déformations $[\varepsilon]$. On se place dans les axes principaux des contraintes et des déformations.

Le matériau est supposé homogène et isotrope.

E est le module de YOUNG⁵ du matériau (en MPa).

ν est son coefficient de POISSON⁶ (sans dimension)

G est son module de COULOMB⁷ (en MPa).



1.1. Elasticité à trois dimensions :

1.1.1. Lois de HOOKE⁸ :

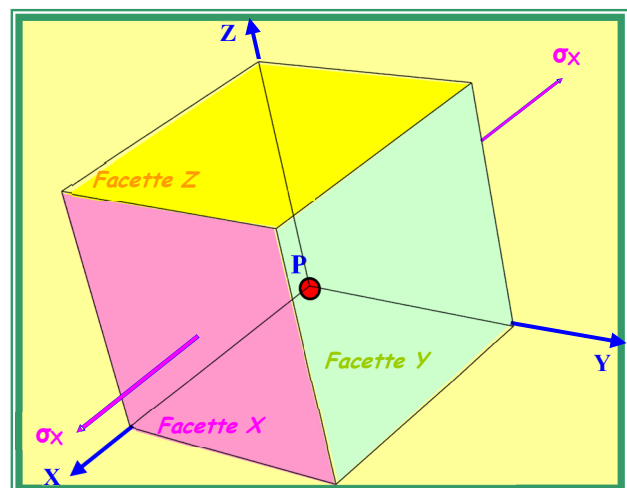
1°) Loi de HOOKE en traction uniaxiale :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

E est le module de YOUNG du matériau (en MPa).

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

ν est le coefficient de POISSON du matériau (sans dimension).



⁵ YOUNG Thomas 1773-1829)

⁶ POISSON Siméon-Denis (1781-1840)

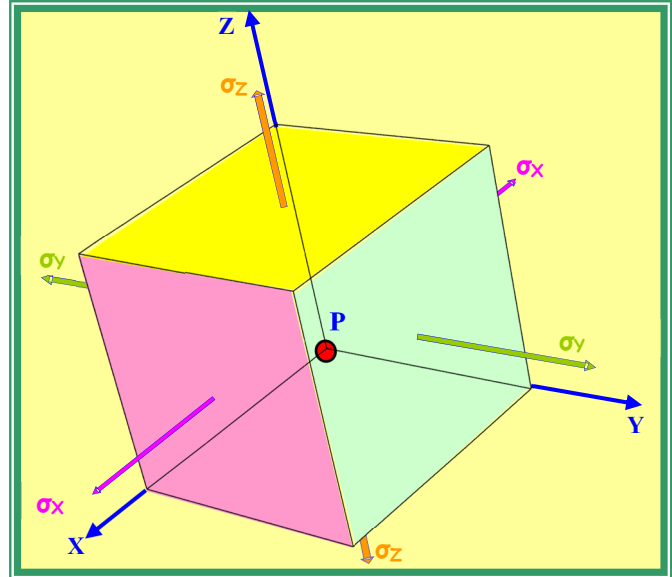
⁷ COULOMB Charles (1736-1806)

⁸ HOOKE Robert (1635-1703)

2°) Loi de HOOKE en traction triaxiale :

	ε_x	ε_y	ε_z
σ_x	σ_x/E	$-v\sigma_x/E$	$-v\sigma_x/E$
σ_y	$-v\sigma_y/E$	σ_y/E	$-v\sigma_y/E$
σ_z	$-v\sigma_z/E$	$-v\sigma_z/E$	σ_z/E

Par superposition, on obtient :



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - v(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y))$$

En introduisant la trace de la matrice $[\sigma]$ ($\text{tr}[\sigma] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$) les relations précédentes s'écrivent :

$$\varepsilon_x = \frac{1+v}{E} \sigma_x - \frac{v}{E} \text{tr}[\sigma]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+v}{E} \sigma_y - \frac{v}{E} \text{tr}[\sigma]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1+v}{E} \sigma_z - \frac{v}{E} \text{tr}[\sigma]$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{xyz} = \frac{1+v}{E} \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{xyz} - \frac{v}{E} \text{tr}[\sigma] [I]$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est la matrice unité.}$$

3°) Invariance de la loi de HOOKE :

Nous allons montrer que la forme de la loi de HOOKE est indépendante du repère. Prenons la trace des deux membres de la loi de HOOKE. Compte tenu que la trace de $[\mathbf{I}]$ vaut 3, on trouve la relation entre les traces de $[\varepsilon]$ de $[\sigma]$:

$$[\varepsilon]_{xyz} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma]_{xyz} - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][\mathbf{I}]$$

$$\text{tr}[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} \text{tr}[\sigma] - 3 \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma]$$

$$\text{tr}[\varepsilon] = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}[\sigma]$$

La trace de la matrice des déformations $\text{tr}[\varepsilon]$ est invariante (c'est la dilatation volumique). E et ν sont des constantes physiques qui ne dépendent pas du repère où elles sont calculées puisque le matériau est isotrope. La trace de la matrice $[\sigma]$ est donc invariante. La loi de HOOKE qui a été établie dans le repère principal conserve donc la même forme quel que soit le repère.

$$[\varepsilon]_{xyz} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma]_{xyz} - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma][\mathbf{I}]$$

4°) Module de COULOMB G du matériau :

La relation entre ε_{xy} et σ_{xy} tirée de la loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \quad \text{Or en torsion on a :} \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}$$

D'où :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G est le module de COULOMB (en MPa) du matériau.

1.1.2. Lois de LAMÉ⁹:

C'est la présentation sous forme inverse des lois de HOOKE. La relation de HOOKE s'inverse facilement compte tenu de la relation entre les traces des matrices des contraintes et des déformations.

La loi de HOOKE s'écrit :

$$[\varepsilon] = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] [I]$$

Compte tenu de la relation entre les trace de $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$:

$$\text{tr}[\varepsilon] = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr}[\sigma]$$

Nous obtenons en reportant dans la loi de HOOKE :

$$[\varepsilon] = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \frac{E}{1 - 2\nu} \text{tr} [\varepsilon] [I]$$

$$[\sigma] = \frac{E}{1 + \nu} [\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{tr}[\varepsilon] [I]$$

Ou encore sous une autre forme en introduisant le module de COULOMB G et le module de LAMÉ λ :

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda \text{tr}[\varepsilon] [I]$$

G est le module de COULOMB (en MPa)

λ est le module de LAMÉ (en MPa)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

⁹ LAMÉ Gabriel (1795-1870)



NOTATION EN COLONNE POUR $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$:

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad [\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

La loi de LAMÉ $[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}[\varepsilon][I]$ s'écrit sous forme développée dans des axes quelconques x,y,z :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1+\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1+\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1+\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{zx} \end{aligned}$$

On peut écrire les relations précédentes sous cette forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [C][\varepsilon]$$

La matrice symétrique $[C]$ est la matrice des constantes élastiques du matériau.

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

SYM

La loi de HOOKE $[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] [I]$ s'écrit dans des axes quelconques x,y,z sous forme développée :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}))$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx}$$

On peut écrire les relations précédentes sous cette forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = [C]^{-1}[\sigma]$$

La matrice symétrique $[C]^{-1}$ est la matrice inverse des constantes élastiques $[C]$ du matériau.

$$[C]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

1.2. Elasticité à deux dimensions : SYM

1.2.1. Etat de contraintes planes :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'application de la loi de HOOKE $[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] [I]$ montre que la matrice des déformations aura la forme :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

La matrice des contraintes est plane, mais celle des déformations ne l'est pas.

Le développement la dernière ligne de la loi de HOOKE permet de calculer ε_z :

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] [I] \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma]$$

Or compte tenu de la relation entre les traces des matrices des contraintes et des déformations : $\text{tr} [\sigma] = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr} [\varepsilon]$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

La déformation ε_z suivant une perpendiculaire au plan des contraintes n'est donc pas indépendante.

NOTATION EN COLONNE POUR $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

La loi de LAMÉ $[\sigma] = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}[\varepsilon][I]$ s'écrit sous forme développée dans des axes quelconques x,y,z :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$$

On peut écrire les relations précédentes sous cette forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [C][\varepsilon]$$

La matrice symétrique $[C]$ est la matrice en contraintes planes des constantes élastiques du matériau.

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

SYM

La loi de HOOKE $[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] [\mathbf{I}]$ s'écrit dans des axes quelconques x,y,z sous forme développée :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

On peut écrire les relations précédentes sous cette forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = [\mathbf{C}]^{-1} [\sigma]$$

La matrice symétrique $[\mathbf{C}]^{-1}$ est la matrice inverse, en contraintes planes, des constantes élastiques $[\mathbf{C}]$ du matériau.

$$[\mathbf{C}]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

SYM

1.2.2. Etat de déformations planes :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'application de la loi de LAMÉ $[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}[\varepsilon][I]$ montre que la matrice des contraintes aura la forme :

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

La matrice des déformations est plane, mais celle des contraintes ne l'est pas.

Le développement la dernière ligne de la loi de LAMÉ permet de calculer σ_z :

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}[\varepsilon][I]$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Or compte tenu de la relation entre les traces des matrices des contraintes et des déformations :

$$\text{tr}[\varepsilon] = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}[\sigma]$$

On trouve après calculs :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

La contrainte σ_z suivant une perpendiculaire au plan des déformations n'est donc pas indépendante.

La démonstration de la forme des matrices symétrique $[C]$ et $[C]^{-1}$, en déformations planes, est identique à celle qui a été faite en contraintes planes. On montre que :

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[C]^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.3. Liaisons contraintes planes - déformations planes :

DÉFORMATION PLANE ($w=0$)CONTRAINTE PLANE ($\Phi_z=0$)

$$[u] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[C]^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

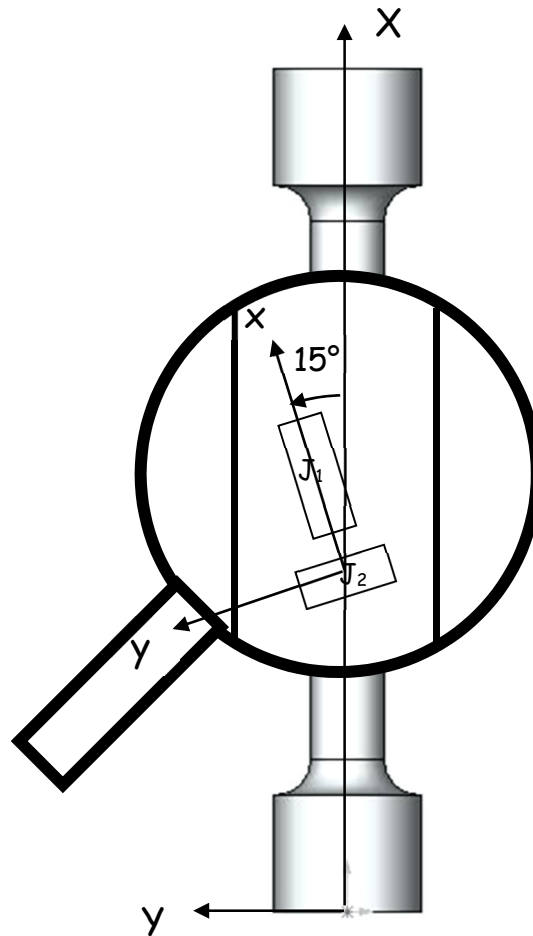
$$[C]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

On montre facilement que pour passer de l'état de contraintes planes à celui de déformations planes il suffit de changer :

$$E \text{ en } \frac{E}{1 - \nu^2}$$
$$\nu \text{ en } \frac{\nu}{1 - \nu}$$

4. PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLÈME N°14



Un expérimentateur maladroit colle une rosette de déformations sur une éprouvette en vue d'un essai de traction. La rosette est constituée de 2 jauges à 90°: J_1 & J_2 . L'axe de la jauge J_2 n'est pas comme prévu collée suivant l'axe de traction, mais elle fait un angle de 15° avec cet axe. Il décide de ne pas reprendre le collage et de réaliser l'essai de traction en vue de caractériser le matériau constituant l'éprouvette.

Pour une force de traction de 10 000 N, les mesures réalisées indiquent :

$$J_1 \rightarrow 553.10^{-6}$$

$$J_2 \rightarrow -129.10^{-6}$$

Le diamètre de l'éprouvette est de 10 mm.

