Plan du cours :

+ **Chapitre 1** : Introduction à la RdM –Rappels sur la statique des solides

+ **Chapitre 2 :** Torseurs des efforts intérieurs

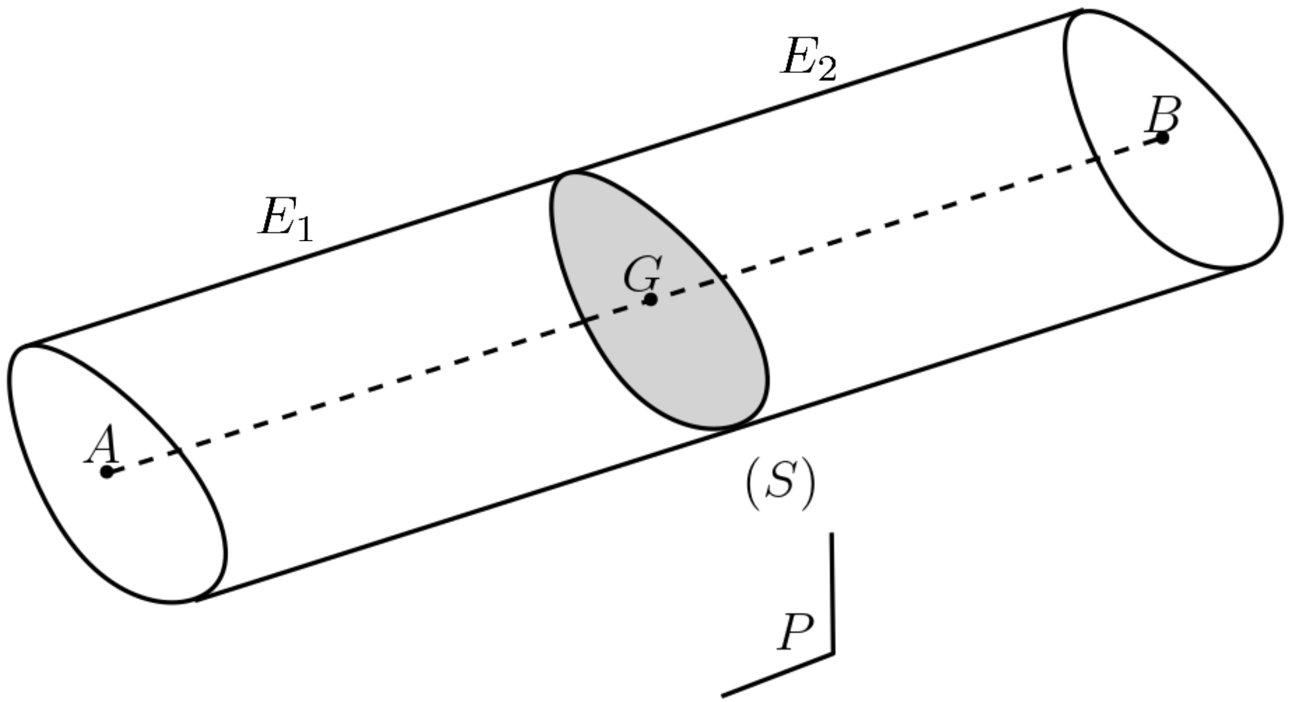
+ **Chapitre 3 :** Sollicitations élémentaires : Traction et compression

+ **Chapitre 4 :** Sollicitations élémentaires : cisaillement

UNIVERSITÉ DE LYON | IUT Lyon 1 l'excellence technologique

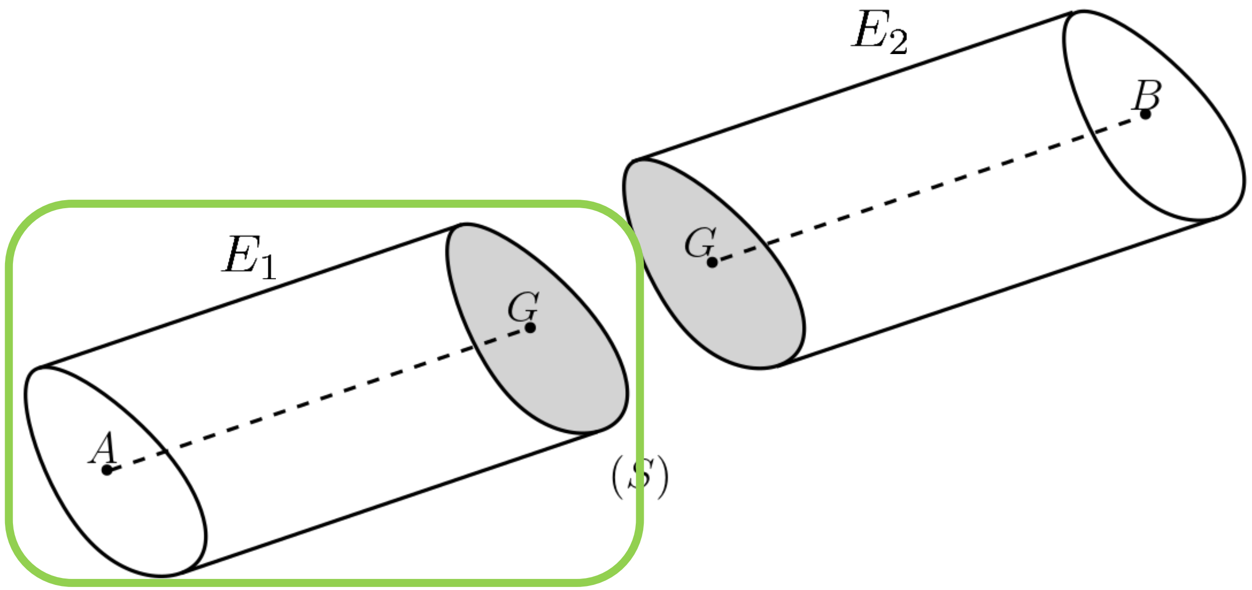
Efforts intérieurs :

On considère une poutre que l'on oriente du point A vers le point B.



