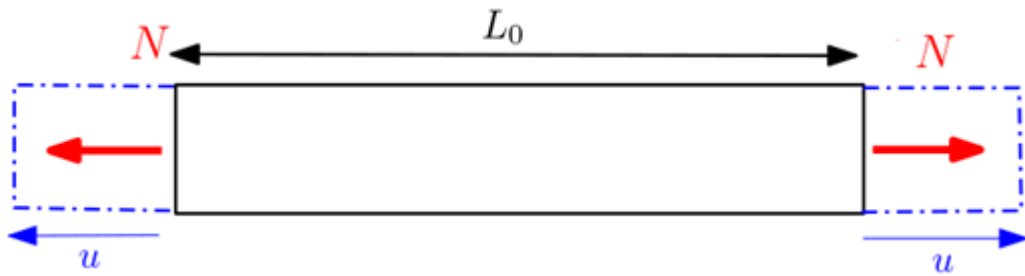


Plan du cours :

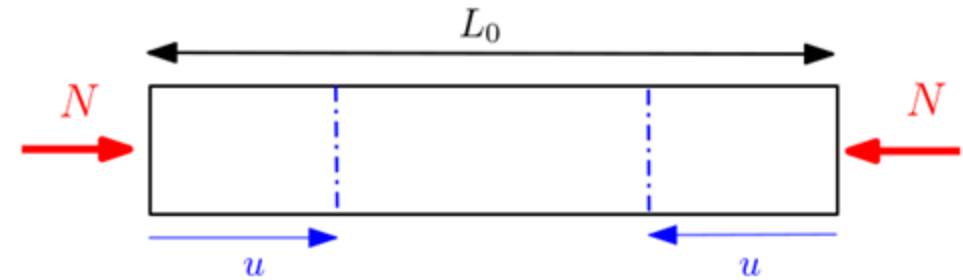
- + Chapitre 1 : Introduction à la RdM –Rappels sur la statique des solides
- + Chapitre 2 : Torseurs des efforts intérieurs
- + **Chapitre 3 : Sollicitations élémentaires : Traction et compression**
- + Chapitre 4 : Sollicitations élémentaires : cisaillement

Définition :

Une poutre est sollicitée en traction (ou en compression) lorsqu'elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées aux centres des surfaces extrêmes, qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).



Traction simple



Compression simple

Dans ce cas, le tenseur des efforts intérieurs s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \mathcal{T}_{int} \right\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

avec la convention de signe suivante :

- Si $N(x)$ est positif, on dit que la poutre est soumise à de la traction,
- Si $N(x)$ est négatif, on dit que la poutre est soumise à de la compression.

Relation entre contrainte et effort normal :

Le vecteur contrainte en tout point M d'une section de normale $\vec{n} = \vec{x}$ s'écrit : $\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma \vec{x}$

A partir de la relation intégrale liant le torseur des efforts intérieurs et le vecteur contrainte, on écrit :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{int}} \right\}_G = \left\{ N(x) \vec{x} \quad \vec{0} \right\}_G = \left\{ \iint_S \vec{T}(M, \vec{x}) \, dS \quad \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) \, dS \right\}_G$$

Comme σ est constante sur (S) , on obtient : $N = \iint_S \sigma \, dS = \sigma S \implies \boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$

Il reste à démontrer que : $\iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \sigma \vec{x} \, dS = \vec{0}$

Comme σ est constante sur la surface (S) , on a : $\iint_S \overrightarrow{GM} \wedge (\sigma \vec{x}) \, dS = \iint_S \overrightarrow{GM} \, dS \wedge (\sigma \vec{x})$

G étant le centre de gravité de la section (S) , alors : $\iint_S \overrightarrow{GM} \, dS = \vec{0}$

D'où : $\iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \sigma \vec{x} \, dS = \vec{0} \wedge \sigma \vec{x} = \vec{0}$

Essai de traction

+

+

+

+

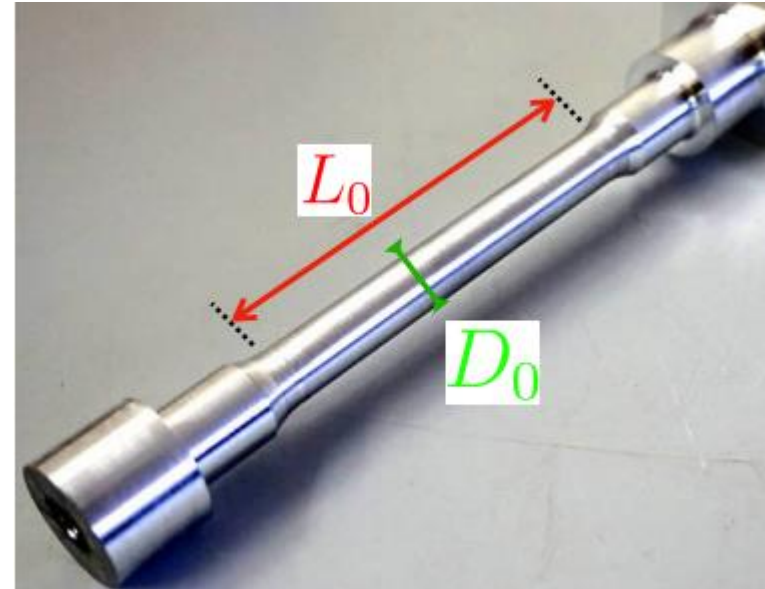
+

Exemple d'essai de traction

Essai de traction

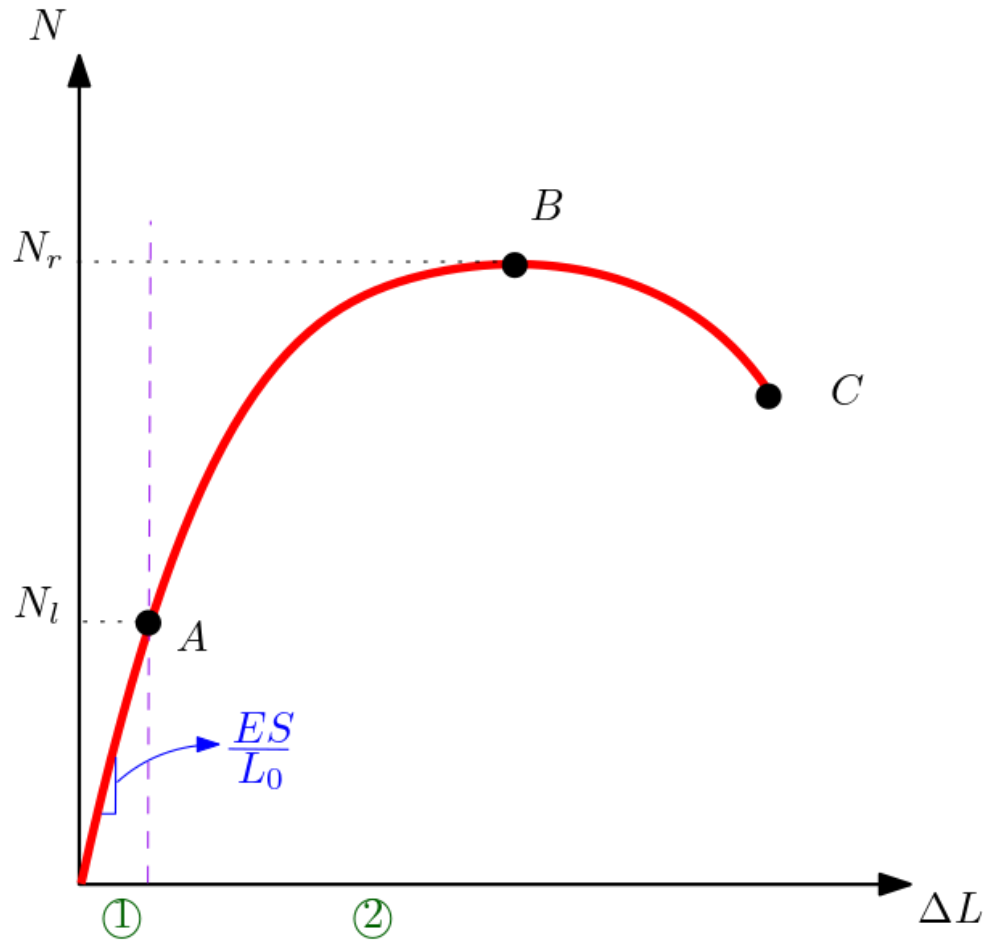
Objectif : Déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau

On réalise un essai de traction sur une éprouvette cylindrique (en acier par exemple)



La **zone utile** de l'éprouvette a une longueur de référence L_0 et une section S dont le diamètre est D_0

On mesure au cours de l'essai la force exercée sur l'éprouvette qui est ici l'effort normal N ainsi que l'allongement ΔL de la zone utile ce qui nous donne la figure suivante :