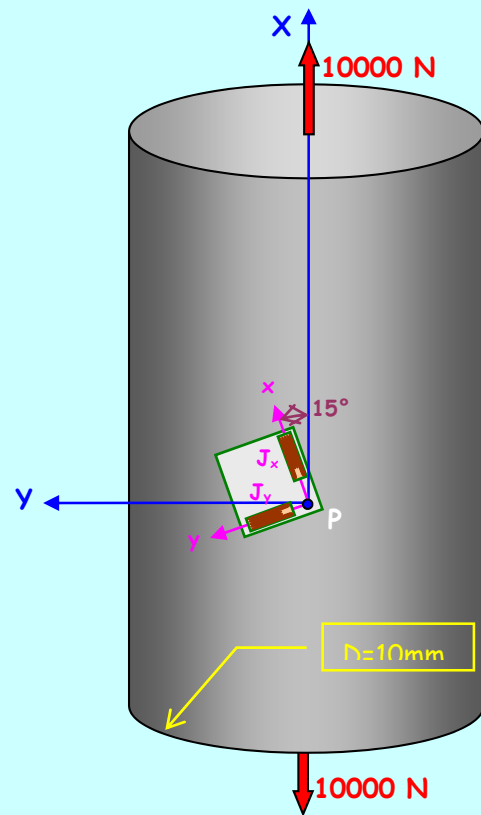
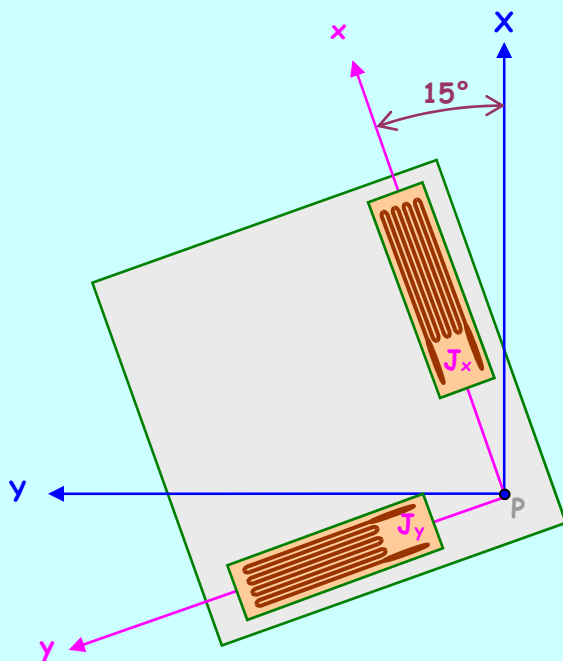
1°) Ecrire la forme littérale de la matrice des déformations dans le repère de la rosette xyz et dans le repère de l'éprouvette XYZ.

2°) Calculer les déformations longitudinales suivant l'axe x, suivant l'axe y, ainsi que la distorsion de l'angle droit (x,y).

3°) Ecrire la matrice des déformations dans le repère (x,y,z).

4°) Calculer la contrainte de traction, en déduire le module de YOUNG ainsi que le coefficient de POISSON du matériau.

REPONSES N°14



Matrice de déformation, dans le repère de la rosette xyz : $[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

Matrice de déformation, dans le repère de l'éprouvette XYZ : $[\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}$

Les déformations longitudinales suivant l'axe x , et suivant l'axe y , sont mesurées directement par les jauges J_x et J_y :

$$\varepsilon_{xx} = 553 \cdot 10^{-6} \text{ et } \varepsilon_{yy} = -129 \cdot 10^{-6}$$

La distorsion de l'angle droit (x, y) peut être calculée à partir de la relation :

$$\varepsilon_{th} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$$

En effet faisons coïncider les axes ht avec les axes de l'éprouvette XY.

$$\varepsilon_{XY} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin(-30) + \varepsilon_{xy} \cos(-30)$$

Or la distorsion angulaire dans les axes principaux est nulle : $\varepsilon_{xy}=0$

$$0 = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin(-30) + \varepsilon_{xy} \cos(-30) ; \quad 0 = -\frac{553+129}{2} \sin(-30) + \varepsilon_{xy} \cos(-30)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\frac{553+129}{2} \sin(-30)}{\cos(-30)} ; \quad \varepsilon_{xy} = -196,87 \cdot 10^{-6} \text{ d'où la distorsion angulaire : } \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = -393,74 \cdot 10^{-6}$$

D'où la matrice de déformation dans le repère xyz de la rosette :

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 553 & -197 & 0 \\ -197 & -129 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

Calcul de la contrainte de traction : $\sigma_X = \frac{N_X}{A} = \frac{10000}{\pi 5^2} = 127,3 \text{ MPa}$

Détermination du module de YOUNG :

Utilisons la loi de HOOKE en traction pure : $\sigma_X = E \varepsilon_X$

Nous devons donc calculer la déformation longitudinale de l'éprouvette :

$$\begin{aligned} \varepsilon_X &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(-30) + \varepsilon_{xy} \sin(-30) \\ \varepsilon_X &= \frac{553-129}{2} + \frac{553+129}{2} \cos(-30) - 197 \sin(-30) = 606 \mu d \\ E &= \frac{\sigma_X}{\varepsilon_X} = \frac{127,3}{606 \cdot 10^{-6}} \quad E = 210100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Détermination du coefficient de POISSON :

Utilisons la loi de POISSON : $\nu = -\frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_X}$

Nous devons donc calculer la déformation transversale de l'éprouvette :

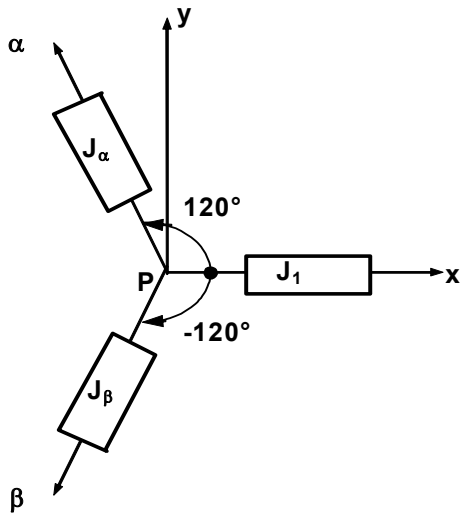
La trace de la matrice de déformation étant le premier invariant :

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z = 553 - 129 + \varepsilon_{zz} = 606 + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z \quad \varepsilon_Y = -182 \mu d$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_X} = \frac{182}{606} \quad \nu = 0,3$$

Détermination du module de COULOMB : $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad G = 80807 \text{ MPa}$

PROBLÈME N°15



On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'exerce aucune force extérieure. On mesure dans le plan tangent à la surface, les dilatations linéaires unitaires suivant les trois axes x , α et β choisis comme l'indique la figure ci-contre (rosette à 120°). Les résultats des mesures sont :

jauge J_1 : $200 \cdot 10^{-6}$

jauge J_α : $80 \cdot 10^{-6}$

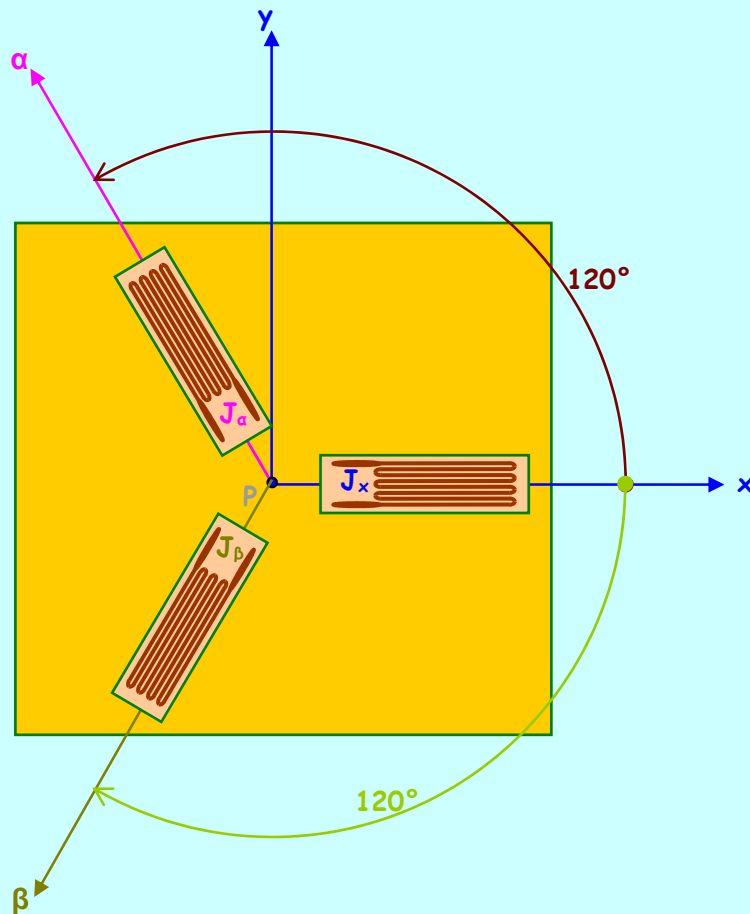
jauge J_β : $-40 \cdot 10^{-6}$

1°) Calculer ε_{xy} et ε_{yy} .

2°) Déterminer graphiquement avec le cercle de MOHR les dilatations principales et les axes principaux.

3°) $E = 200000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ calculer la matrice des contraintes dans les axes principaux.

REPONSES N°15



Les jauges J_x , J_a et J_β mesurent directement les dilatations unitaires suivant les axes $x\alpha\beta$

$$\text{Les quantités mesurées} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=120} \\ \varepsilon_{\beta\beta} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=-120} \end{cases}$$

Nous devons « dépouiller » la rosette, afin de déterminer la dilatation linéaire suivant l'axe y , ainsi que la demi distorsion angulaire xy .

Utilisons la relation : $\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$ en faisant coïncider h avec la direction α puis avec la direction β .

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=120} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(2.120) + \varepsilon_{xy} \sin(2.120) \\ \varepsilon_{\beta\beta} = (\varepsilon_{hh})_{\theta=-120} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(-2.120) + \varepsilon_{xy} \sin(-2.120) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{xy} \end{cases} \quad \text{la résolution du système :} \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{xx}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{-40 - 80}{\sqrt{3}} = -69,28 \mu d \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{3}(2.80 - 2.40 - 200) = -40 \mu d$$

La matrice de déformation dans les axes xyz est donc : $[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 200 & -69,28 & 0 \\ -69,28 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$

Détermination graphique, à l'aide du cercle de MOHR des déformations, des éléments principaux.