On **séparé artificiellement** au point G d'abscisse x la poutre en deux parties :
E_1 pour la partie gauche (amont) et E_2 pour la partie droite (avale)

A partir de la coupure, on peut isoler un des 2 tronçons de la poutre, (ici on isole E_1):



Ce tronçon est soumis à une partie des actions mécaniques extérieurs $\left\{\mathcal{T}_{ext\to E_1}\right\}$ **et aussi** aux actions de la partie avale E_2 sur la partie amont E_1 à travers de la section *(S)*.

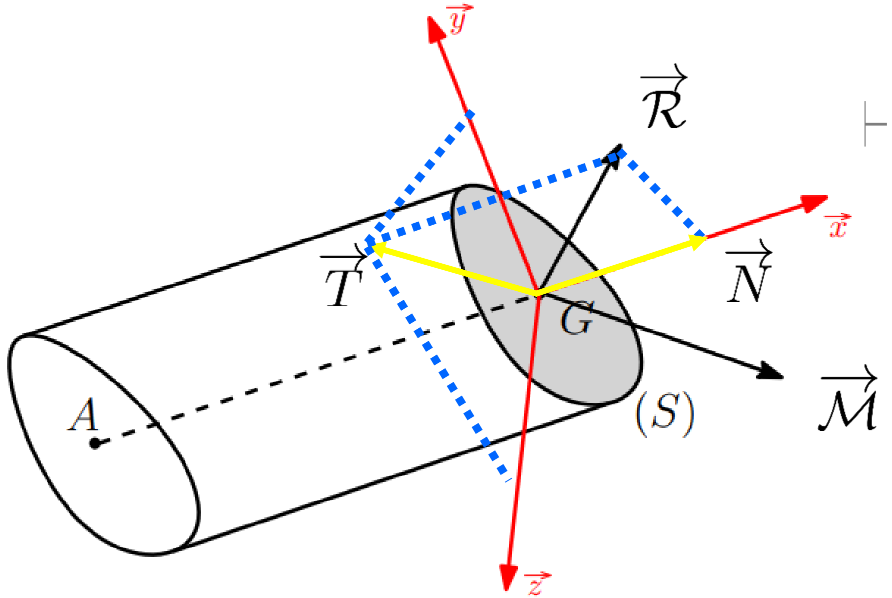
Par définition (convention), le torseur des actions mécaniques de E_2 sur E_1 est appelé torseur des efforts intérieurs

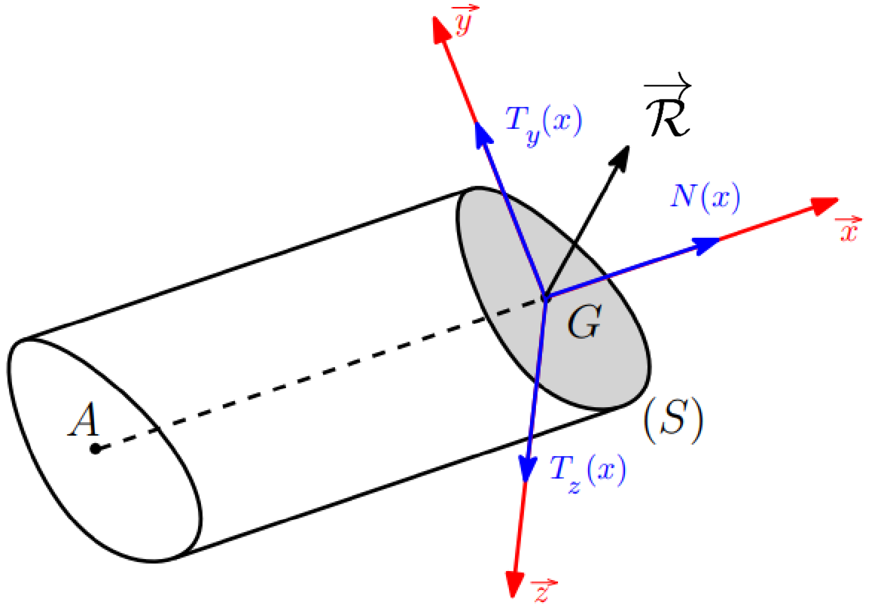
$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_G = \left\{\mathcal{T}_{E_2\to E_1}\right\}_G = \left\{\overrightarrow{\mathcal{R}}(x) \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(x)\right\}_G$$