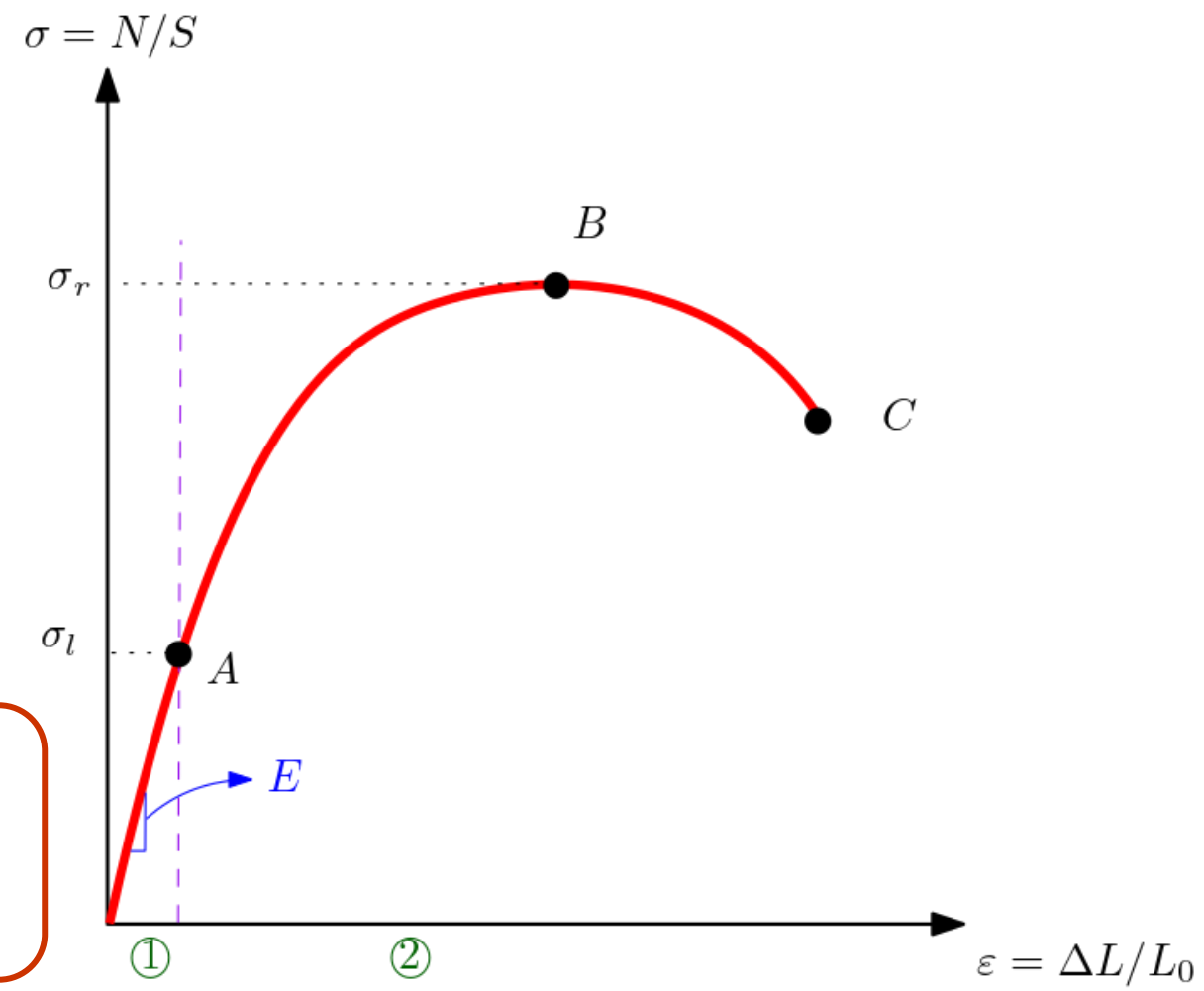
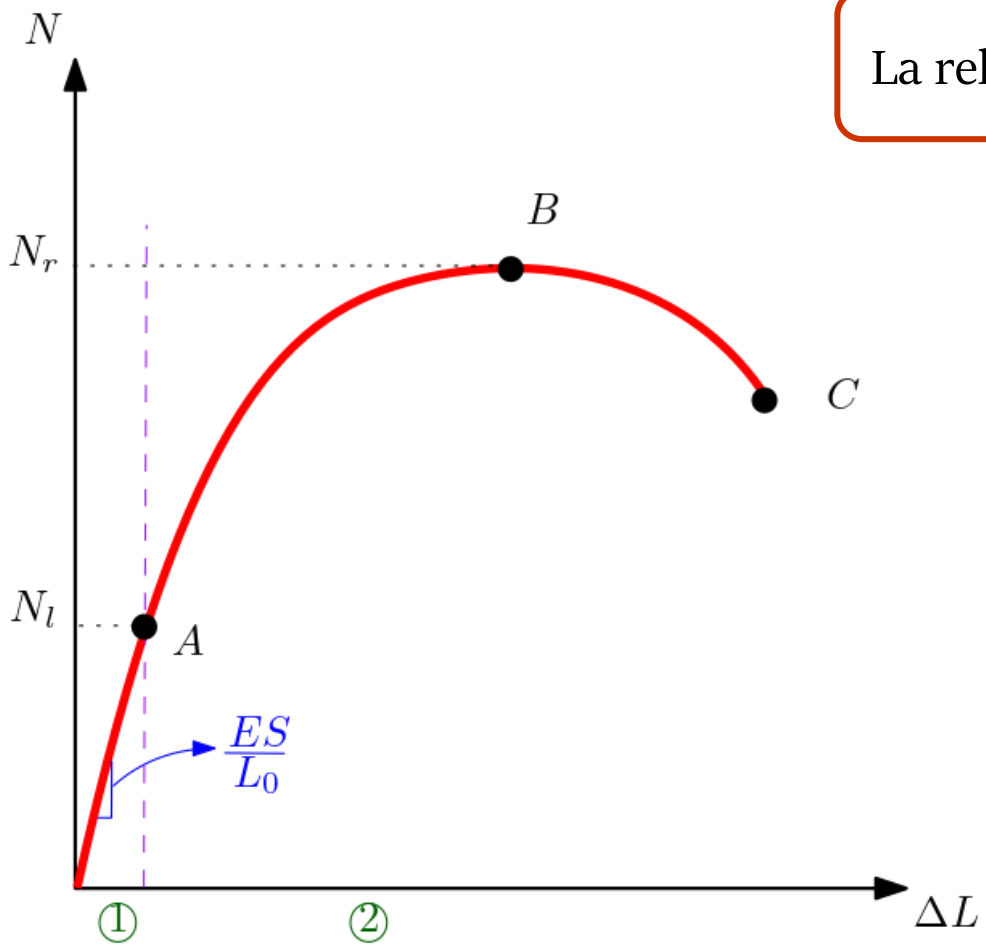


Cette courbe comporte deux zones distincts :

- **Zone ①** : zone où l'évolution de l'effort normal en fonction de l'allongement est linéaire
---> **zone élastique** (déformation élastique)
- **Zone ②** : **zone plastique** (déformation permanente), la rupture se produit au point C

Remarque : Dans la zone élastique, si l'on supprime la charge l'éprouvette reprend sa forme initiale

La relation entre l'effort normal et la contrainte normale est : $\sigma = \frac{N}{S}$