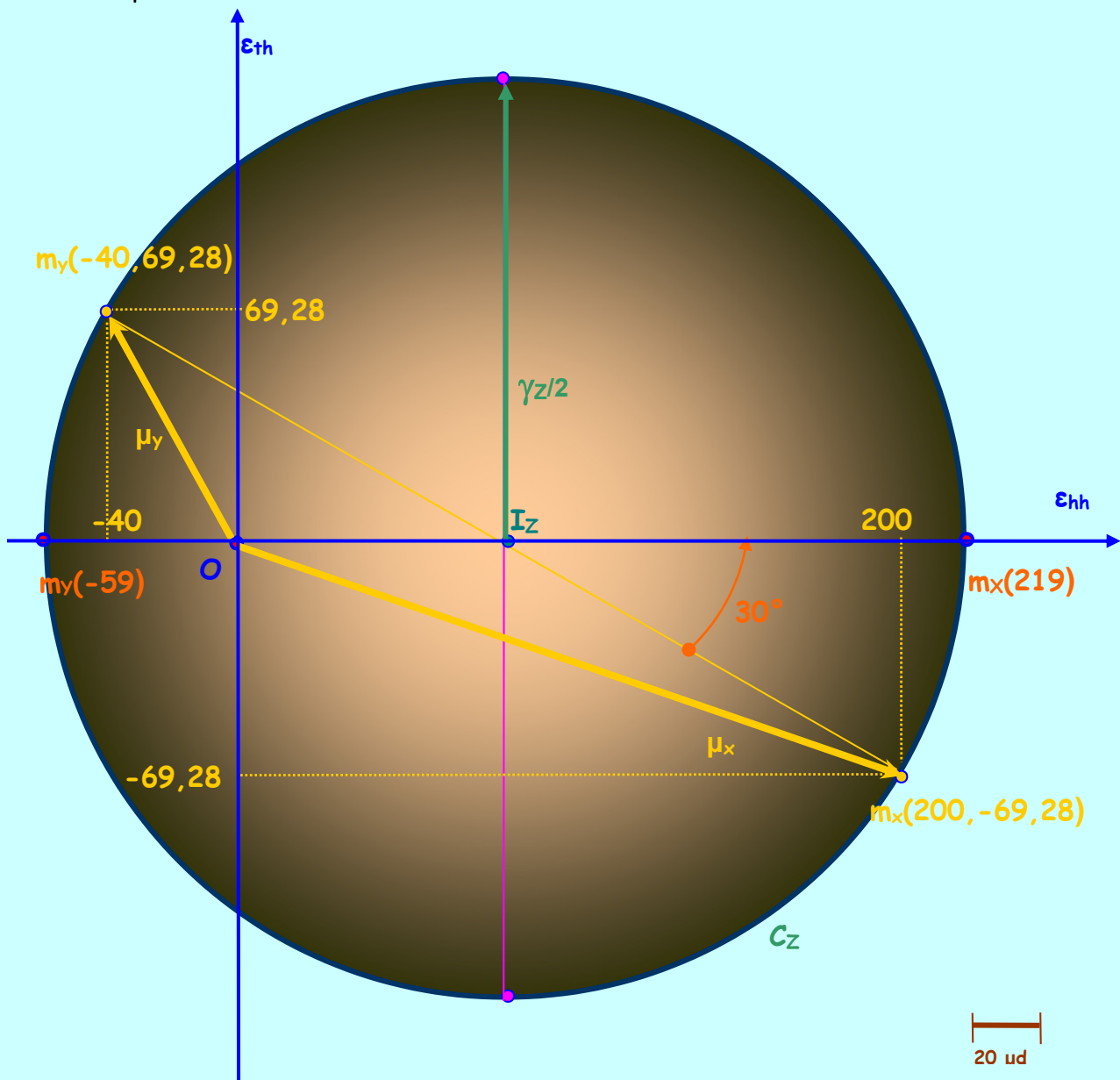
La technique est identique à celle que nous avons développé sur les contraintes. Les deux approches « contraintes et déformations » sont en effet régies par les mêmes lois quadratiques.

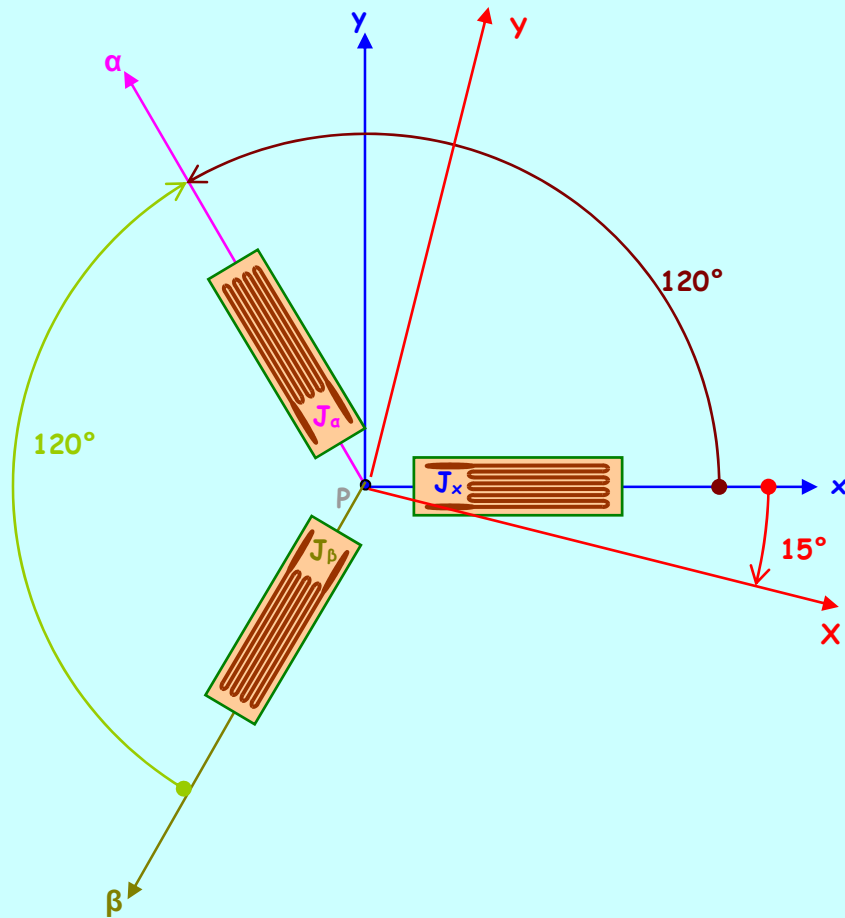
Les directions x et y sont orthogonales, et nous devons construire le cercle à partir de la connaissance des trois valeurs

$$\varepsilon_{xx} = 200 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{yy} = -40 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{xy} = -69,28 \cdot 10^{-6}$$

$$[\mu_x]_{xyz} = \begin{bmatrix} 200 \\ -69,28 \\ 0 \end{bmatrix} \mu d \quad [\mu_y]_{xyz} = \begin{bmatrix} -69,28 \\ -40 \\ 0 \end{bmatrix} \mu d$$

- 1) Tracer les axes ε_{hh} et ε_{th} et adopter une échelle $1\text{cm}=10\mu d$
- 2) Positionner les points $m_x(200,-69.28)$ et $m_y(-40,69.28)$.
- 3) Tracer le diamètre $m_x m_y$ du cercle. Son intersection avec l'axe des abscisses donne le centre du cercle I_z .
- 4) Tracer le cercle C_z de centre I_z et de rayon $I_z m_x$.
- 5) Les intersections du cercle C_z avec l'axe des abscisses donnent les points m_x et m_y qui « matérialisent » les facettes principales du plan des déformations. $\overline{Om_x} = 219 = \varepsilon_x$
 $\overline{Om_y} = -59 = \varepsilon_y \quad 2\psi = -30^\circ$
- 6) Toutes les autres réponses sont obtenues en positionnant les points sur le cercle qui « matérialisent » les directions associées et en mesurant les valeurs correspondantes, compte tenu de l'échelle.





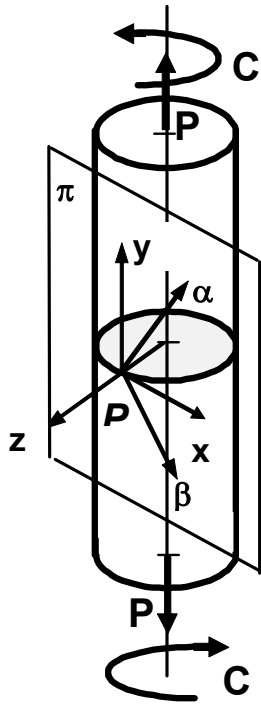
La matrice de déformation dans les axes XYZ est donc : $[\varepsilon]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 219 & 0 & 0 \\ 0 & -59 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \mu d$

Matrice des contraintes dans les axes principaux :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y) \\ \sigma_Y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X) \end{cases}; \quad \begin{cases} \sigma_X = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(219 - 0,3 \cdot 59)10^{-6} \\ \sigma_Y = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2}(-59 + 0,3 \cdot 219)10^{-6} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sigma_X = 44,24 \text{ MPa} \\ \sigma_Y = 1,47 \text{ MPa} \end{cases}$$

La matrice des contraintes dans les axes XYZ est donc : $[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 44,24 & 0 & 0 \\ 0 & 1,47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

PROBLÈME N°16



Considérons un point P situé à la surface d'un cylindre de rayon R soumis à une force de traction P et à un couple de torsion M. Le plan π est tangent en P au cylindre. Le matériau est isotrope de constantes élastiques E et ν .

1°) Calculer les élongations unitaires $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ($x, \beta = +45^\circ$) et $\varepsilon_{\beta\beta}$ ($x, \beta = -45^\circ$) suivant les directions α et β dues à :

- a) P ($\varepsilon_{\alpha\alpha}$ et $\varepsilon_{\beta\beta}$ en fonction de P, R, E et ν)
- b) M ($\varepsilon_{\alpha\alpha}$ et $\varepsilon_{\beta\beta}$ en fonction de M, R, E et ν)
- c) P et M

2°) En déduire les expressions de P et M en fonction de R, E, ν , $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ et $\varepsilon_{\beta\beta}$.

3°) Application numérique :

R = 10 mm, E = 200 GPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_e = \sigma_e' = 240$ MPa,

$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 100 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_{\beta\beta} = 50 \cdot 10^{-6}$

Calculer P en N, M en Nm et le coefficient de sécurité en appliquant le critère de VON MISES.

REPONSES N°16

La section G est soumise à un effort normal de traction P, et à un couple de torsion $M_t = C$.

Le plan π est tangent en P au cylindre.

Il est donc orienté par la normale extérieure z.

Les axes xy et $\alpha\beta$ sont donc situés dans le plan π .

Pour calculer $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, utilisons la relation :

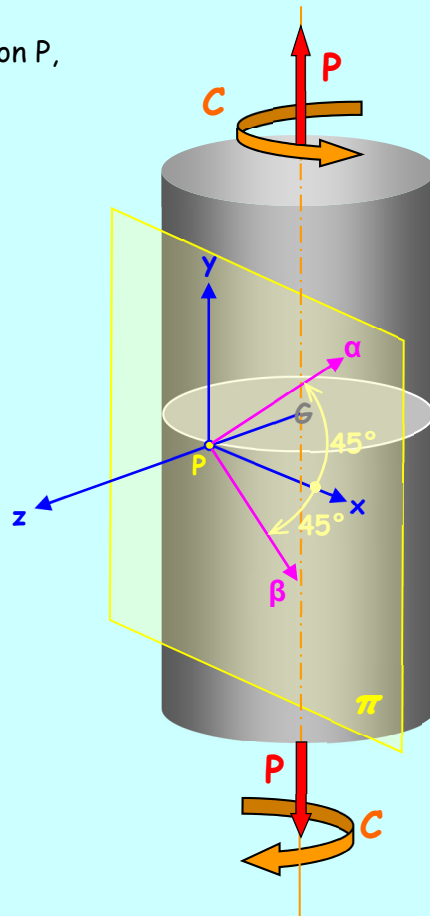
$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

en faisant coïncider h avec α .

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 90 + \varepsilon_{xy} \sin 90$$

D'où :
$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

De même :
$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \varepsilon_{xy}$$



Calcul des élongations unitaires suivant α et β due à P :

Le cylindre est donc soumis à de la traction pure. Les axes x , et y sont donc principaux, et la demie distorsion angulaire ε_{xy} est nulle. La loi de HOOKE, $\sigma_y = E\varepsilon_y$ ainsi que la loi de

POISSON, $\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$ nous permettent d'écrire :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} = \frac{P}{EA} = \frac{P}{E\pi R^2} ; \quad \varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{P}{E\pi R^2} ; \quad \varepsilon_{xy} = 0$$

D'où :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} = \frac{-\nu \frac{P}{E\pi R^2} + \frac{P}{E\pi R^2}}{2} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu)$$

La demie distorsion angulaire ε_{xy} étant nulle, le résultat est identique pour la direction β .