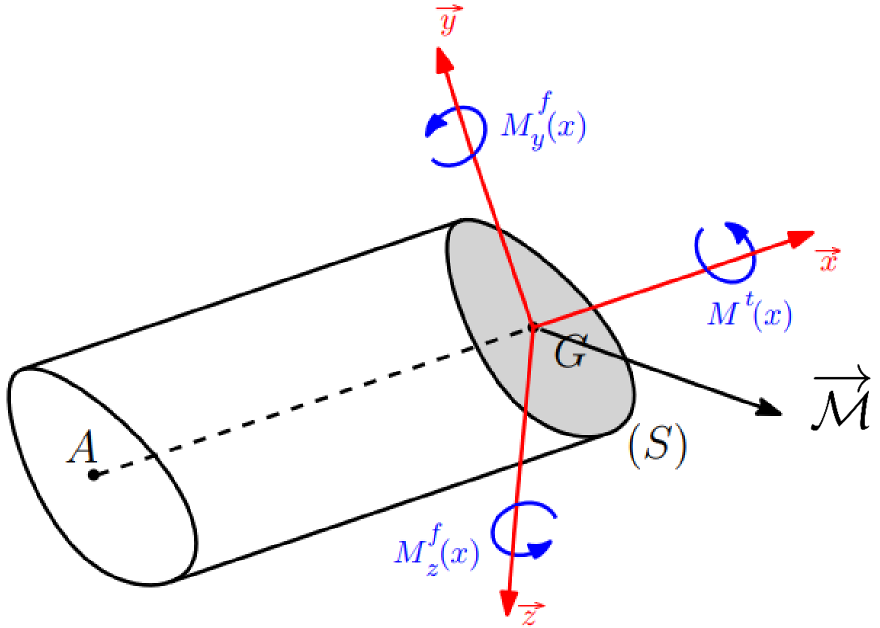
Torseur des efforts intérieurs ≡ Torseur de cohésion ≡ Torseur de section

Cette liaison (les efforts et les moments qu'elle transmet) assure la cohésion des éléments de la poutre.

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_G = \left\{\overrightarrow{\mathcal{R}}(x) \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(x)\right\}_G$$







IUT Lyon 1
l'excellence technologique

La résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ se projette sur l'axe $(G, \vec{x})$ normal à (S) en $\overrightarrow{N}$ et sur le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$ plan de la section droite (S) en $\overrightarrow{T}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} = \text{(effort normal)} + \text{(effort tranchant)}}$$

Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ se projette sur l'axe $(G, \vec{x})$ normal à (S) en $\overrightarrow{M}^t$ et sur le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$ de la section droite (S) en $\overrightarrow{M}^f$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{M}^t + \overrightarrow{M}^f = \text{(moment de torsion)} + \text{(moment de flexion)}}$$

Récapitulatif :

$$\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} \overrightarrow{\mathcal{R}} & \overrightarrow{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M^t \\ T_y & M_y^f \\ T_z & M_z^f \end{array} \right\}_{G,R}$$

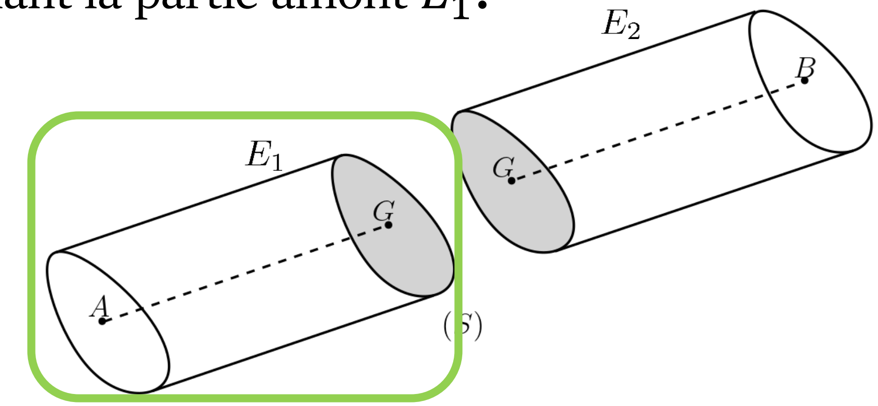
Composante	Symbole	Caractéristique
Effort normal	N	perpendiculaire à la section droite
Efforts tranchants	T_y ou T_z	ont tendance à trancher la poutre perpendiculairement à la ligne moyenne
Moment de torsion	M^t	a tendance à tordre la poutre autour de la ligne moyenne
Moments fléchissants	M_y^f ou M_z^f	ont tendance à faire fléchir la poutre autour d'un axe perpendiculaire à la ligne moyenne

En fonction de la nullité ou non des composantes du torseur de cohésion, on peut identifier un certain nombre de sollicitations dites *élémentaires* qui sont caractéristiques des cas de charges couramment rencontrés. Le tableau ci-dessous résument ces différentes sollicitations élémentaires.

Sollicitation élémentaire	Composante(s) non nulle(s)	$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}$
Traction/Compression	N	$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Cisaillement pur	T_y ou T_z	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
Torsion	M^t	$\begin{Bmatrix} 0 & M^t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Flexion pure	M_y^f ou M_z^f	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y^f \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_z^f \end{Bmatrix}$
Flexion simple	$(T_y$ et $M_z^f)$ ou $(T_z$ et $M_y^f)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_z^f \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y^f \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$

Comment déterminer le torseur de cohésion ?