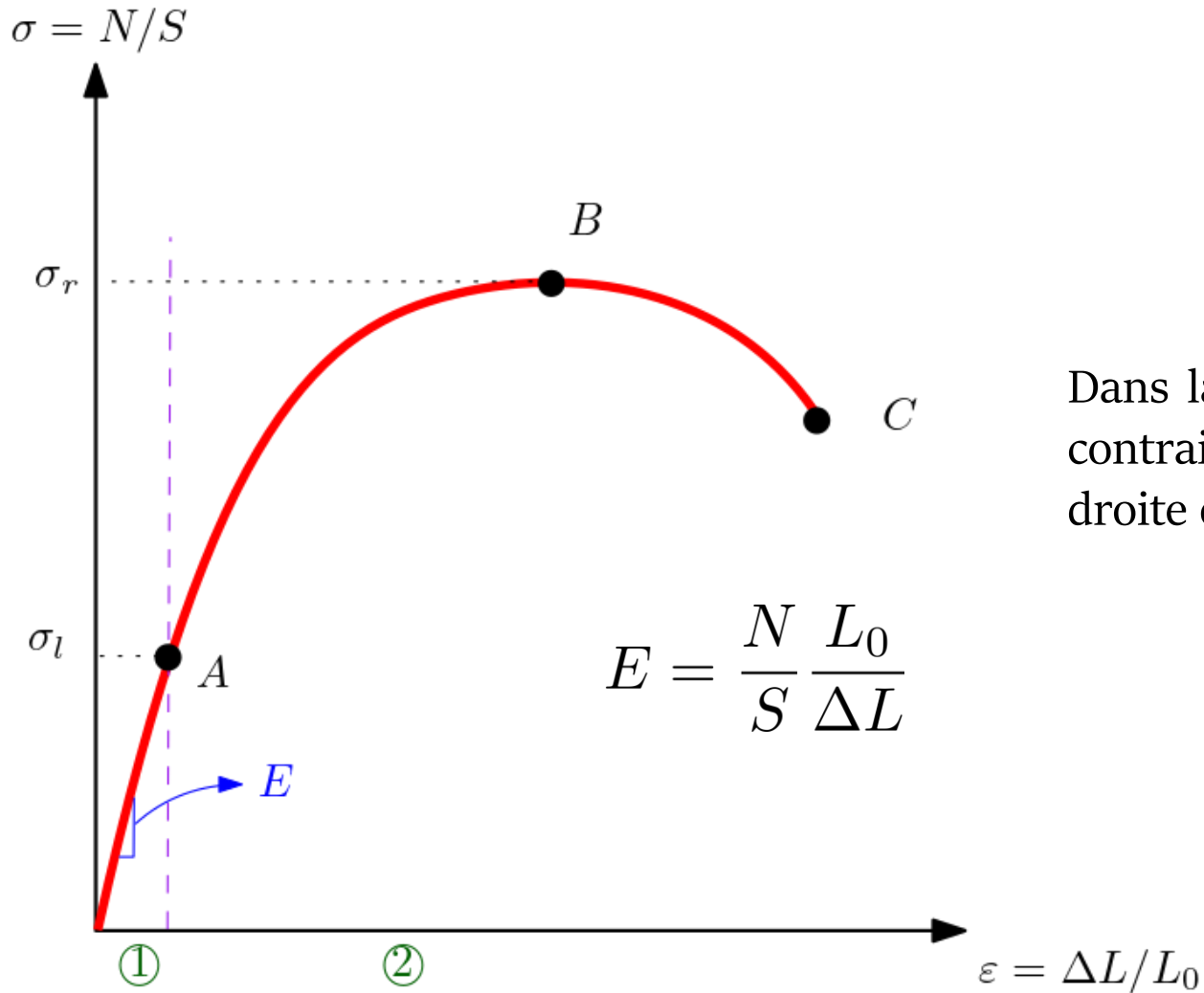


On définit la déformation comme étant le rapport entre la variation de longueur ΔL et la longueur de référence L_0 :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

La déformation est une grandeur qui n'a pas de dimension (sans unité)

Rappel : L'objectif de l'essai de traction est de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau
On cherche en particulier à déterminer le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν



$$E = \frac{N}{S} \frac{L_0}{\Delta L}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

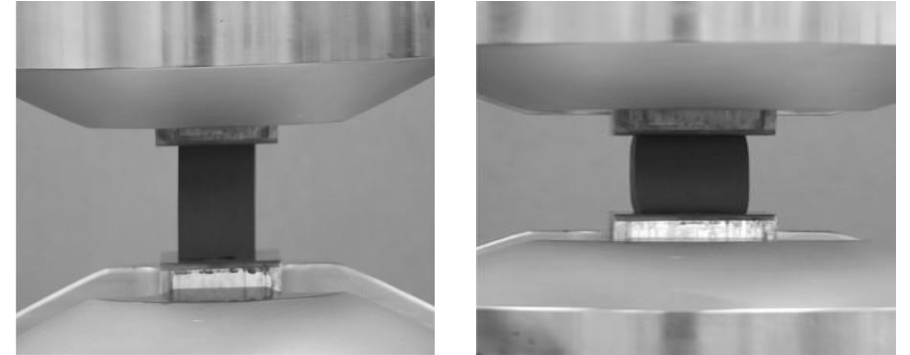
Dans la zone élastique, il y a une relation linéaire entre la contrainte normale et la déformation. La pente de cette droite est le **module d'Young** qu'on note E

En plus de la déformation longitudinale ε , le matériau subit aussi une déformation dans la direction transversale ε_t

On constate expérimentalement que le rapport $-\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ est constant pour un matériau donné.

Ce rapport est appelé *coefficient de Poisson* et est noté ν .

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} = -\frac{\Delta d}{D_0} \frac{L_0}{\Delta L}$$

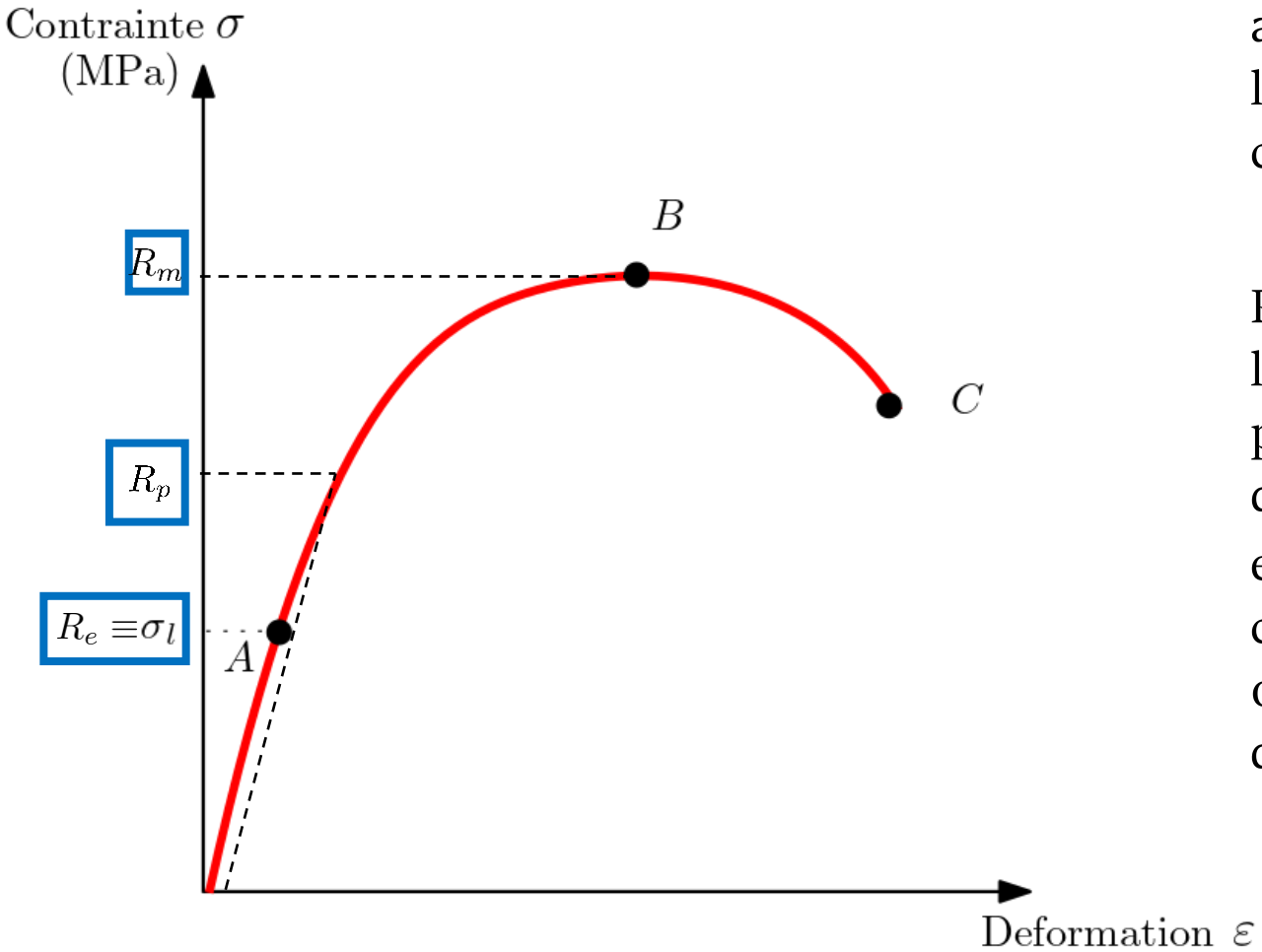


Le coefficient ν est borné : il est compris entre -1 et 0.5

- Si ν est négatif, le matériau est dit auxétique
- Si $\nu = 0.5$, le matériau est dit incompressible

Quelques ordres de grandeurs pour le module d'Young et le coefficient de Poisson :

Matériau	Acier	Cuivre	Aluminium	Verre	Béton	Caoutchouc
E [MPa]	210 000	110 000	70 000	60 000	10 000	200
ν [-]	0.29	0.35	0.34	0.24	0.2	0.5



Pour délimiter la zone élastique, on définit une grandeur appelée la **limite élastique** R_e (σ_l sur la figure): tant que la contrainte est inférieure à la limite, le matériau a un comportement élastique linéaire.

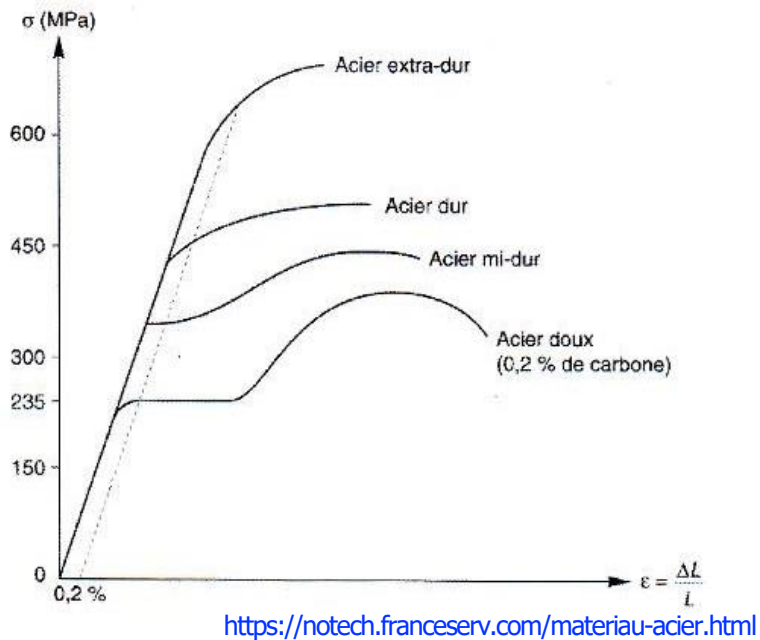
Pour certains matériaux, on peut avoir du mal à définir la zone de transition entre la partie élastique et la partie plastique. On définit alors une autre limite, très utilisée, dite limite élastique à 0.2 % et notée R_p . Cette valeur est obtenue en traçant une droite parallèle à la droite de comportement élastique et coupant l'axe des abscisses à 0.2%. L'intersection de cette droite avec la courbe d'essai de traction donne la limite R_p .