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu) \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu)$$

Calcul des élongations unitaires suivant α et β due à $M_t = C$:

Le cylindre est donc soumis à de la torsion pure. Les axes α , et β sont donc principaux, La loi de HOOKE en torsion, $\tau = G\gamma$ et compte tenue que dans les axes xy le point P est en cisaillement pur, nous pouvons écrire :

$$\tau = G\gamma = \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} ; \quad ; \tau = \frac{M_t R}{I_G} = \frac{CR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2C}{\pi R^3} ; \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} ; \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = \frac{\frac{2C}{\pi R^3}}{2G} = \frac{C}{G\pi R^3} ; \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy} ; \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{C}{G\pi R^3}$$

Pour la direction β :

$$\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{xy} ; \quad \varepsilon_{\beta\beta} = -\frac{C}{G\pi R^3}$$

La relation liant les 3 constantes élastiques $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ entraîne :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3} \quad \varepsilon_{\beta\beta} = -\frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3}$$

Calcul des élongations unitaires suivant α et β due à P et $M_T=C$:

Il nous suffit de superposer les résultats précédents :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu) + \frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3} \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu) - \frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3}$$

Calcul de P et $M_T=C$ en fonction de R , E , ν , $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, et $\varepsilon_{\beta\beta}$:

Nous obtenons donc un système de 2 équations, qu'il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu) + \frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3} \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{P}{2E\pi R^2}(1-\nu) - \frac{2C(1+\nu)}{E\pi R^3} \end{cases} \quad \text{En ajoutant puis en retranchant les 2 équations, nous}$$

tirons :

$$P = \frac{E\pi R^2}{1-\nu}(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) \quad C = \frac{E\pi R^3}{4(1+\nu)}(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta})$$

Application numérique :

$$P = \frac{E\pi R^2}{1-\nu}(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) = \frac{200 \cdot 10^3 \pi 10^2}{1-0,3}(100+50) \cdot 10^{-6} = 13464 N \quad \mathbf{P=13464 N}$$

$$C = \frac{E\pi R^3}{4(1+\nu)}(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta}) = \frac{200 \cdot 10^3 \pi 10^3}{4(1+0,3)}(100-50) \cdot 10^{-6} = 6041,5 Nmm \quad \mathbf{C=6,04 Nm}$$

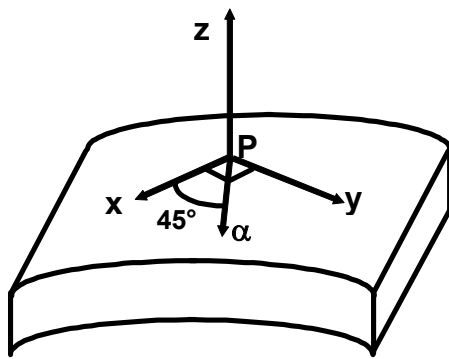
Pour calculer le coefficient de sécurité, il nous faut calculer les contraintes :

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{13464}{\pi 10^2} = 42,86 MPa \quad \tau = \frac{2C}{\pi R^3} = \frac{2 \cdot 6041}{\pi 10^3} = 3,85 MPa$$

Appliquons le critère de VON MISES dans le cas des poutres : $\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{éq}}^{VM}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} = \frac{240}{\sqrt{42,86^2 + 3 \cdot 3,85^2}} = 5,53 \quad \mathbf{\alpha = 5,53}$$

PROBLÈME N°17



Soit un point P situé à la surface d'un corps en un endroit où ne s'exerce aucune force extérieure.

La matrice des contraintes dans le repère xyz (où z est la normale extérieure au corps, et où x et y sont dans le plan tangent au corps) vaut en MPa:

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} 80 & -15 & 0 \\ -15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

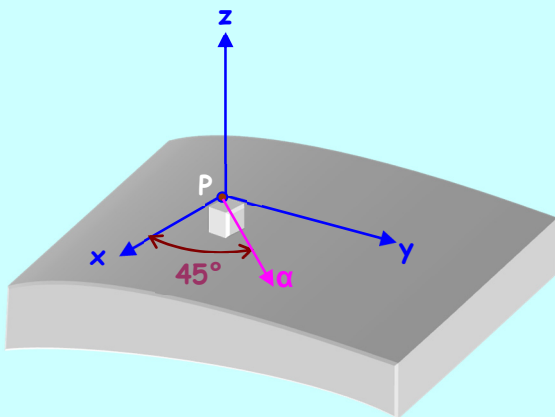
1°) Etude des contraintes au point P .

- Représenter l'état de contraintes sur les faces d'un cube infiniment petit isolé en P .
- Calculer la contrainte normale s'exerçant sur une facette dont la normale α est la bissectrice de xy .
- Déterminer les éléments principaux des contraintes.
- Calculer le cisaillement maximum en module au point P .
- On veut un coefficient de sécurité de 3 par rapport au critère de VON MISES. Calculer la limite élastique du matériau.

2°) Etude des déformations au point P .

On colle une rosette 45° x, α, y au point P . Calculer la valeur des dilatations que l'on doit mesurer suivant les axes x , α et y sachant que $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$.

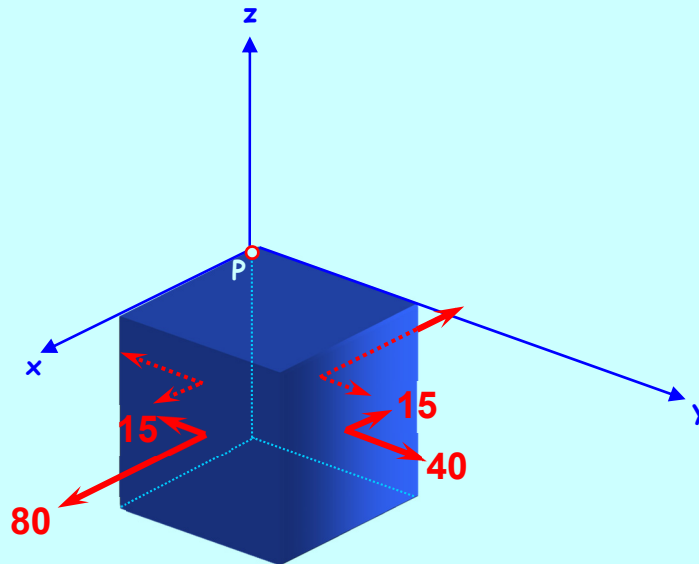
REPONSES N°17



$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 80 & -15 & 0 \\ -15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Etude des contraintes au point P.

Représentation de l'état des contraintes en P sur les faces d'un cube infiniment petit isolé dans les axes xyz.



La facette z est perpendiculaire au plan tangent xy de la surface du corps. En l'absence de force extérieure agissant en P, le vecteur contrainte Φ_z est nul, d'où la représentation dans le plan xy.

Soit une facette α décalée de 45° par rapport à x.

Calculons la contrainte normale $\sigma_{\alpha\alpha}$ s'exerçant sur cette facette

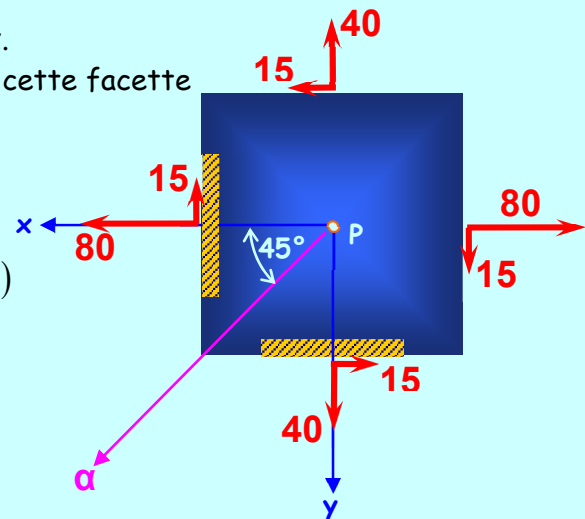
Compte tenu de la relation : $\sigma_{hh} = {}^t[h][\sigma][h]$

En faisant coïncider h avec α :

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2.45^\circ) + \sigma_{xy} \sin(2.45^\circ)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sigma_{xy} = \frac{80 + 40}{2} - 15 = 45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 45 \text{ MPa}$$



Eléments principaux des contraintes :

Etat plan de contraintes : la facette z est donc principale et $\sigma_z = 0$. Les 2 autres valeurs

propres sont données par : $\sigma_x^y = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$

$$\sigma_x^y = \frac{80 + 40}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(80 - 40)^2 + 4 \cdot 15^2}$$

$$\sigma_x = 85 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 35 \text{ MPa}$$

La direction propre X est calculée par $\tan \varphi = \frac{\sigma_X - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$ avec $\hat{\varphi} = (\vec{x}, \vec{X})$

$$\tan \varphi = \frac{85 - 80}{-15} \text{ d'où } \hat{\varphi} = -18^\circ 43' = (\vec{x}, \vec{X})$$

La matrice des contraintes dans les axes principaux : $[\sigma]_{XYZ}^P = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

Le cisaillement maximum est égal à la plus grande demie différence des contraintes principales. Dans notre cas : $\tau_{\max} = \tau_Y = \frac{\sigma_X - \sigma_Z}{2} = \frac{85 - 0}{2} \quad \tau_{\max} = 42,5 \text{ MPa}$

La contrainte $\sigma_{\text{équ}}^{VM}$ en 2D compte tenu que $\sigma_Z = 0$ s'écrit : $\sigma_{\text{équ}}^{VM} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y}$

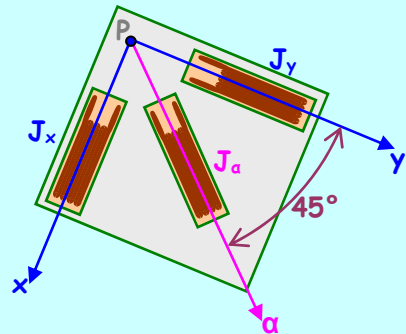
Le coefficient de sécurité : $\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{équ}}^{VM}} \Rightarrow \sigma_e = \alpha \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y}$

$$\sigma_e = 3 \sqrt{85^2 + 35^2 - 85 \cdot 35} \quad \sigma_e = 222 \text{ MPa}$$

Etude des déformations au point P

Connaissant la matrice des contraintes, et les constantes élastiques du matériau nous utilisons les lois de HOOKE pour calculer la matrice de déformation:

$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \frac{1+\nu}{E} [\sigma]_{xyz}^P - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma] [I]$$



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz}^P = \frac{1+0,3}{200 \cdot 10^3} \begin{bmatrix} 80 & -15 & 0 \\ -15 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{xyz}^P - \frac{0,3}{200 \cdot 10^3} (80 + 40) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecrivons les équations 1, 2, et 4 :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{200 \cdot 10^3} (80 - 0,3 \cdot 40) = 340 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{200 \cdot 10^3} (40 - 0,3 \cdot 80) = 80 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+0,3}{200 \cdot 10^3} (-15) = -97,5 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{340 + 80}{2} - 97,5 = 112,5 \mu d$$

La mesure effectuée par la jauge x : 340 μd

La mesure effectuée par la jauge y : 80 μd

La mesure effectuée par la jauge α : 112,5 μd

Remarque :

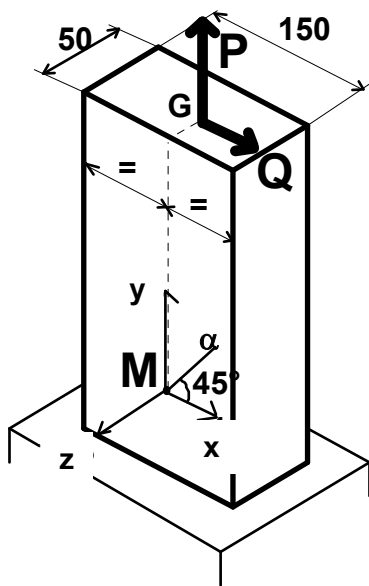
La relation de HOOKE $[\varepsilon]_{xyz}^p = \frac{1+\nu}{E} [\sigma]_{xyz}^p - \frac{\nu}{E} tr[\sigma] [I]$ est valable quelque soit le système d'axes puisque matricielle. Il est donc possible de passer par les axes principaux.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Z \end{bmatrix}_{XYZ}^p = \frac{1+0,3}{200 \cdot 10^3} \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{xyz}^p - \frac{0,3}{200 \cdot 10^3} (85 + 35) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En écrivant les équations 1, et 2 il est possible de calculer: ε_X ε_Y , puis d'en déduire les valeurs mesurées par les 3 jauges, en utilisant la relation :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \cos 2\theta$$

PROBLÈME N°18



Deux forces P et Q sont appliquées simultanément au centre de gravité de la section droite libre d'une poutre encastree. Une rosette rectangulaire collée au point M indique :

$$\varepsilon_{xx} = -30 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 205 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{yy} = 100 \cdot 10^{-6}$$

Le module de YOUNG du matériau vaut 200 GPa.

1°) Déterminer la matrice des contraintes au point M dans le repère xyz en fonction de P , Q et A .

On rappelle que la contrainte tangentielle due à Q vaut $3Q/2A$ au point M .