En isolant la partie amont E_1 :



On applique le PFS sur E_1 au point G :

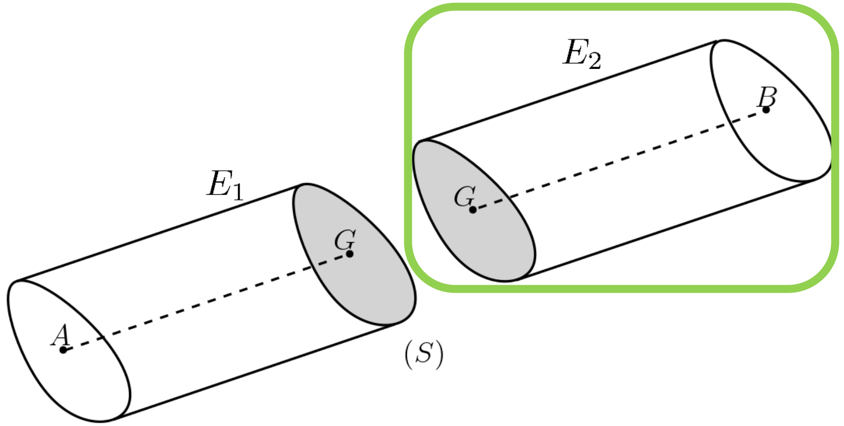
$$\left\{\mathcal{T}_{E_2\rightarrow E_1}\right\}_{G,R} + \left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_1}\right\}_{G,R} = \left\{0\right\}_{G,R}$$

Comme $\left\{\mathcal{T}_{E_2\rightarrow E_1}\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R}$

$$\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} + \left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_1}\right\}_{G,R} = \left\{0\right\}_{G,R}$$

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} = -\left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_1}\right\}_{G,R}}$$

En isolant la partie aval E_2 :



On applique le PFS sur E_2 au point G :

$$\left\{\mathcal{T}_{E_1\rightarrow E_2}\right\}_{G,R} + \left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_2}\right\}_{G,R} = \left\{0\right\}_{G,R}$$

Comme $\left\{\mathcal{T}_{E_1\rightarrow E_2}\right\}_{G,R} = -\left\{\mathcal{T}_{E_2\rightarrow E_1}\right\}_{G,R} = -\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R}$

$$-\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} + \left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_2}\right\}_{G,R} = \left\{0\right\}_{G,R}$$

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_{ext\rightarrow E_2}\right\}_{G,R}}$$

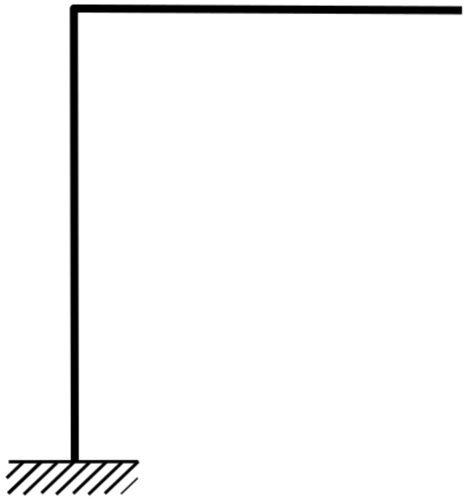
Ce qu'il faut retenir :

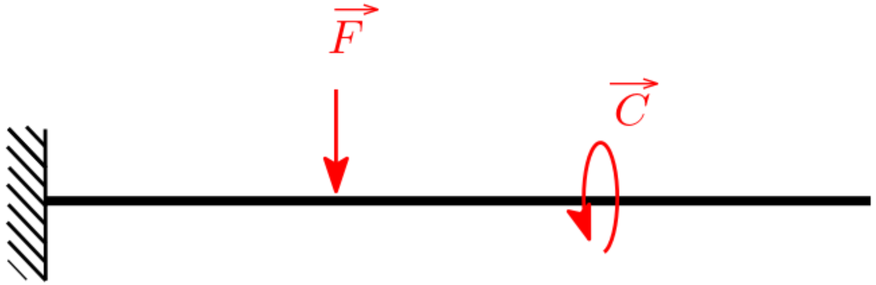
Le torseur de cohésion permet de déterminer les actions mécaniques exercées à travers une coupure fictive de la partie E_1 sur la partie E_2. Ce torseur s'exprime toujours au point G de la poutre étudiée.

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = -\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}} \rightarrow E_1\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_{\text{ext}} \rightarrow E_2\right\}_{G,R}}$$

Le concepteur peut être amené à étudier plusieurs coupures sur une même poutre, on parle alors de tronçon de poutre notamment :

- Lorsque la poutre comporte une discontinuité géométrique (changement de direction de la ligne moyenne)
- Lorsque la poutre comporte une discontinuité liée à la présence d'actions mécaniques concentrées (efforts, moments, liaisons)