La résistance à la rupture R_m est la contrainte de traction mécanique maximale avec laquelle une éprouvette peut être chargée.

Les courbes de traction varie beaucoup en fonction du type de matériau utilisé.

Les aciers peuvent se classer en fonction de leur teneur en carbone

	Teneur en carbone	Résistance à la traction	Utilisation
Acier doux	0.15 à 0.2 %	400 MPa	Aciers de construction
Acier mi-durs	0.3 à 0.6 %	600 MPa	Rails, armatures de béton armé
Acier extra-durs	0.6 à 0.75 %	700 MPa	Outils



Le teneur de carbone a pour conséquence :

- L'accroissement de la résistance à la traction
- Le raccourcissement du palier de ductibilité (allongement sous charge constante)
- la diminution de l'allongement à la rupture

Pour un acier doux, la courbe s'infléchit et se stabilise autour d'une valeur quasiment constante avant de croître à nouveau, de passer un maximum et redescendre

Relation entre les contraintes et les déformations :

Dans la zone élastique, on peut écrire une relation linéaire entre la contrainte normale et la déformation, dont la pente est appelée le **module d'Young E** :

$$\sigma = E \varepsilon$$

Cette relation est connue sous le nom de **la loi de Hooke** et est valable uniquement pour des réponses élastiques, linéaires et isotropes.

Remarque :

- L'unité des contraintes σ et du module d'Young E dans le SI est le Pascal (Pa)
- Les déformations sont **sans unité**

$$\begin{aligned} 1 \text{ GPa} &= 10^9 \text{ Pa} \\ 1 \text{ MPa} &= 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

L'effort normal peut être exprimé en fonction de la déformation via cette relation :

$$N = E S \varepsilon$$

Phénomène de concentration de contraintes (en traction)

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant de brusques variations de sections (trous, gorges, épaulements, ...)

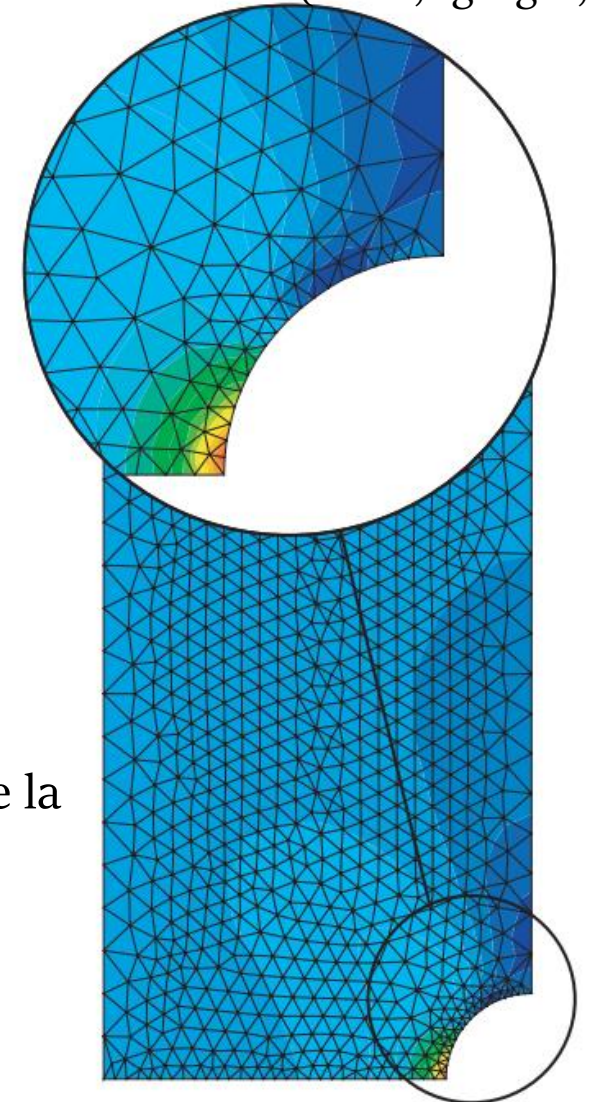
Dans le cas des poutres, le calcul de RdM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne "suffisamment" de l'accident géométrique.

Ainsi, on va chercher à utiliser les calculs de RdM pour calculer les contraintes comme s'il n'y avait pas d'accident géométrique. On corrigera ensuite ces contraintes localement en utilisant des coefficients déterminés analytiquement, expérimentalement ou numériquement.

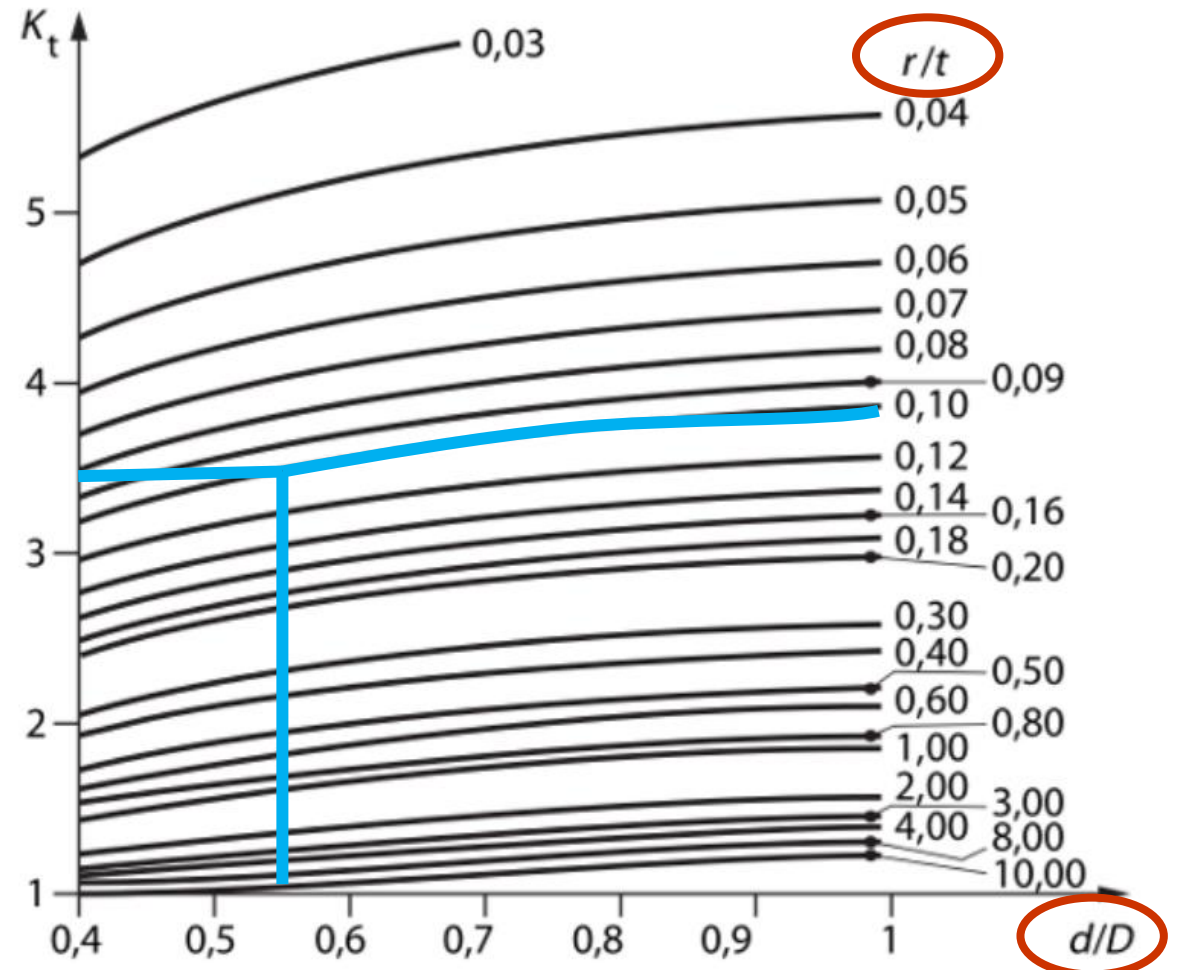
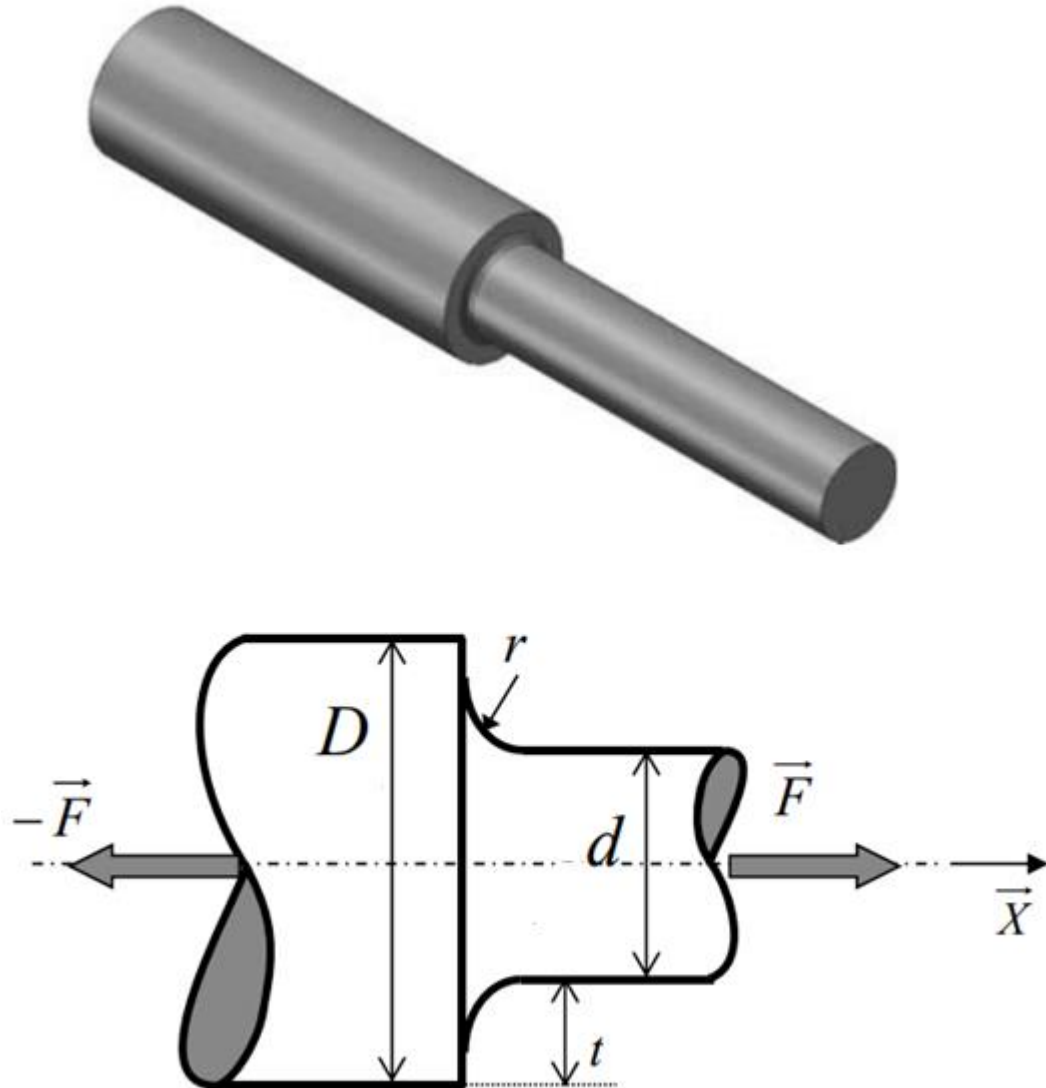
$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$$