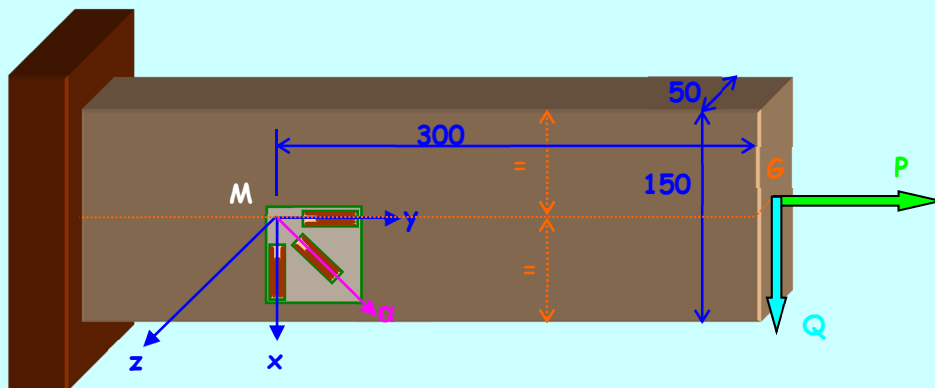
2°) Déterminer les expressions littérales de ε_{xx} , ε_{yy} et $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ en fonction de P , Q , A , E et ν .

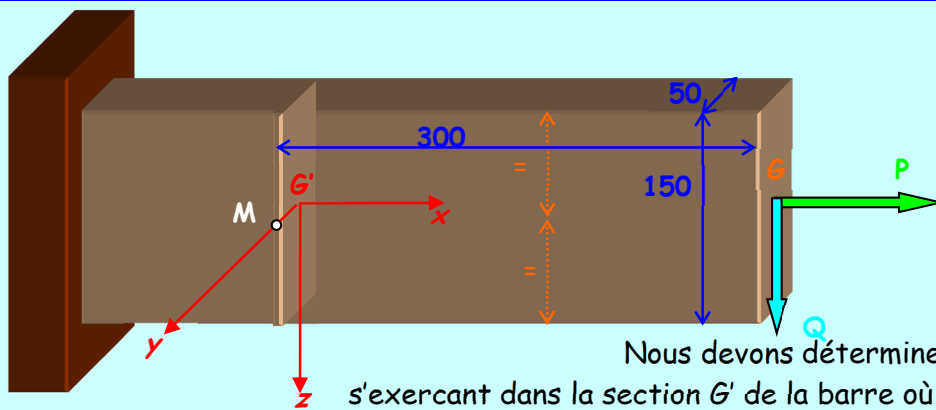
3°) En déduire les valeurs numériques :

a) du coefficient de POISSON ν .

b) des forces P et Q (en kN).

REponses N°18

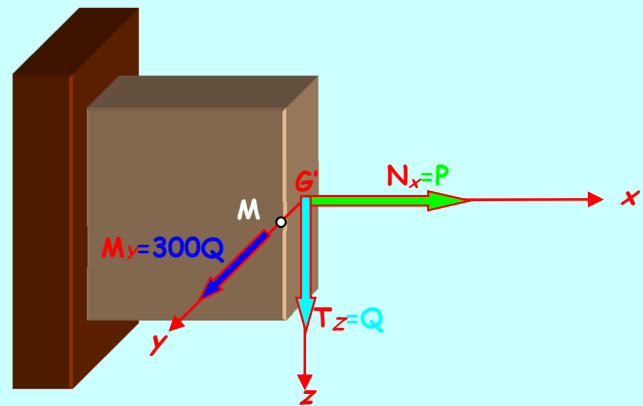




Considérons le système d'axes G'/xyz de la théorie des poutres

Torseur de section en G' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{G'} = \vec{F}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = +P \\ 0 \\ T_z = +Q \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_{G'} = \vec{G'G} \wedge \vec{F}_G \Rightarrow \begin{cases} M_y = 300Q \\ 0 \\ 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



La section G' est donc soumise à de la traction-flexion-cisaillement

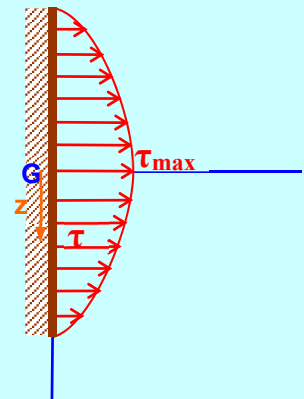
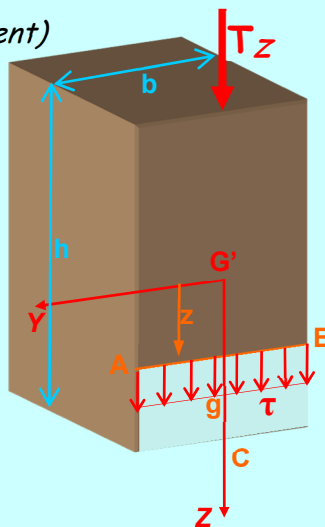
Rappels du cours F213 : (Effort Normal-Flexion)

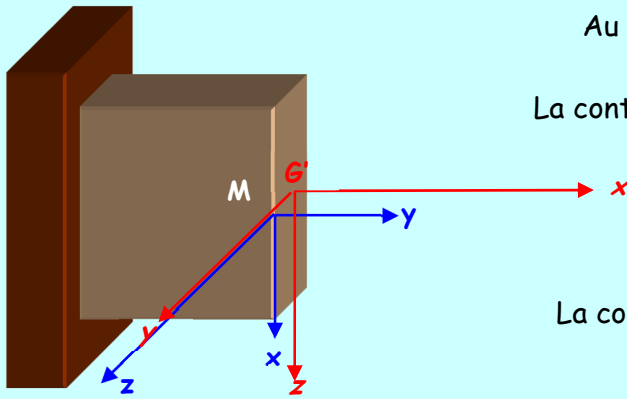
La contrainte normale en un point P quelconque de la section G' vaut : $\sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} Z^P$

Or le point M est situé sur l'axe neutre de flexion : $Z_M = 0$ d'où $\sigma_{xx}^M = \frac{N_x}{A} = \frac{P}{A}$

Rappels du cours F213 : (Cisaillement)

$$\tau_{\max} = \frac{3T_z}{2A}$$





Au point M, dans les axes xyz liés à la rosette :

La contrainte normale due à l'effort de traction P :

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{A}$$

La contrainte tangentielle due au cisaillement Q :

$$\sigma_{xy} = \frac{3Q}{2A}$$

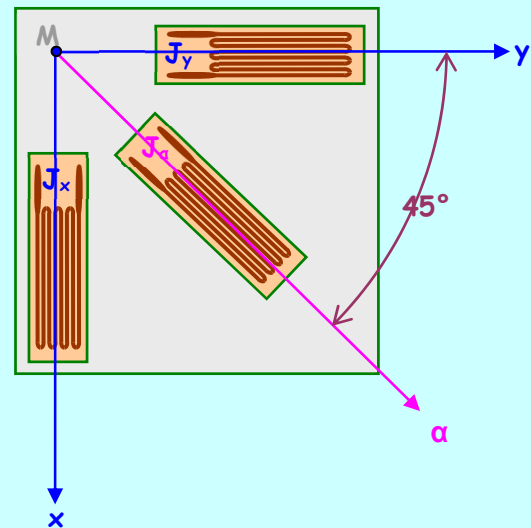
D'où la matrice des contraintes au point M : $[\sigma]_{xyz}^M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3Q}{2A} & 0 \\ \frac{3Q}{2A} & \frac{P}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$

La mesure effectuée par les jauges donne :

$$\varepsilon_{xx} = -30 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 205 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{yy} = 100 \cdot 10^{-6}$$



Utilisons la loi de HOOKE :

$$[\varepsilon]_{xyz}^P = \frac{1+\nu}{E} [\sigma]_{xyz}^P - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I]$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3Q}{2A} & 0 \\ \frac{3Q}{2A} & \frac{P}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{xyz} - \frac{\nu}{E} \frac{P}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecrivons les équations 1, 2, et 4 :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(-\nu \frac{P}{A} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\frac{P}{A} \right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{3Q}{2A} \right) \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\frac{1}{E} \left(-\nu \frac{P}{A} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{P}{A} \right)}{2} + \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{3Q}{2A} \right)$$

D'où :

$$\varepsilon_{xx} = -\nu \frac{P}{EA}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{P}{EA}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{P}{2EA} (1-\nu) + \frac{3Q}{2EA} (1+\nu)$$

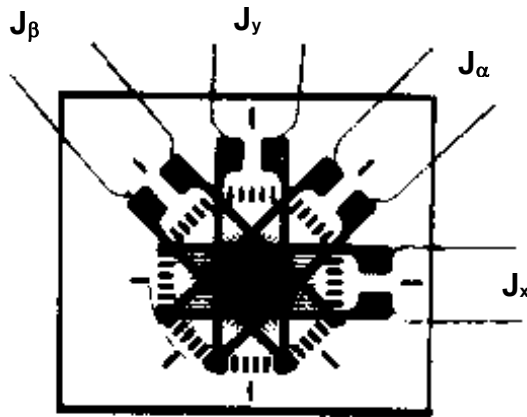
Application Numérique :

$$\varepsilon_{xx} = -\nu \frac{P}{EA} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{yy} \quad \nu = 0,3$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{P}{EA} \Rightarrow P = \varepsilon_{yy} EA \quad P = 150 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{P}{2EA} (1-\nu) + \frac{3Q}{2EA} (1+\nu) \quad Q = 130,77 \text{ kN}$$

PROBLÈME N°19



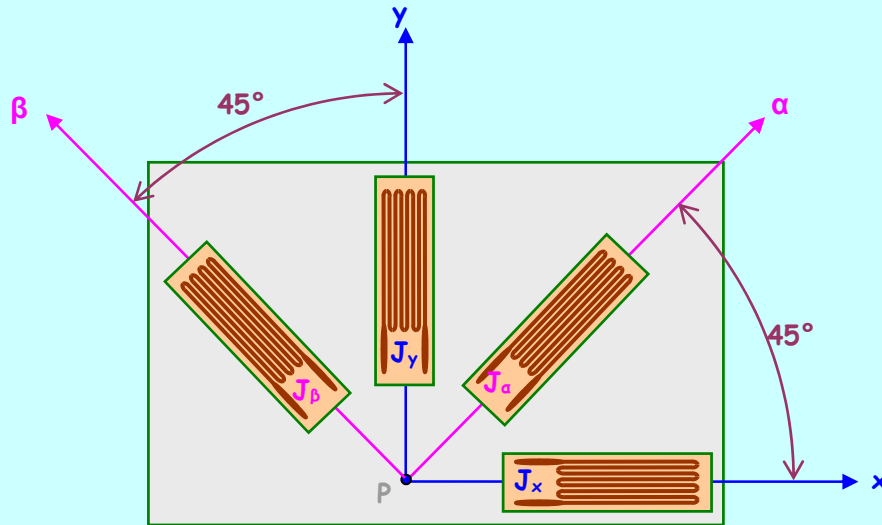
Une rosette 45° (x, α, y, β) à quatre jauges (avec une quatrième jauge β perpendiculaire à la jauge centrale α) est collée en un point P situé à la surface d'un corps en un endroit où ne s'exerce aucune force extérieure (l'état de contraintes est plan). Les mesures indiquées par les trois jauges J_x , J_α , et J_β sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 10^{-3} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} &= +1.2 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= -0.4 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

La jauge J_y ne donne aucune indication.

- 1°) Montrez que : $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}$. En déduire la valeur de ε_{yy} .
- 2°) Déterminez l'expression littérale de la déformation linéaire unitaire $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ en fonction de ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{xy} . En déduire la valeur numérique de ε_{xy} .
- 3°) Le matériau a comme caractéristiques : $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 1/3$. Calculez la déformation linéaire unitaire ε_{zz} (on rappelle que l'état de contraintes est plan), puis la matrice des contraintes $[\sigma]$ dans le repère xyz .
- 4°) Déterminez, **avec le cercle de MOHR**, les éléments principaux des contraintes dans le plan xy (précisez l'angle entre x et X) et la valeur du cisaillement maximum en module.
- 5°) Calculez la contrainte équivalente de VON MISES.

REPONSES N°19



La forme de la matrice de déformation est : $[\varepsilon]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$ ou $[\varepsilon]_{\alpha\beta z}^P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} & \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta} & \varepsilon_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

Utilisons le premier invariant linéaire de la matrice ε : $I_{1\varepsilon} = \text{tr}[\varepsilon]$.