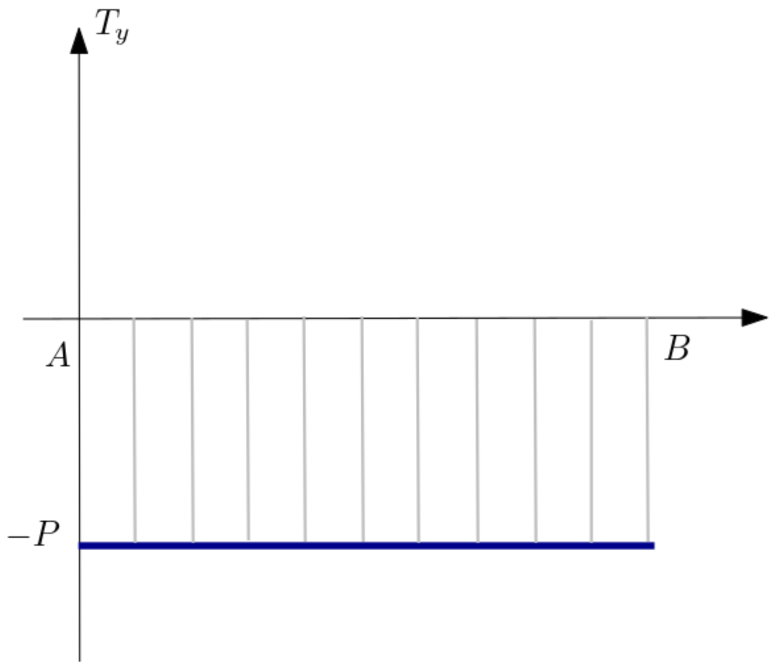


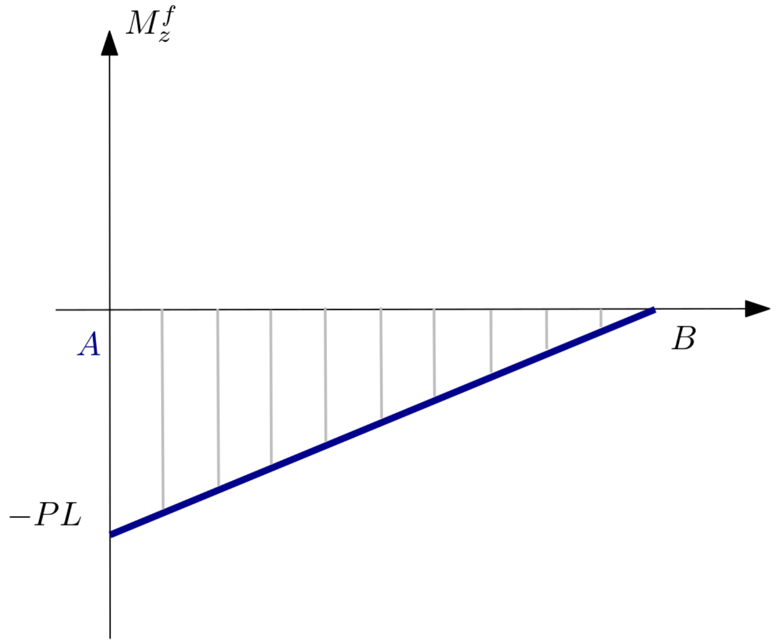
Diagrammes de sollicitation:

Les diagrammes de sollicitation permettent de décrire l'évolution des éléments de réduction du torseur interne d'une structure.

Ces représentations sont utile en dimensionnement pour repérer **la section de la poutre la plus sollicitée**.

Supposons que : $\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & P(x-L) \end{matrix}\right\}_{G,R}$





Diagrammes de sollicitation :

Les diagrammes de sollicitation permettent de décrire l'évolution des éléments de réduction du torseur interne d'une structure.
Ces représentations sont utile en dimensionnement pour repérer **la section de la poutre la plus sollicitée**.

$$\left\{\mathcal{T}_{int}\right\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N & M^t \\ T_y & M_y^f \\ T_z & M_z^f \end{Bmatrix}_{G,R}$$

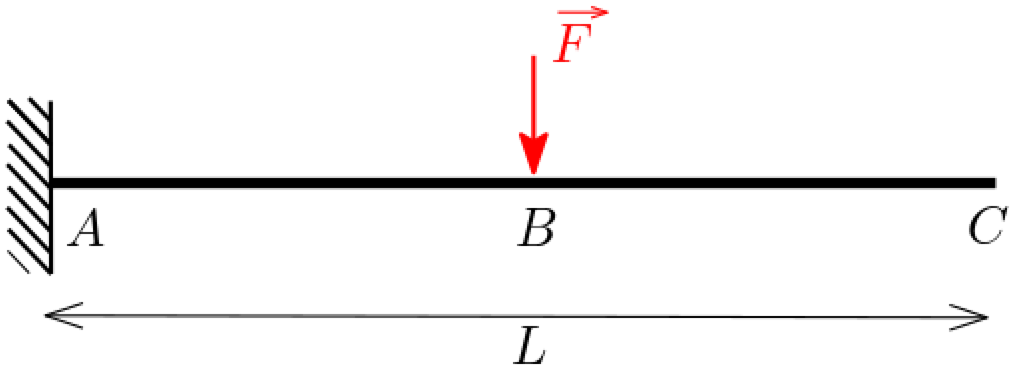
Remarque :

Afin de vérifier les résultats obtenus, on démontre les relations suivantes entre les diagrammes d'effort tranchant et de moment de flexion :

$$\boxed{\frac{\partial M_y^f}{\partial x} = T_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial M_z^f}{\partial x} = -T_y}$$

Exercice :

Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre et tracer les diagrammes de sollicitation.



$$\left\{\mathcal{T}_B\right\}_{B,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$$

On considère deux tronçons :

Tronçon BC : $\frac{L}{2} < x < L$

On coupe au point G d'abscisse x et on isole la partie E_2 (l'isolation de la partie amont E_1 entraîne beaucoup de calcul)

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_{\text{ext}} \rightarrow E_2\right\}_{G,R} = \left\{0\right\}_{G,R}$$

Tronçon AB : $0 < x < \frac{L}{2}$

On coupe au point G d'abscisse x et on isole la partie E_2 (l'isolation de la partie amont E_1 entraîne beaucoup de calcul)