K_t est appelée le coefficient de concentration de contraintes. K_t dépend de la forme de la section et du type de la variation.

Rappel : En traction, la contrainte nominale est : $\sigma_{\text{nom}} = \frac{N}{S}$



Exemple de détermination du coefficient de concentration des contraintes K_t à l'aide d'une abaque (analytiquement)



Critère de dimensionnement :

Il existe deux types de critères pour vérifier le dimensionnement de la poutre :

- **Critère en contrainte** : Ce critère traduit le fait que le matériau reste dans la zone élastique :

$$\sigma_{\max} \leq R_p$$

On prend classiquement en compte un coefficient de sécurité $s > 1$ pour vérifier ce critère qui s'écrit alors :

$$\sigma_{\max} \leq \frac{R_p}{s}$$

- **Critère en déplacement** : Ce critère traduit, moyennant un coefficient de sécurité s' , le fait que le déplacement maximum reste inférieur à une valeur donnée

$$U_{\max} \leq \frac{U_{\lim}}{s'}$$

Les Treillis



Les treillis sont largement présentes autour de nous :

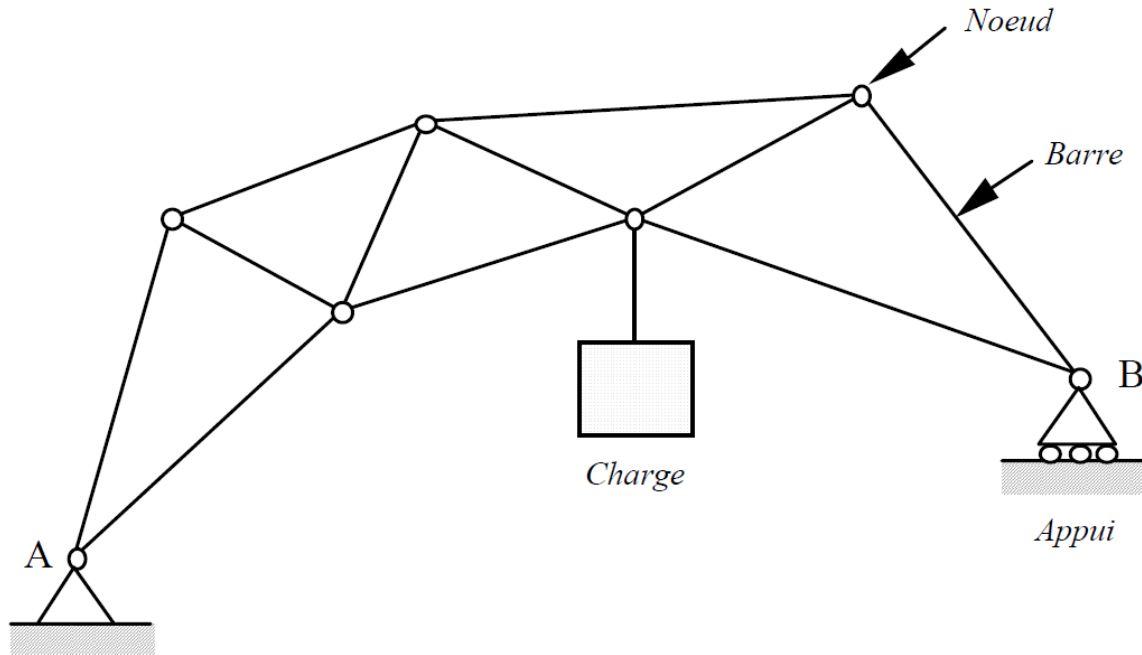
- Tours (tour Eiffel, tour radio, etc.)
- Grues
- Polygones électriques
- Manèges
- Stations spatiales
- Ponts



Ils permettent la création des structures solides et légères en optimisant la matière utilisée.

Qu'est ce qu'un treillis?

Un treillis est une structure rigide composée d'éléments rectilignes.



Les éléments rectilignes sont appelés **barres** ou **membrures**

Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un **nœud**

Les conditions suivantes doivent être réunies pour qu'une structure soit considérée comme un treillis:

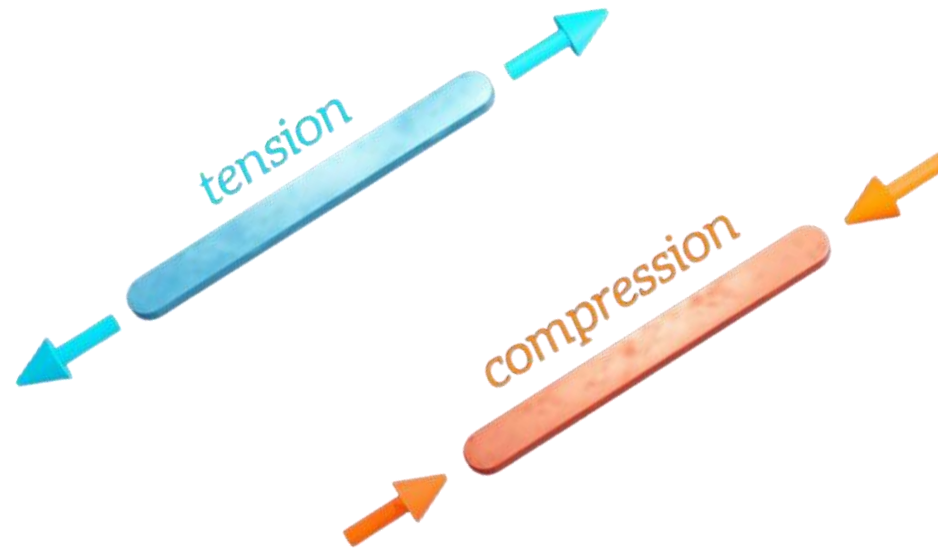
- Les barres du système sont toutes liées entre elles à l'aide des articulations,
- Les barres sont liées à l'extérieur à l'aide des articulations ou des appuis simples,
- Il n'y a ni forces réparties, ni couples appliqués à la structure,
- Les forces ponctuelles sont appliquées aux articulations de la structure

Puisque les barres sont articulées, elles ne peuvent pas être soumises à des moments. Elles sont uniquement soumises à des forces axiales.

Une barre étant liée à deux nœuds, elle sera soumise à deux forces. Comme la structure et toutes ses sous parties (càd les barres) sont à l'équilibre, les deux forces doivent être égales mais de sens opposé.