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} + \varepsilon_{zz}$$

$$\text{D'où : } \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{xx} ; \quad \varepsilon_{yy} = (1,2 - 0,4 - 1)10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yy} = -0,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{hh} = {}^t[h][\varepsilon][h] \text{ avec h coïncidant avec } \alpha : \varepsilon_{\alpha\alpha} = {}^t[\alpha][\varepsilon][\alpha], \text{ et } [\alpha] = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = {}^t[\alpha][\varepsilon][\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{\alpha\alpha} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} = \left(1,2 - \frac{1 - 0,2}{2}\right)10^{-3} \quad \varepsilon_{xy} = 0,8 \cdot 10^{-3}$$

Ecrivons la loi de LAME en contraintes planes :

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda \text{tr}[\varepsilon][I]$$

Sachant que :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$[\sigma] = \frac{E}{(1+\nu)}[\varepsilon] + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}[\varepsilon][I]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{200.10^3}{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} 10^{-3} + \frac{\frac{1}{3}200.10^3}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-2\frac{1}{3}\right)} (0,8 + \varepsilon_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

En l'absence de force extérieure s'appliquant au point, la contrainte σ_{zz} est nulle.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,5 \begin{bmatrix} 100 & 80 & 0 \\ 80 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + 1,5(80 + \varepsilon_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecrivons la troisième équation : $\sigma_{zz} = 0 = 1,5\varepsilon_{zz} + 1,5(80 + \varepsilon_{zz})$ **$\varepsilon_{zz} = -0,4.10^{-3}$**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,5 \begin{bmatrix} 100 & 80 & 0 \\ 80 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} + 60 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 120 & 0 \\ 120 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 210 & 120 & 0 \\ 120 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$[\sigma]_{xyz}^P = \begin{bmatrix} 270 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

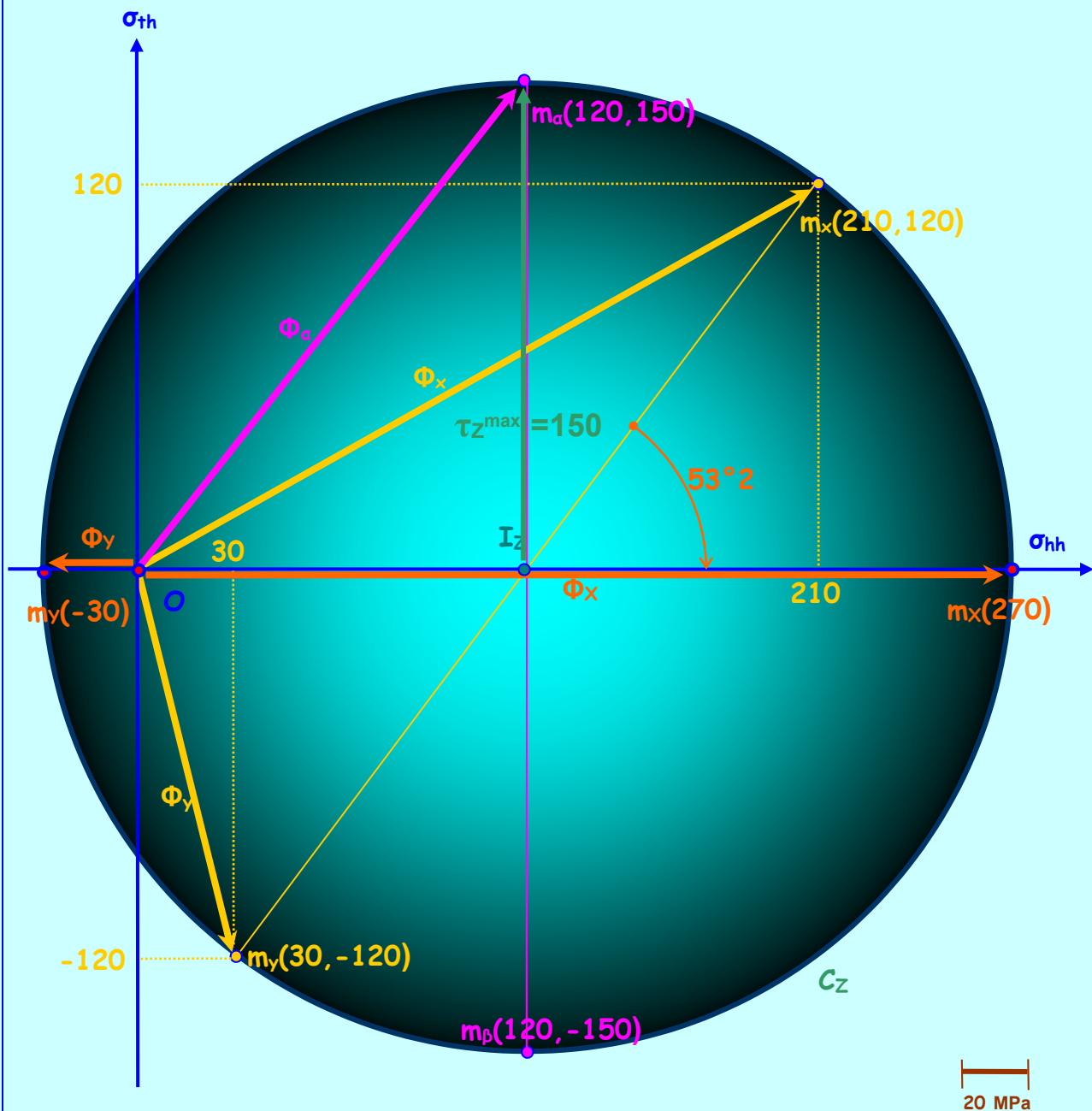
La contrainte σ_{equ}^{VM} en 2D compte tenu que $\sigma_z=0$ s'écrit : $\sigma_{\text{equ}}^{VM} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y}$

$$\sigma_{\text{equ}}^{VM} = \sqrt{270^2 + 30^2 + 270.30}$$

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM} = 286,2 \text{ MPa}$$

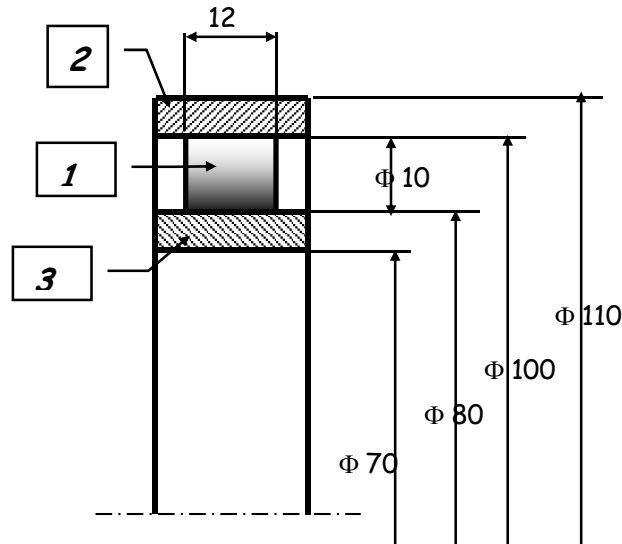
Éléments principaux, en utilisant le cercle de MOHR

- Les facettes x et y sont orthogonales :
- Tracer les axes σ_{hh} et σ_{th} et adopter une échelle 1cm=20MPa
- Positionner les points $m_x(210,120)$ et $m_y(30,-120)$
- Tracer le diamètre $m_x m_y$ du cercle. Son intersection avec l'axe des abscisses donne le centre du cercle I_Z
- Tracer le cercle C_Z de centre I_Z et de rayon $I_Z m_x$
- Les intersections du cercle C_Z avec l'axe des abscisses donnent les points m_x et m_y qui « matérialisent » les facettes principales du plan des contraintes. $\overline{Om_x} = 270 = \sigma_x$
 $\overline{Om_y} = -30 = \sigma_y \quad 2\psi = -53^\circ 2$
- Toutes les autres réponses sont obtenues en positionnant les points sur le cercle qui « matérialisent » les facettes associées et en mesurant les valeurs correspondantes, compte tenu de l'échelle



5. CONTACT DE HERTZ

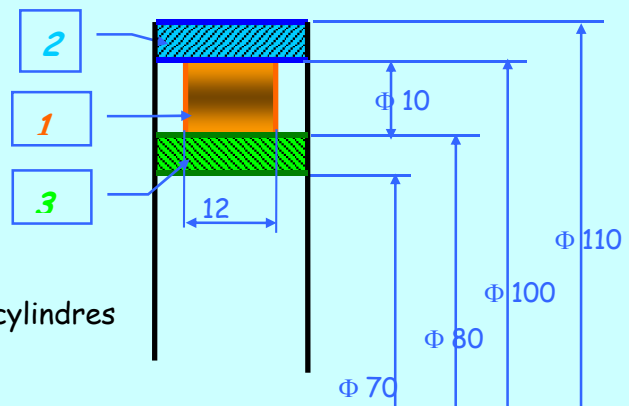
PROBLÈME N°20



Le roulement à une rangée de rouleaux est un roulement SNR NU 1014 M. Le diamètre des rouleaux est de 10mm. La charge statique que peut supporter le roulement est donnée par le constructeur : $P=67000$ N. On admet que cette charge s'applique sur trois rouleaux.

Le matériau est un acier 100C6 ($E=205$ GPa, $\nu=0.3$). Cet acier peut supporter, d'après la norme ISO, des pressions en surface de l'ordre de 4000 MPa sans matage. Calculez la pression de HERTZ $p_{\max}$ entre le rouleau et les bagues intérieure et extérieure.

REPONSES N°20



Nous sommes dans le cas du contact de deux cylindres

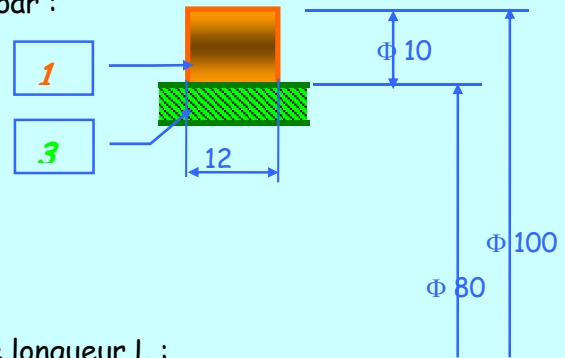
Cas du contact entre le rouleau 1 et la bague intérieure 3 :

La surface de contact est un rectangle étroit.

La pression $p_{\max}$ au centre du rectangle est donnée par :

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{qE}{r}}$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}$ $\frac{1}{r} = \frac{1}{5} + \frac{1}{40} = \frac{9}{40}$



Si le contact s'effectue suivant une génératrice de longueur L :

$$q = \frac{P}{L} = \frac{67000}{12}$$

Or le contact s'effectue dans notre cas sur 3 rouleaux : $q = \frac{P}{L} = \frac{67000}{3 \times 12}$

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{qE}{r}} = 0,418 \sqrt{\frac{67000 \times 9 \times 205 \cdot 10^3}{3 \times 12 \times 40}} \quad \mathbf{p_{\max} = 3872 \text{ MPa}}$$

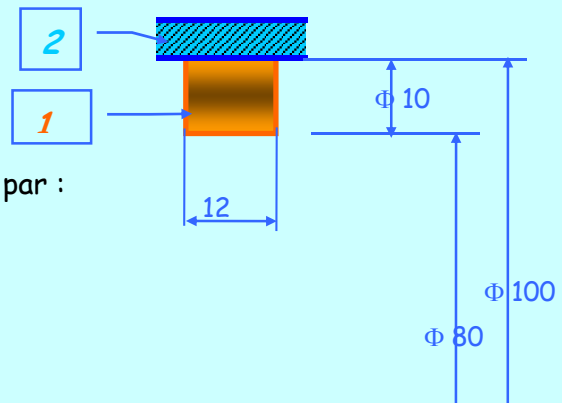
Cas du contact entre le rouleau 1 et la bague extérieure 2 :

La surface de contact est un rectangle étroit.