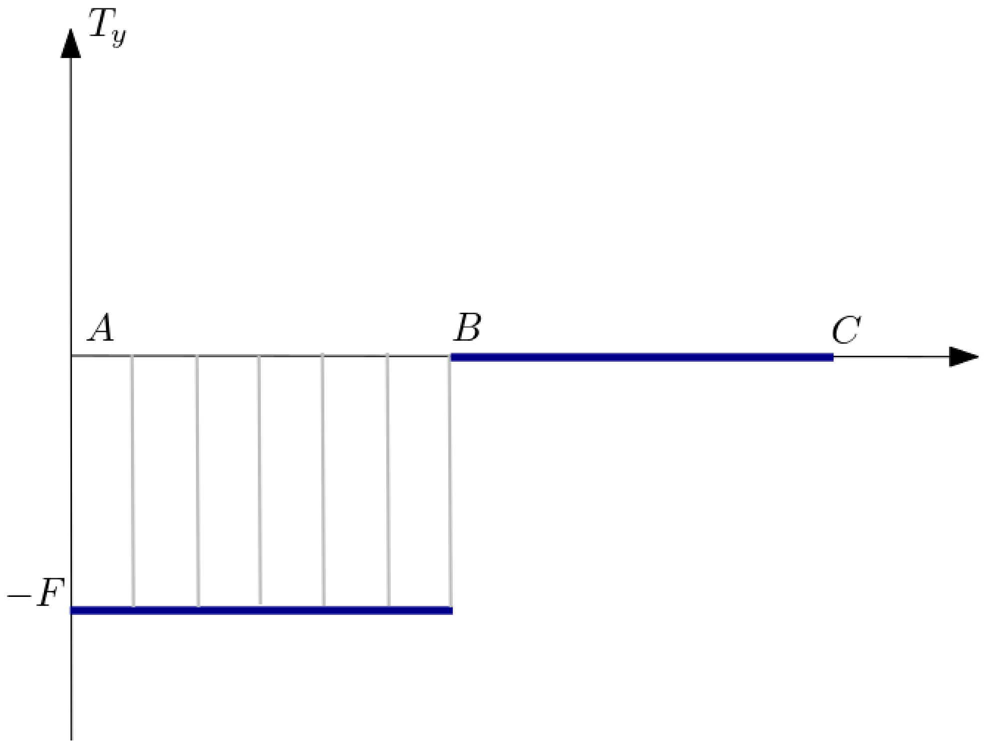
$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_{\text{ext}} \rightarrow E_2\right\}_{G,R} = \left\{\mathcal{T}_B\right\}_{G,R}$$

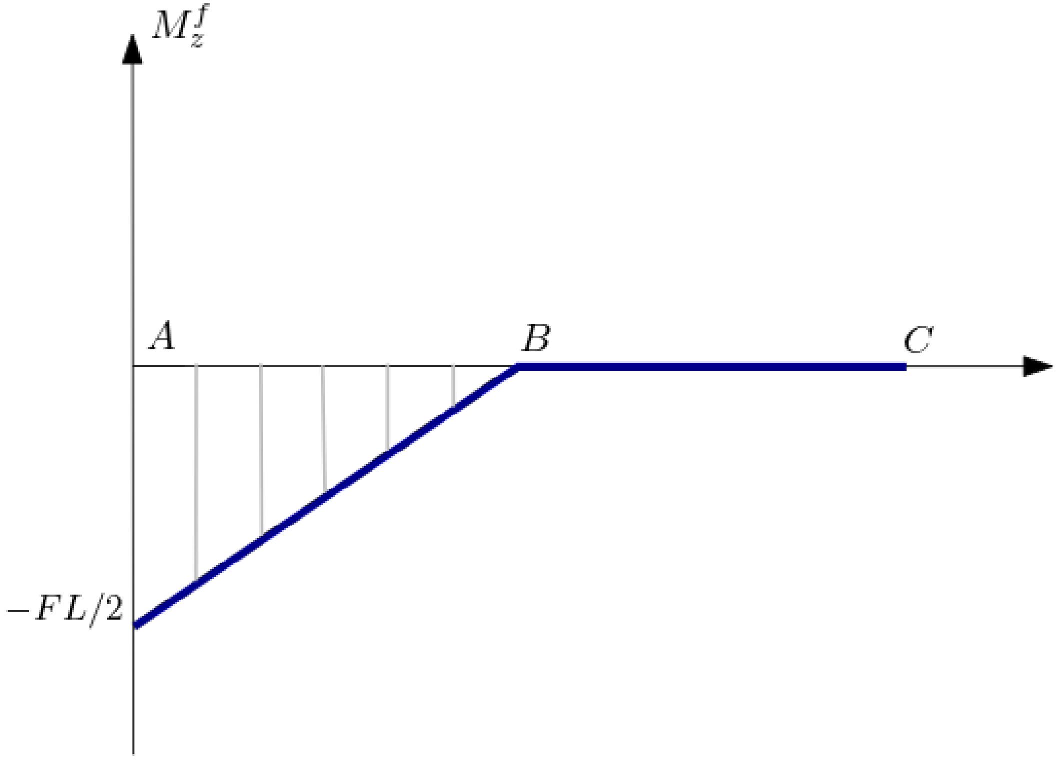
$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F(x - \frac{L}{2}) \end{Bmatrix}_{G,R}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F(x-\frac{L}{2}) \end{Bmatrix}_{G,R} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

Les diagrammes de sollicitation sont les suivants :





Notion de contrainte – Vecteur contrainte :

Les actions mécaniques de cohésion sont les efforts que le tronçon E_2 exerce sur le tronçon E_1 à travers de la section droite *S*. Nous modélisons ces actions par le torseur des efforts intérieurs caractérisé au point *G*, centre d'inertie géométrique de la section droite.