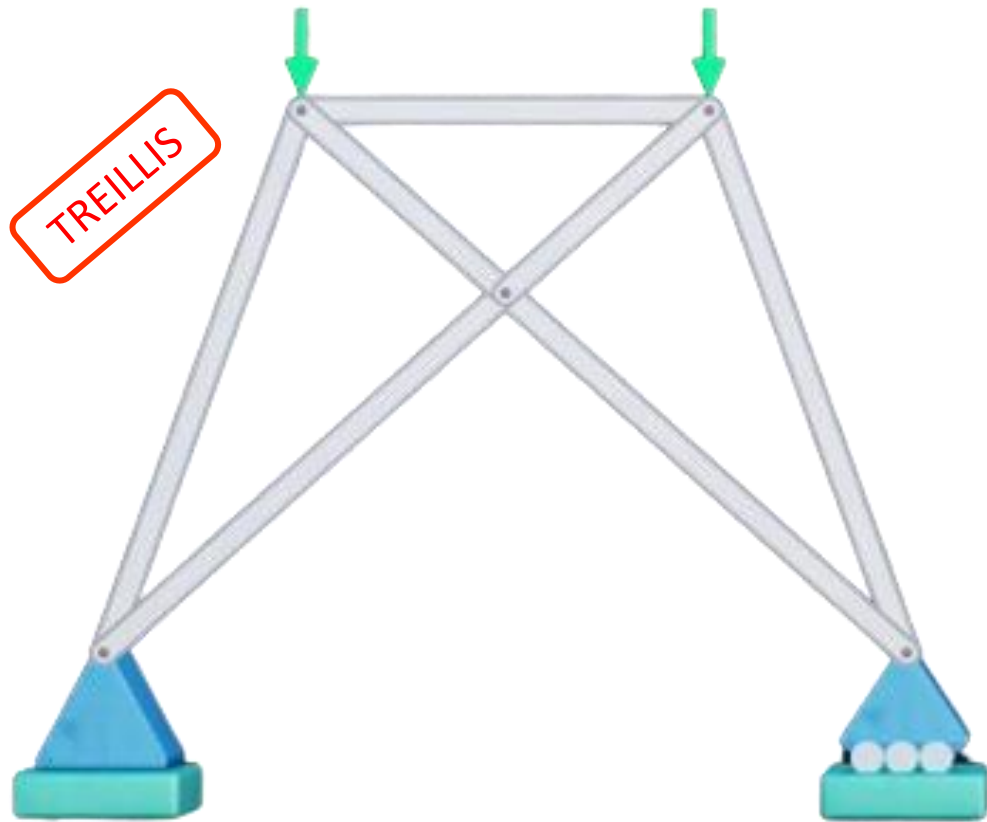
Ainsi les seules types d'efforts internes que peuvent subir une barre sont de la traction (tension) ou de la compression



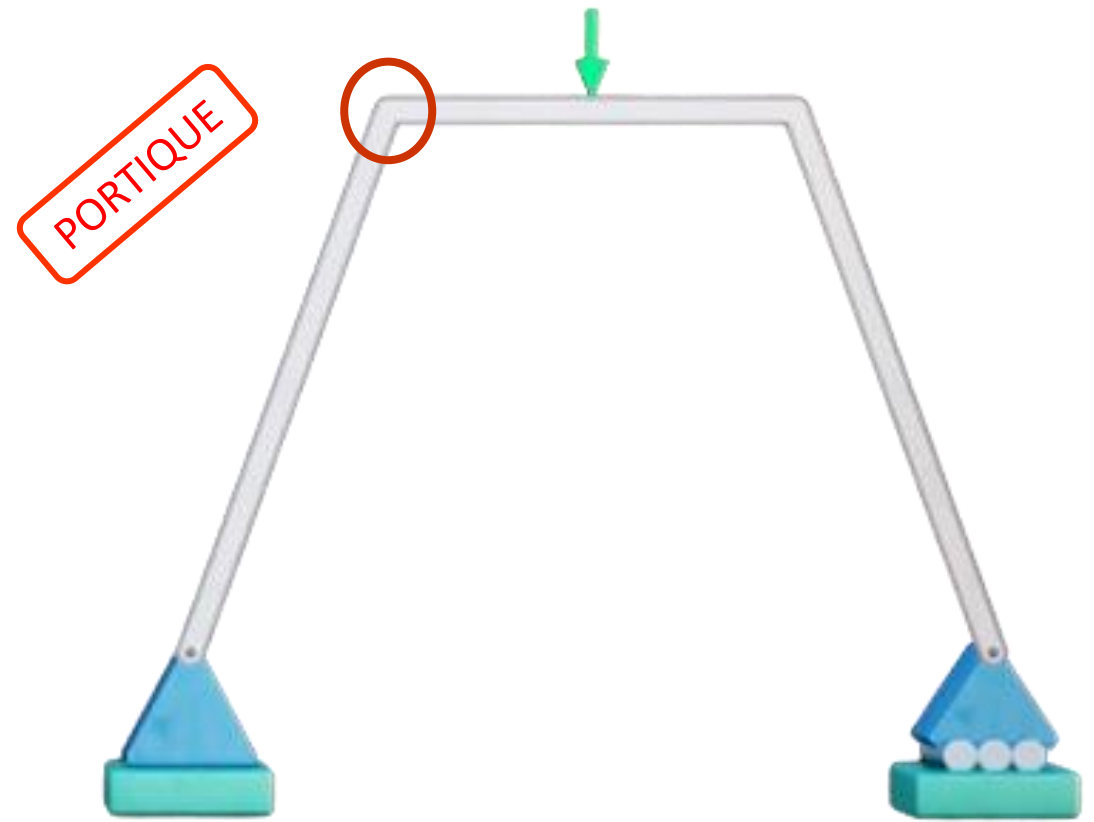
Récapitulatif : Les treillis articulés sont des assemblages de poutres (ou barres) articulées entre elles de telle manière à ce que chacune des barres soit sollicitée en traction/compression (effort normal).

Les autres efforts internes (effort tranchant, moment de torsion et moment de flexion) sont nuls

Laquelle des deux est un treillis ?

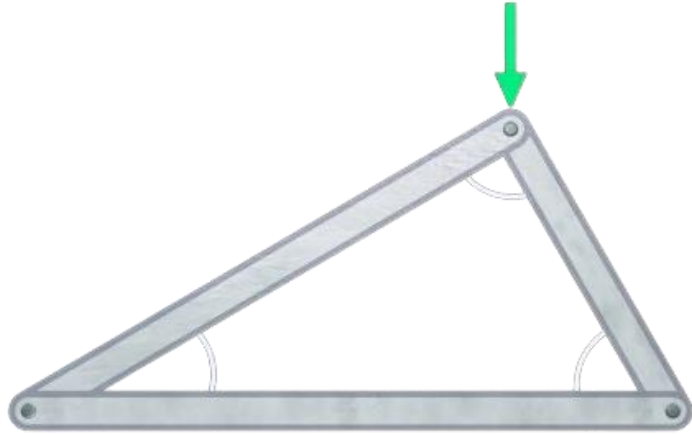


- Toutes les poutres sont articulées
- Les forces ponctuelles s'appliquent au niveau des nœuds



- Les poutres ne sont pas articulées
- Force ponctuelle s'applique sur la structure

Il est préférable de construire les treillis avec des triangles plutôt qu'avec des polygones ayant un nombre de barres supérieur à 3



Forme stable

Les angles ne peuvent pas changer si la longueur de chaque barre reste constante

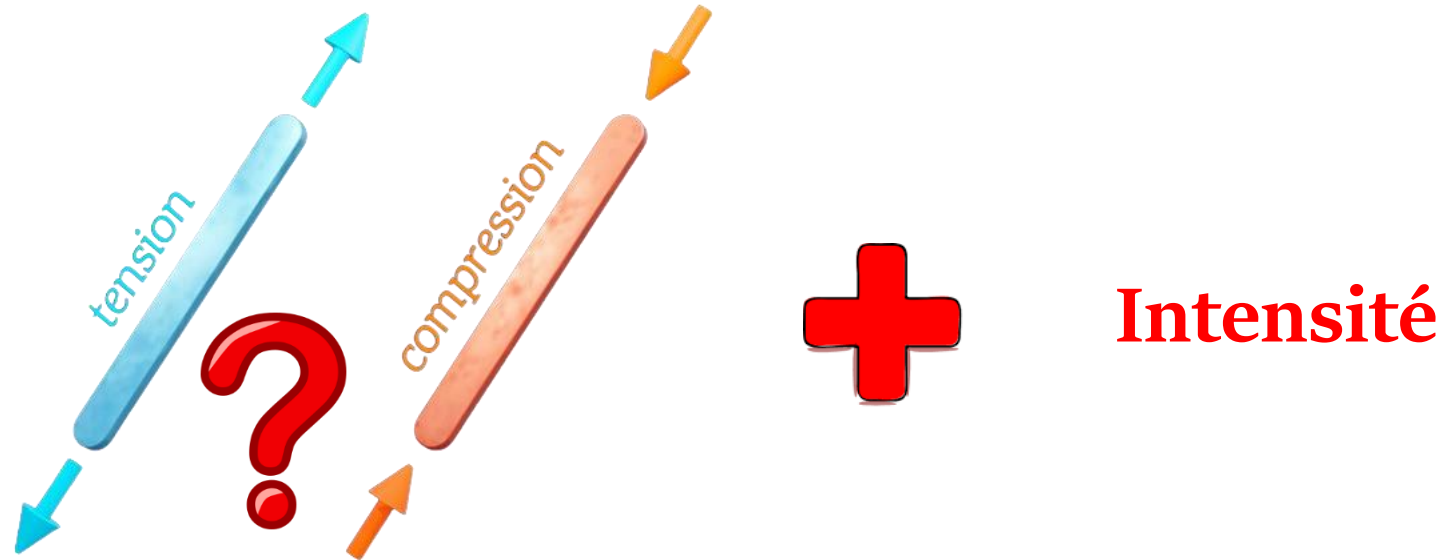


Forme instable



Les angles peuvent changer alors que la longueur de chaque barre reste constante

Ils existent plusieurs méthodes pour analyser ‘quantitativement’ les efforts dans un treillis. Ces différentes méthodes permettent de déterminer l’intensité et le type des efforts dans les treillis.