La pression $p_{\max}$ au centre du rectangle est donnée par :

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{qE}{r}}$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ $\frac{1}{r} = \frac{1}{5} - \frac{1}{50} = \frac{9}{50}$



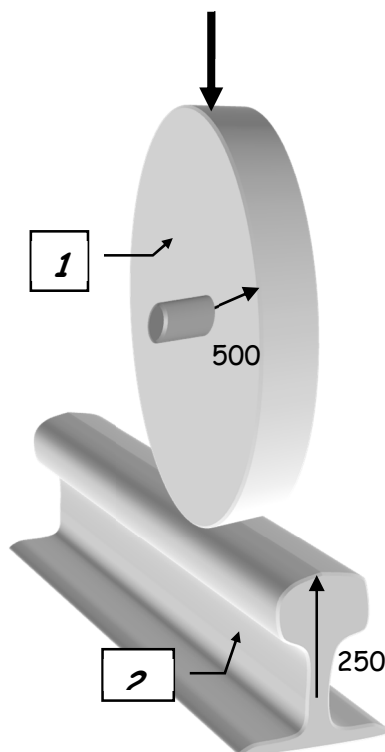
Si le contact s'effectue suivant une génératrice de longueur L :

$$q = \frac{P}{L} = \frac{67000}{12}$$

Or le contact s'effectue dans notre cas sur 3 rouleaux : $q = \frac{P}{L} = \frac{67000}{3 \times 12}$

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{qE}{r}} = 0,418 \sqrt{\frac{67000 \times 9 \times 205 \cdot 10^3}{3 \times 12 \times 50}} \quad \mathbf{p_{\max} = 3464 \text{ MPa}}$$

PROBLÈME N°21



Déterminer $p_{\max}$ au contact de la roue et du rail. L'effort de compression est $P=5000$ N. Le matériau est un acier ($E=210$ GPa, $\nu=0.3$).

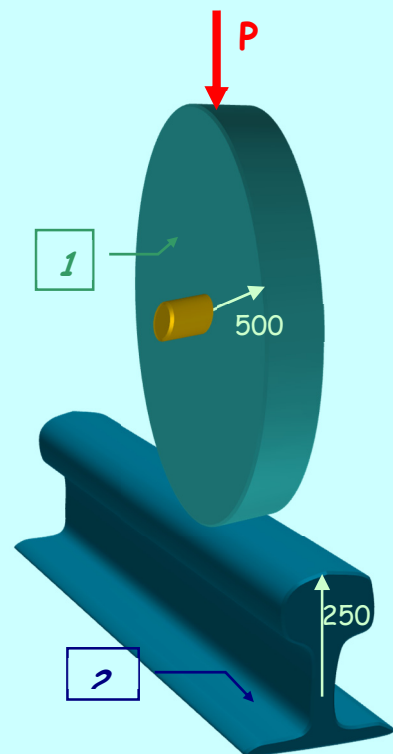
REPONSES N°21

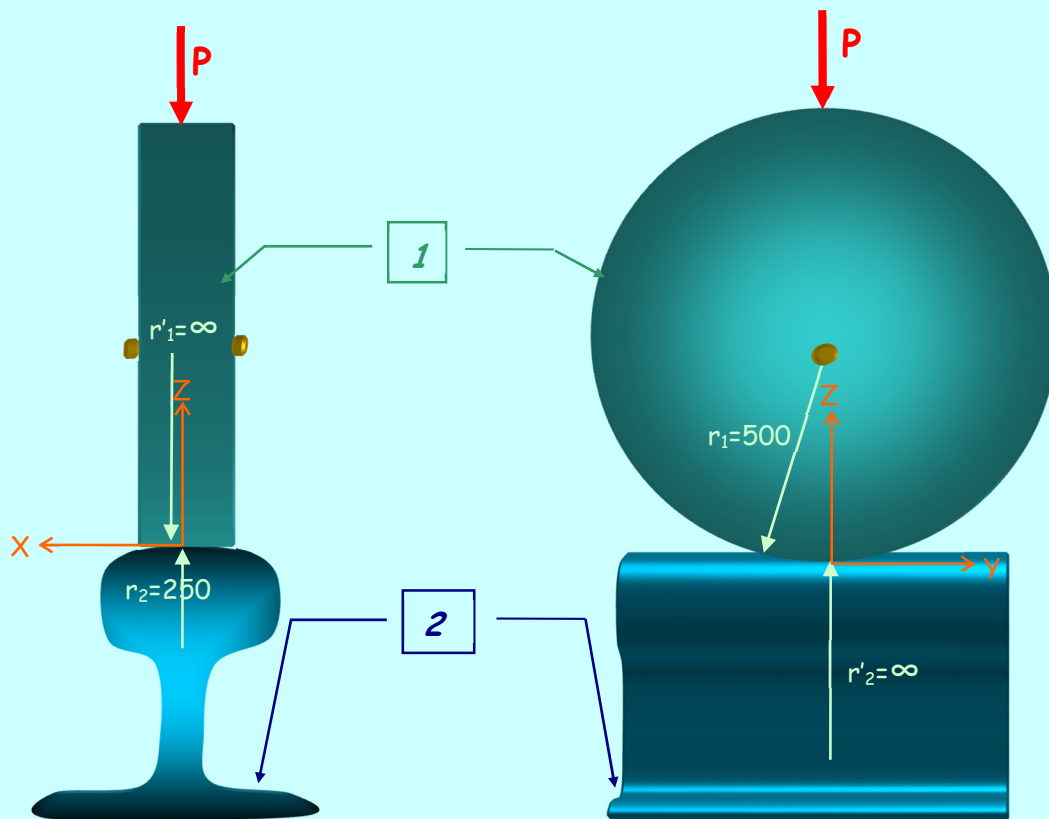
Le rayon de la roue porteuse r_1 est égal à : 500mm.
Le rayon de courbure de la surface du rail r_2 vaut 250mm.

Nous devons chercher les courbures principales $1/r$ et $1/r'$ de la roue 1 et du rail 2.

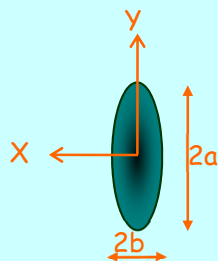
Les courbures principales étant les courbures maximum et minimum qui se trouvent dans deux plans orthogonaux.

Dans notre cas l'angle φ entre les plans contenant les courbures principales est égal à : $\pi/2$.





La surface de contact est une ellipse dont les demi axes valent :



$$a = \alpha^3 \sqrt{\frac{Pm}{n}}$$

$$b = \beta^3 \sqrt{\frac{Pm}{n}}$$

$$\text{Avec : } m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2}}$$

$$\text{et } n = \frac{4E}{3(1-\nu^2)}$$

$$\text{D'où : } m = \frac{4}{\frac{1}{500} + \frac{1}{250}} = \frac{2000}{3} \quad n = \frac{4 \times 210 \cdot 10^3}{3(1-0.3^2)} = 307692,3$$

Les constantes α et β sont déterminées par le tableau à partir de la connaissance de θ :

$$\cos \theta = \frac{B}{A}$$

En sachant que $A = \frac{2}{m} = 2 \frac{3}{2000} = 3 \cdot 10^{-3}$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{250} - \frac{1}{500}\right) = 10^{-3}$$

D'où : $\cos \theta = \frac{B}{A} = \frac{10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{3} = 0,333$ $\theta = 70^\circ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1,284 \\ \beta = 0,802 \end{cases}$

On en déduit donc le grand axe et le petit axe de l'ellipse !

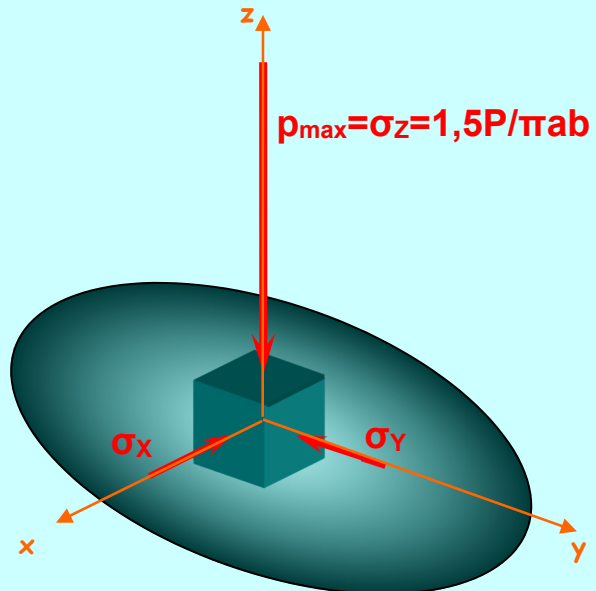
$$a = \alpha^3 \sqrt{\frac{Pm}{n}} = 1,284^3 \sqrt{\frac{5000 \times 2000}{307692,3 \times 3}} = 2,8 \quad \text{et} \quad b = \beta^3 \sqrt{\frac{Pm}{n}} = 0,802^3 \sqrt{\frac{5000 \times 2000}{307692,3 \times 3}} = 1,8$$

L'état de contrainte est un état triaxial de compression.

C'est au centre de l'ellipse que les contraintes sont maximum.

La contrainte de compression maximum est suivant l'axe Z :

$$p_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} = 1,5 \frac{5000}{\pi \times 2,84 \times 1,8} \approx 475 \text{ MPa}$$



ANNEXES MATHÉMATIQUES

1. DÉRIVÉES.DIFFÉRENTIELLES

1.1. Dérivées, différentielle d'une fonction :

1°) Dérivé, différentielle d'une fonction y d'une variable x :

Considérons la fonction $y = x^2$.

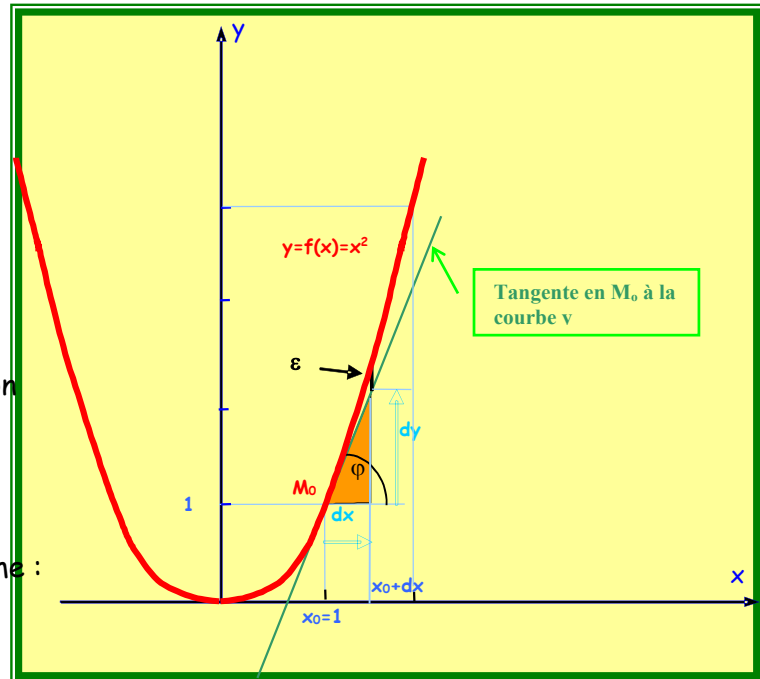
La dérivée y' de la fonction $y = x^2$ vaut $y' = 2x = \operatorname{tg}\varphi$.

Pour $x=x_0=1$ la dérivée de la fonction $y = x^2$ vaut :

$$y' = \operatorname{tg}\varphi = 2 \quad \varphi = 63.4^\circ$$

La dérivée peut s'écrire sous la forme :

$$y' = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$$



$dy = y' dx$ est la différentielle de la fonction y. C'est l'accroissement de la fonction y à ε près quand la variable x augmente de dx.

2°) Dérivés, différentielle d'une fonction z de deux variables x et y :

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y.

Les deux dérivées partielles par rapport à x et y de la fonction z se notent :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

La différentielle dz de la fonction z se calcule par :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

C'est l'accroissement de la fonction z à ε près quand la variable x augmente de dx et quand la variable y augmente de dy .

3°) Dérivées, différentielle d'une fonction w de trois variables x , y et z :

Soit $w = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables x , y et z .