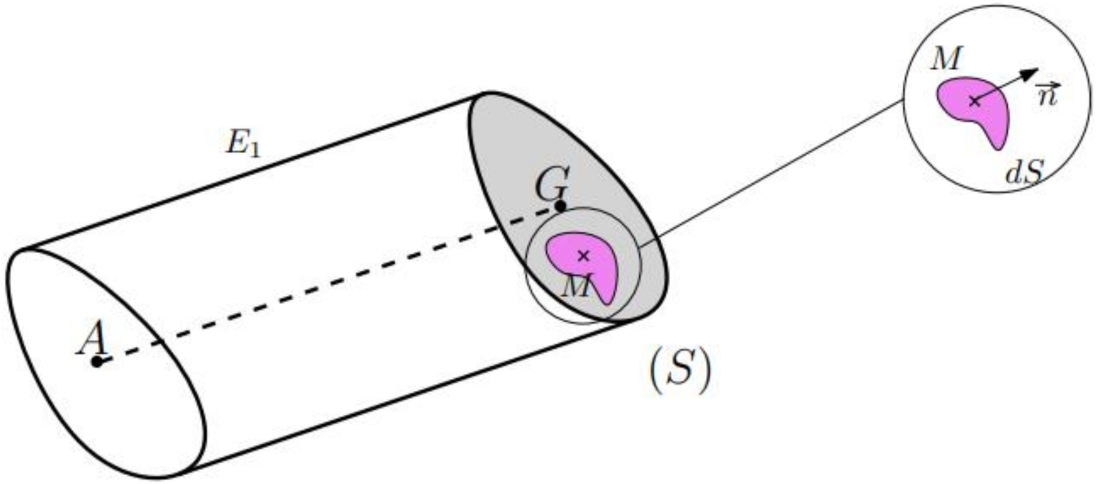
Ce torseur représente une vision globale sur la section droite des actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la surface. Ces actions mécaniques locales sont réparties sur toute la surface.

Considérons un point M de la surface (*S*). Considérons un petit élément de surface dS de normale $\vec{n}$ autour du point M.
Sur dS s'exercent une partie seulement des efforts intérieurs : $d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1)$

En introduisant l'unité de surface dS, on obtient :

$$d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) = \boxed{\overrightarrow{T}(M, \vec{n})}.dS$$

Vecteur contrainte = densité surfacique d'efforts
= densité de force par unité de surface



L'unité du vecteur contrainte est le rapport (force)/(unité de surface) soit des N/m^2 ou Pa

Contrainte normale et contrainte tangentielle

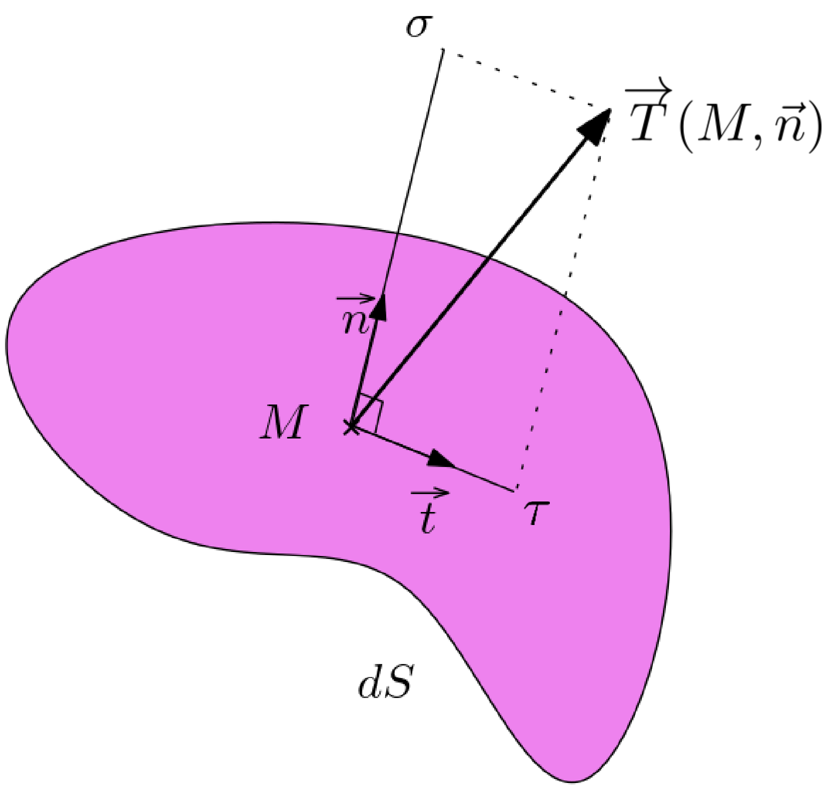
Définition

Projetons le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}(M,\vec{n})$ sur :

$\vec{n}$ le vecteur normal à la surface *dS*

$\vec{t}$ un vecteur tangent à la surface *dS*

On peut donc écrire : $\boxed{\overrightarrow{T}(M,\vec{n}) = \sigma\ \vec{n} + \tau\ \vec{t}}$