Il est possible d’étudier soit les nœuds, soit les barres. Cela conduit aux deux méthodes suivantes :

La méthode des nœuds

La méthode des sections
(de Ritter)

La méthode de Ritter

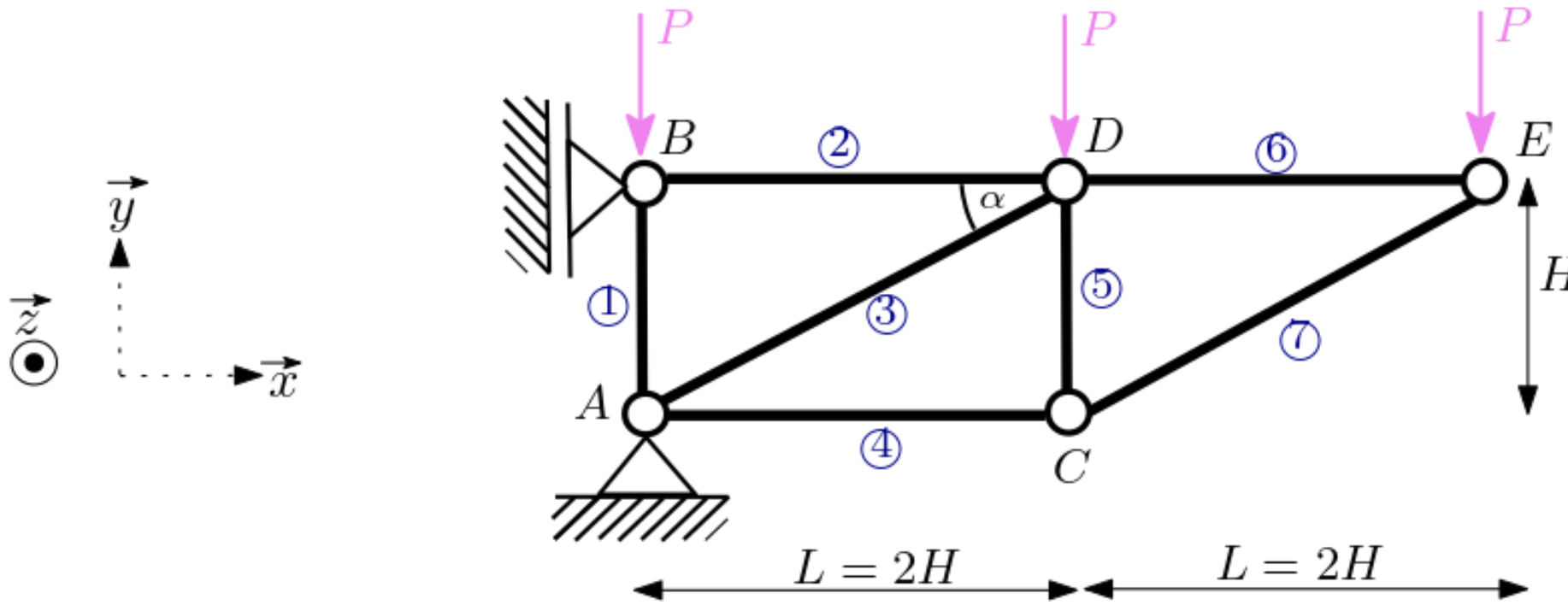
Méthode des sections de Ritter :

La méthode des sections de Ritter est utilisée lorsque l'on souhaite déterminer uniquement certaines efforts individuels dans la barre dans un treillis.

Elle s'énonce de la manière suivante :

- ✓ On détermine les réactions d'appuis (PFS sur le treillis complet)
- ✓ On sépare le treillis par une ligne imaginaire qui coupe au maximum trois barres dont on veut calculer les efforts internes
- ✓ On fait apparaître les efforts internes dans chaque partie
- ✓ On choisit d'isoler une des deux parties sur laquelle on applique le Principe Fondamentale de la Statique

Exemple :



$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

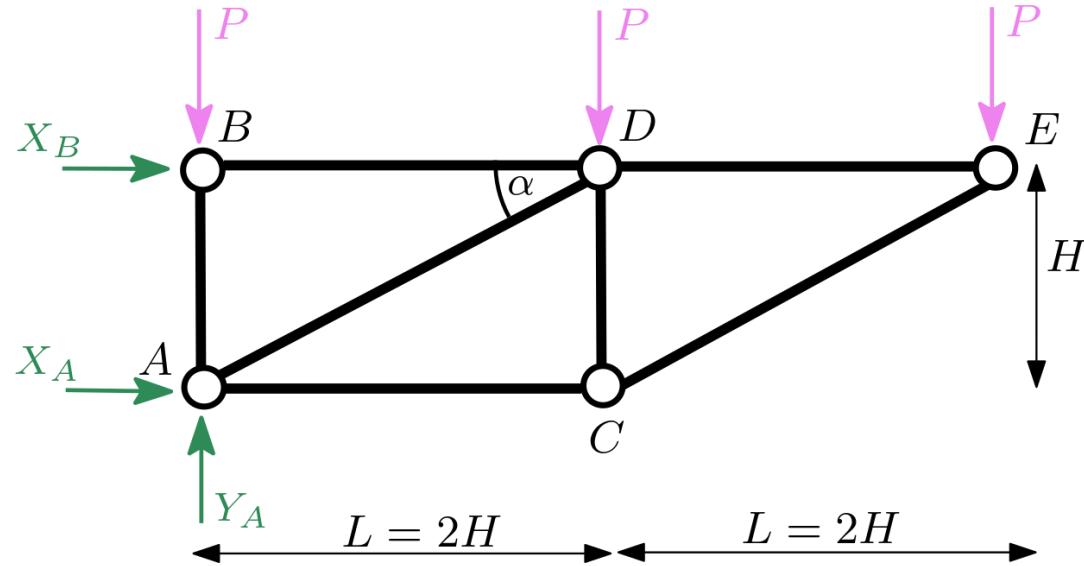
Soit b le nombre de barres dans un treillis et n le nombre de nœuds

Vérification de la stabilité du treillis :

- Degré d'hyperstatisme intérieur : $h_i = b - 2n + 3 = 7 - 2(5) + 3 = 0$
- Degré d'hyperstatisme extérieur : $h_e = r - 3 = 3 - 3 = 0$
- Degré d'hyperstatisme : $h = h_i + h_e = 0 + 0 = 0$ \longrightarrow **Structure isostatique**

Déterminer les efforts normaux dans les barres BD, AD, et AC :

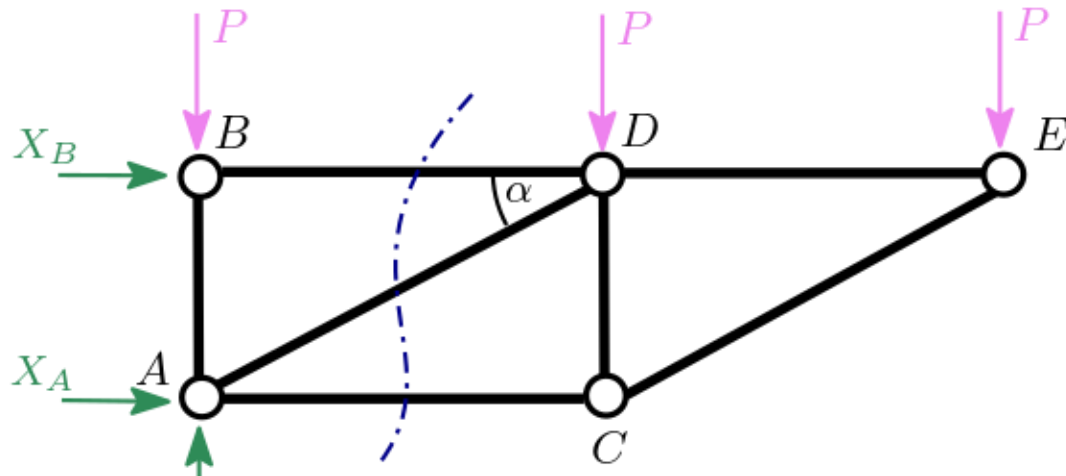
- On représente les actions de liaison sur le treillis