Les trois dérivées partielles par rapport à x , y et z de la fonction w se notent :

$$w'_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$w'_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w'_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

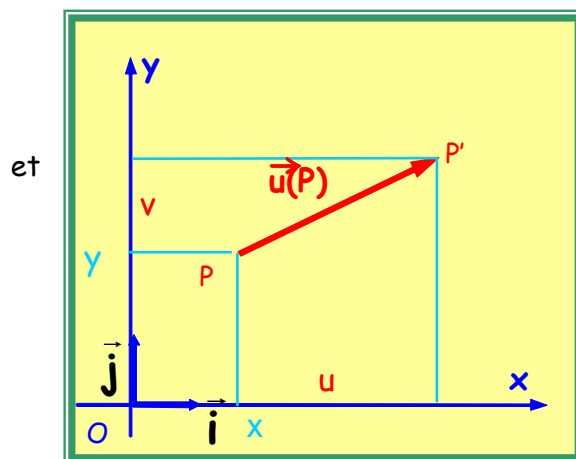
La différentielle dw de la fonction w se calcule par :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

C'est l'accroissement de la fonction w à ε près quand la variable x augmente de dx , quand la variable y augmente de dy et quand la variable z augmente de dz .

1.2. Dérivées, différentielle d'un vecteur :

□ Dérivées d'un vecteur:



Plaçons nous dans le plan xy (c'est la même chose dans l'espace avec une composante w en plus pour le vecteur une variable supplémentaire z).

$$\vec{u}(P) = \vec{u}(x, y) = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} + v \frac{\partial \vec{j}}{\partial x}$$

Les dérivées $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \vec{j}}{\partial x}$ sont nulles car la base xy est fixe. D'où :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j}$$

De même, pour la dérivé par rapport à y :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}$$

□ Différentielle d'un vecteur:

Plaçons-nous dans le plan (c'est la même chose dans l'espace avec une composante w en plus et une variable supplémentaire z).

$$\vec{u}(P) = \vec{u}(x, y) = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j} \quad d\vec{u} = du\vec{i} + dv\vec{j}$$

$$d\vec{u} = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)}_{du} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)}_{dv} \vec{j}$$

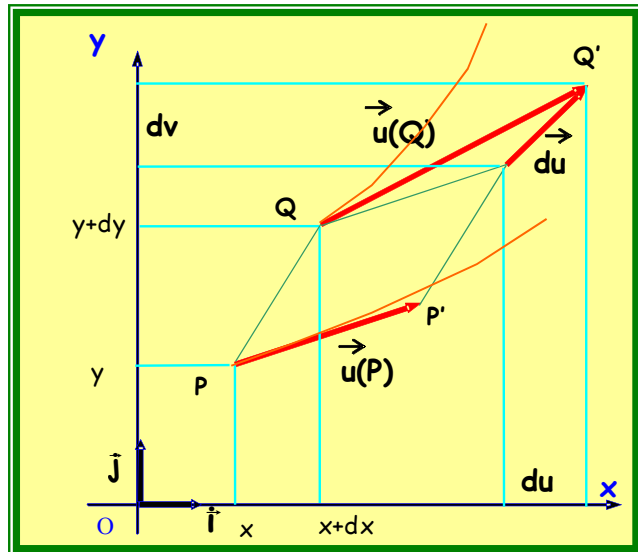
$$d\vec{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}\right) dy$$

Or (voir dérivées d'un vecteur) :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}$$

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy$$



La différentielle d'un vecteur dans le plan se calcule comme la différentielle totale dz d'une fonction de deux variables $z=f(x,y)$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

2. CALCUL MATRICIEL

2.1. Définition

La notion de matrice a été introduite par le mathématicien Anglais SYLVESTER¹⁰. Une matrice peut être considérée comme un tableau contenant des nombres ou des symboles.

$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

La matrice $[M]$ est rectangulaire d'ordre(2,5) (2 lignes et 5 colonnes)

$m_{12}=2$

Ligne 1

Colonne 2

$m_{25}=9$

2.2. Exemples de matrices :

☐ Matrice carrée symétrique d'ordre 3 :

$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Diagonale principale

Symétrique

¹⁰ SYLVESTER James Joseph (1814-1897)

✿ Matrice carrée diagonale d'ordre 3 :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

✿ Matrice unité :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✿ Matrice vecteur :

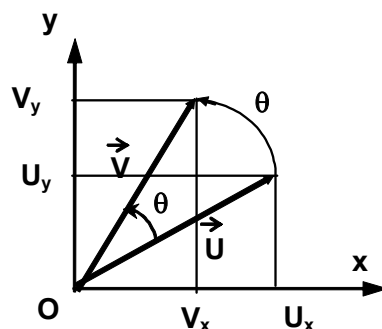
$$[V] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vecteur

$$[i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vecteur unitaire de l'axe des x

✿ Matrice rotation d'un vecteur dans le plan xy :



$$[V] = [R][U] \text{ avec :}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3. Opérations sur les matrices :

2.3.1. Multiplication :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice $[A]$ est d'ordre (3,2), la matrice $[B]$ est d'ordre (2,2).

Le matrice produit $[P]$ de $[A]$ par $[B]$ dans cet ordre s'écrit :

$$[P] = [A][B]$$

Un terme quelconque p_{ij} de la matrice produit $[P]$ s'obtient en faisant la somme des produits des termes de la ligne i de $[A]$ par les termes de la colonne j de $[B]$.

$$p_{11} = 1 \times 1 + 2 \times 2$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times -2 + 2 \times 3 \\ 3 \times 1 + 4 \times 2 & 3 \times -2 + 4 \times 3 \\ 5 \times 1 + 6 \times 2 & 5 \times -2 + 6 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 11 & 6 \\ 17 & 8 \end{bmatrix}$$

ordre (3,2) ordre (2,2) ordre (3,2)

L'ordre de la matrice $[P]$ sera donc (3,2).

Pour que le produit des deux matrices soit possible il faut que le nombre de colonnes de $[A]$ soit identique au nombre de lignes de $[B]$. Avec l'exemple choisi le produit $[B][A]$ est impossible.

2.3.2. Transposition :

Il suffit de changer les lignes en colonnes.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad {}^t[M] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Si la matrice est symétrique (donc carrée), elle est égale à sa transposée.
Attention à la transposition d'un produit de matrices !!

$$\begin{matrix} [P] \\ (m,n) \end{matrix} = \begin{matrix} [M] \\ (m,p) \end{matrix} \begin{matrix} [N] \\ (p,n) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} {}^t[P] \\ (n,m) \end{matrix} = \begin{matrix} {}^t[N] \\ (n,p) \end{matrix} \begin{matrix} {}^t[M] \\ (p,m) \end{matrix}$$

~~$$\begin{matrix} {}^t[P] \\ (n,m) \end{matrix} = \begin{matrix} {}^t[M] \\ (p,m) \end{matrix} \begin{matrix} {}^t[N] \\ (n,p) \end{matrix}$$~~

Explication : Pour que le produit de deux matrices soit possible il faut que le nombre de colonnes de la première matrice et le nombre de lignes de la seconde soit identique.

2.3.3. Inversion :

La matrice inverse $[M]^{-1}$ d'une matrice $[M]$ est telle que :

$$[M][M]^{-1} = [M]^{-1}[M] = [I]$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est la matrice unité.}$$

On montre en algèbre linéaire que l'inverse de $[M]$ se calcule par :

$$[M]^{-1} = \frac{{}^t[\text{co}M]}{|M|}$$

$|M|$ est le déterminant de la matrice.

${}^t[\text{co}M]$ est la transposée de la comatrice de $[M]$ (ou adjointe de $[M]$).

$$[M] = \left[\begin{array}{c|c|c} m_{ij} & & \\ \hline & M_{ij} & \end{array} \right]$$

Le cofacteur de rang i,j se calcule par : $\text{co}m_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ où $|M_{ij}|$ est le mineur.

Remarque : la matrice inverse d'une matrice rotation est égale à sa transposée ($[\mathbf{R}]^{-1} = {}^t[\mathbf{R}]$). En effet, la rotation inverse d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle $-\theta$.

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^t[\mathbf{R}]$$

2.3.4. Diagonalisation d'une matrice symétrique d'ordre 3 (ou recherche des vecteurs propres d'un espace vectoriel) :

Soit une matrice symétrique $[\mathbf{M}]$ qui fait correspondre deux vecteurs de l'espace x,y,z

$$\vec{U} \xrightarrow{[\mathbf{V}] = [\mathbf{M}][\mathbf{U}]} \vec{V}$$

On montre en algèbre linéaire que si la matrice est symétrique d'ordre 3 :

1°) Il existe toujours 3 vecteurs $\vec{U}$ orthogonaux tel que $[\mathbf{V}] = [\mathbf{M}][\mathbf{U}] = \lambda[\mathbf{U}]$ (autrement dit il existe 3 couples $\vec{U}$ et $\vec{V}$ qui sont colinéaires 2 par 2).

2°) Les 3 valeurs de λ (les valeurs propres de la matrices, autrement dit les coefficients de proportionnalité entre les 3 couples $\vec{U}$ et $\vec{V}$) sont réelles.

3°) La matrices $[\mathbf{M}]$ est diagonale dans le repère construit sur les vecteurs propres (les termes de la diagonale principale étant les valeurs propres).

Exemple : Diagonalisez la matrice symétrique $[\mathbf{M}]$ ci-dessous et donnez les 3 vecteurs propres (ordonnez les 3 valeurs propres par ordre décroissant). Vérifiez que les 3 vecteurs propres sont orthogonaux.

$$[\mathbf{M}]_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si $[\mathbf{U}]$ est un vecteur propre on a :

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{M}][\mathbf{U}] = \lambda[\mathbf{U}]$$

$$([\mathbf{M}] - \lambda[\mathbf{I}])[\mathbf{U}] = [\mathbf{0}]$$

Pour que ce système homogène (les seconds membres sont nuls) admette des solutions différentes de 0 ($[\mathbf{U}] \neq [\mathbf{0}]$) il faut que son déterminant soit nul.

$$[[\mathbf{M}] - \lambda[\mathbf{I}]] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant par rapport à sa troisième ligne on obtient :

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

La résolution de l'équation donne les trois valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \quad [\mathbf{M}]_{xyz} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Recherche du premier vecteur propre $\vec{U}_1$ relatif à la valeur propre $\lambda_1 = 3$:

$$[[\mathbf{M}] - \lambda_1[\mathbf{I}]]\vec{U}_1 = [\mathbf{0}]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad [\mathbf{U}_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Recherche du deuxième vecteur propre $\vec{U}_2$ relatif à la valeur propre $\lambda_2 = -1$:

$$[[\mathbf{M}] - \lambda_2[\mathbf{I}]]\vec{U}_2 = [\mathbf{0}]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad [\mathbf{U}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Recherche du troisième vecteur propre $\vec{U}_3$ relatif à la valeur propre $\lambda_3 = -2$:

$$[[\mathbf{M}] - \lambda_3[\mathbf{I}]]\vec{U}_3 = [\mathbf{0}]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 0z &= 0 \end{aligned} \quad [U_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On peut facilement vérifier que les 3 vecteurs propres sont orthogonaux.

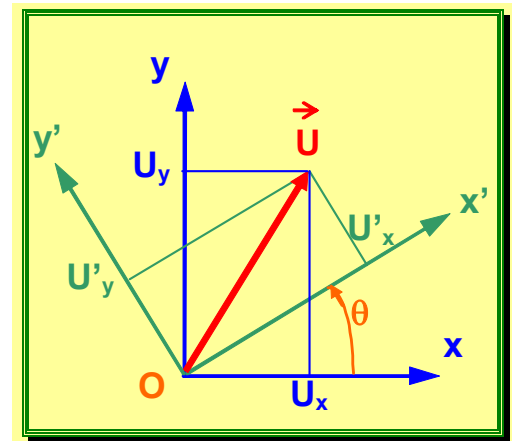
2.4. Transformation d'un vecteur et d'une matrice lors de la rotation d'un repère dans le plan :

1°) Transformation d'un vecteur :

$$[U'] = {}^t[R][U]$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R]$ est la matrice de rotation d'un vecteur dans le plan (voir rotation d'un vecteur dans le plan).



2°) Transformation d'une matrice :

$$\text{On montre que : } [M'] = {}^t[R][M][R]$$

2.5. Forme matricielle du produit scalaire :

$$\underset{(3,1)}{[V]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underset{(3,1)}{[W]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\vec{V} \cdot \vec{W} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ est un scalaire, autrement dit une "matrice" d'ordre 1.

$$\underset{(1,1)}{\vec{V} \cdot \vec{W}} = {}^t \underset{(1,3)}{[V]} \underset{(3,1)}{[W]} \quad \text{ou} \quad {}^t [W][V]$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$