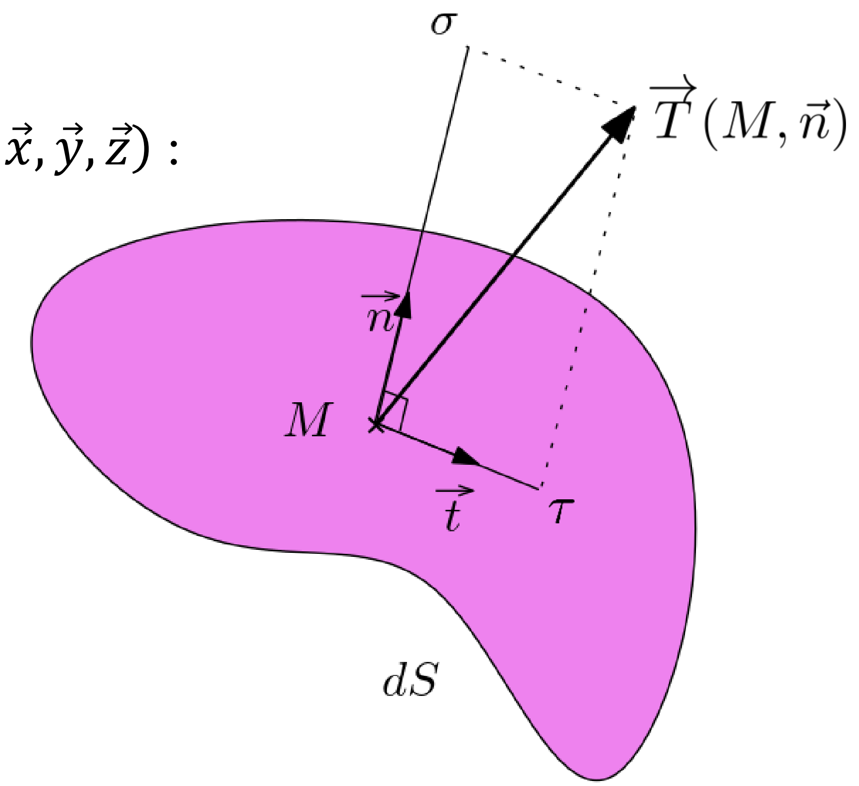
Remarque :

- La contrainte normale σ traduit les actions surfaciques locales de traction ou compression au sein de la matière
- La contrainte tangentielle τ traduit les actions surfaciques locales de cisaillement au sein de la matière

Contrainte normale et contrainte tangentielle

Décomposition dans le repère local :

Le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}(M,\vec{n})$ peut être exprimé dans le repère local $(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:



$$\overrightarrow{T}(M,\vec{n}) = \sigma\ \vec{n} + \tau\ \vec{t} = \sigma\ \vec{x} + \tau_y\ \vec{y} + \tau_z\ \vec{z}$$

$$\overrightarrow{T}(M,\vec{n}) = \overrightarrow{T}(M,\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Axe de projection

Normale à la section

Relation entre contraintes et sollicitations

Torseur des actions mécaniques sur *dS*, au point de réduction *G* :

$$\left\{ \begin{array}{cc} d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) & \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) & \overrightarrow{GM} \wedge d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_G$$

En remplaçant par le vecteur contrainte, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \overrightarrow{T}(M, \vec{n})dS & \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T}(M, \vec{n})dS \end{array} \right\}_G$$

Intégrons ce torseur sur toute la surface *S* pour prendre en compte toute les actions, et donc obtenir le torseur de cohésion à la section *S* exprimées au point *G :*

$$\begin{aligned} \left\{\mathcal{T}_{\text{int}}\right\}_G = \left\{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\right\}_G &= \left\{ \begin{array}{cc} \overrightarrow{\mathcal{R}}_{E_2 \rightarrow E_1} & \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G, E_2 \rightarrow E_1} \end{array} \right\}_G \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \iint_S d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) & \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge d\overrightarrow{F}(E_2 \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_G \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \iint_S \overrightarrow{T}(M, \vec{n})dS & \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T}(M, \vec{n})dS \end{array} \right\}_G \end{aligned}$$

Expression détaillée des contraintes/composantes du torseur de cohésion

- Résultante du torseur de cohésion

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}_G = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \qquad \text{D'où} \quad \overrightarrow{\mathcal{R}}_G = \iint_S d\overrightarrow{F}(E_2 \to E_1) = \iint_S \overrightarrow{T}(M,\vec{n})dS = \boxed{\begin{Bmatrix} N = \iint_S \sigma_{xx}\, dS \\ T_y = \iint_S \tau_{yx}\, dS \\ T_z = \iint_S \tau_{zx}\, dS \end{Bmatrix}}$$

- Moment du torseur de cohésion

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \begin{Bmatrix} M^t \\ M_y^f \\ M_z^f \end{Bmatrix} \qquad \text{D'où} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge d\overrightarrow{F}(E_2 \to E_1) = \iint_S \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dS$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \boxed{\begin{Bmatrix} M^t = \iint_S (y\,\tau_{zx} - z\tau_{yx})\, dS \\ M_y^f = \iint_S z\,\sigma_{xx}\, dS \\ M_z^f = -\iint_S y\,\sigma_{xx}\, dS \end{Bmatrix}}$$