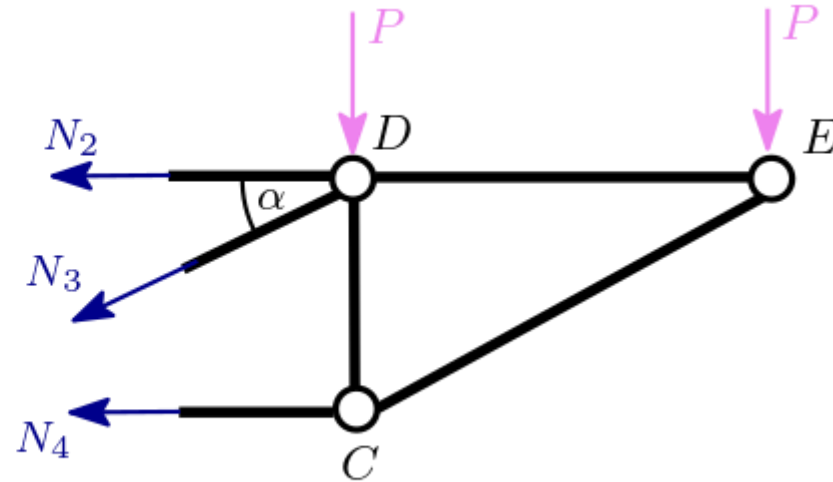
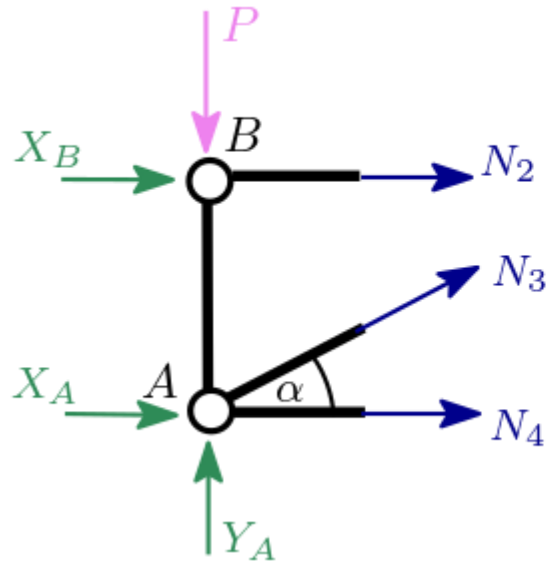
$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

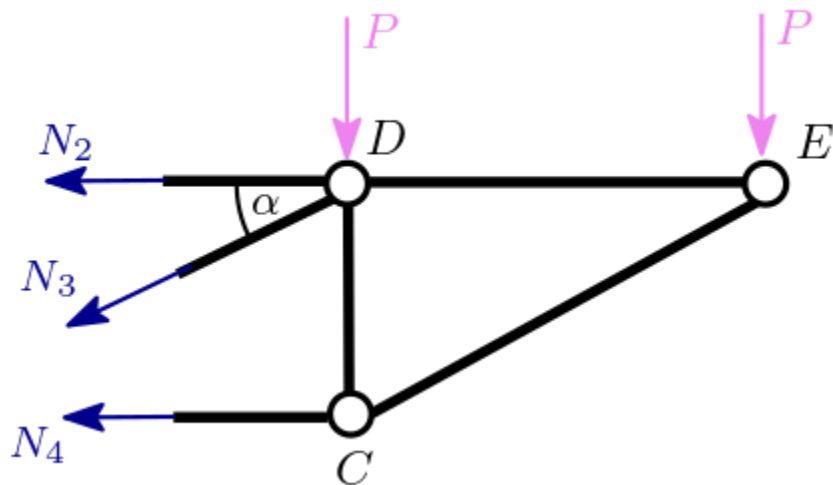
- On coupe le treillis en deux parties par une ligne imaginaire comme suit :



- On fait apparaître les efforts normaux



- On applique le PFS sur la partie choisie (ici, il s'avère mieux de travailler sur la partie CDE pour éviter de traîner des erreurs de calcul qui peuvent apparaître lors de la détermination de X_A , Y_A et X_B)



$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}/\vec{x}} = 0 \\ \sum \vec{F}_{\text{ext}/\vec{y}} = 0 \\ \sum \vec{M}_{\text{ext}/D} = 0 \end{cases}$$

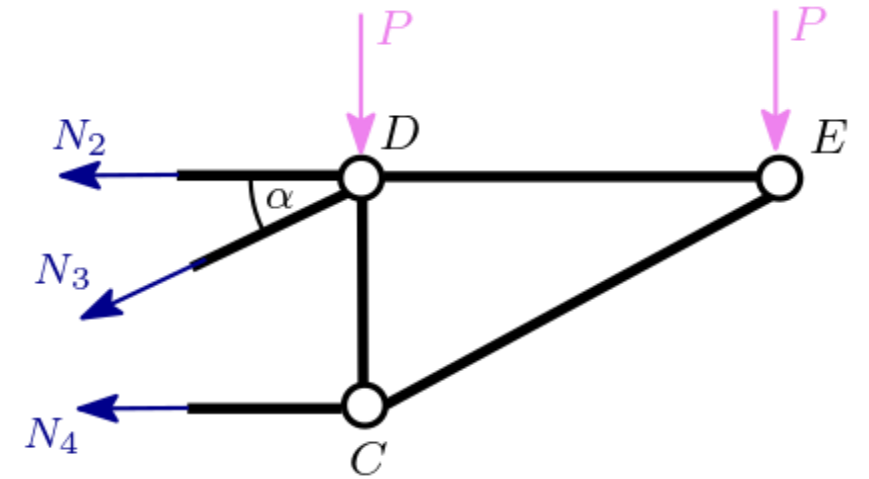
$$\sum F_{\text{ext}/x} = 0 \implies -N_2 - N_3 \cos(\alpha) - N_4 = 0$$

$$\sum F_{\text{ext}/y} = 0 \implies -N_3 \sin(\alpha) - 2P = 0$$

$$\sum M_{\text{ext}/D} = 0 \implies 2HP + HN_4 = 0$$

$$N_4 = -\frac{2HP}{H} = -2P$$

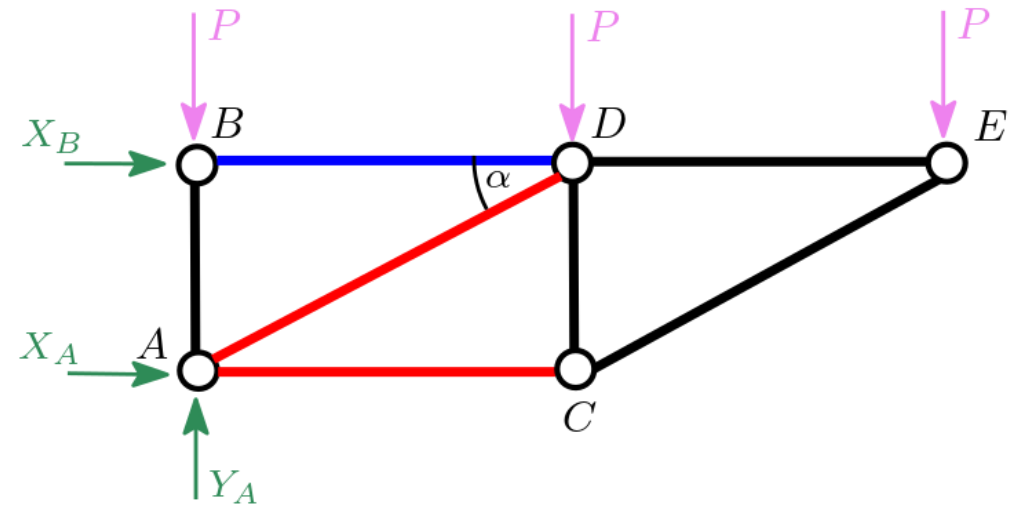
$$N_3 = -\frac{2P}{\sin(\alpha)} = -2\sqrt{5}P$$



$$\begin{aligned} N_2 &= -N_3 \cos(\alpha) - N_4 \\ &= 2\sqrt{5} \times P \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 2P \\ &= 6P \end{aligned}$$

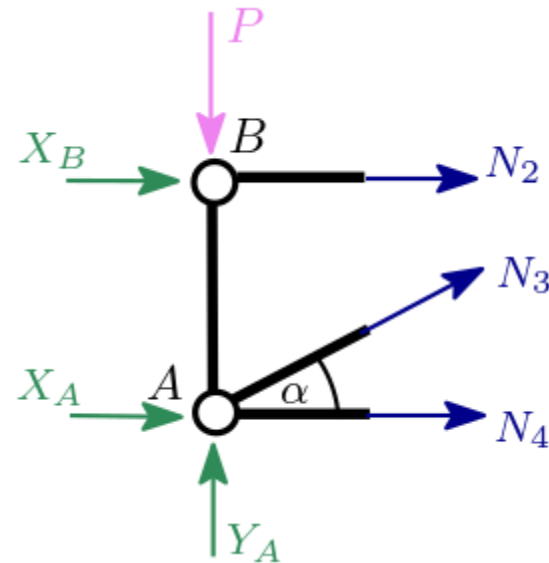
Récapitulatif :

- $N_2 > 0$, alors la barre BD est en traction
- $N_3 < 0$, alors la barre AD est en compression
- $N_4 < 0$, alors la barre AC est en compression



Exercice :

- Retrouver les efforts normaux dans BD , AD et AC en appliquant le PFS sur l'autre partie du treillis



- Trouver les efforts normaux dans le reste des barres, à savoir AB , CD , DE et CE