

Dimensionnement des Structures (DdS)



Zeinab AWADA

(zeinab.awada@univ-lyon1.fr)

Département GMP-Bâtiment A-bureau 44

Ressource R2.02- Dimensionnement des structures :

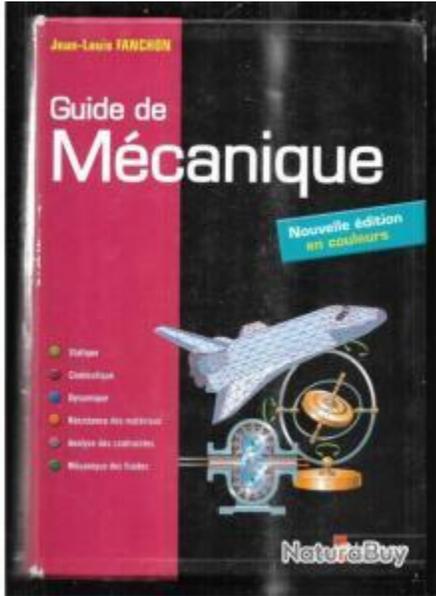
- + 5 semestres (S2, S3, S4, S5 et S6) au sein de la Ressource Rx.02
- + \subset Mécanique des solides déformables \subset Mécanique des milieux continus \subset Génie Mécanique
- + Souvent pris en compte dans les dossiers de poursuite d'études
- + Répartition en : CM (8h, 1h SAE), TD (22h), TP (16h)
- + Plusieurs évaluations sur un semestre

Il y a des interactions non négligeables avec toutes les ressources du BUT, notamment avec la Mécanique, les Mathématiques, la Science des Matériaux et la Conception.

Plan du cours :

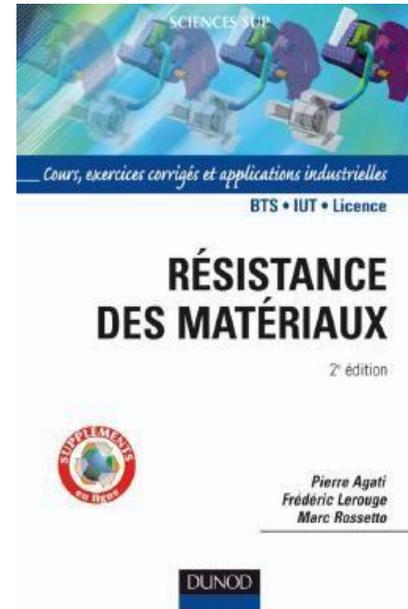
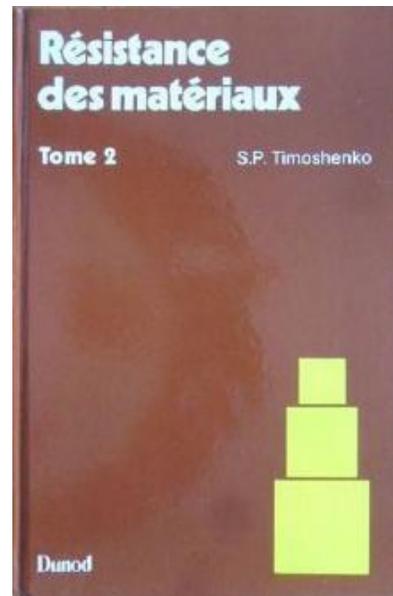
- + **Chapitre 1** : Introduction à la RdM –Rappels sur la statique des solides
- + **Chapitre 2** : Torseurs des efforts intérieurs
- + **Chapitre 3** : Sollicitations élémentaires : Traction et compression
- + **Chapitre 4** : Sollicitations élémentaires : Cisaillement

Références :



Guide de mécanique STI,
Jean-Louis Fanchon, Editions Nathan

Résistance des matériaux,
Timoshenko, Dunod 1990



Résistance des matériaux,
Dunod 2008

Résistance des matériaux,
Dunod



Résistance
mécanique
des matériaux
et des structures

Cours et exercices corrigés
2^e édition

DUNOD

Dimensionnement des structures (DdS) :⁺

Dimensionnement des structures \equiv Résistance des Matériaux (RdM)⁺

Objectif du dimensionnement des structures :

Le dimensionnement des structures permet de concevoir des systèmes mécaniques et/ou de valider leur utilisation.

Déterminer les formes et les dimensions d'une structure

Choisir le matériau le plus adapté

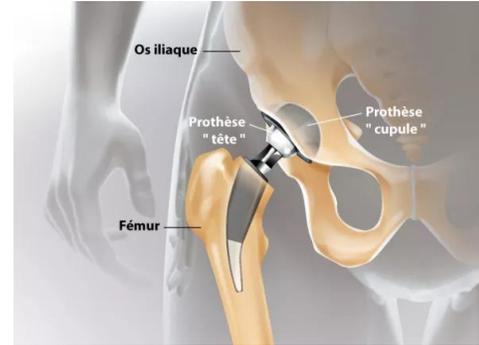
Satisfaire la fonction demandée dans toutes les conditions de vie de la structure

Champs d'application multiples :

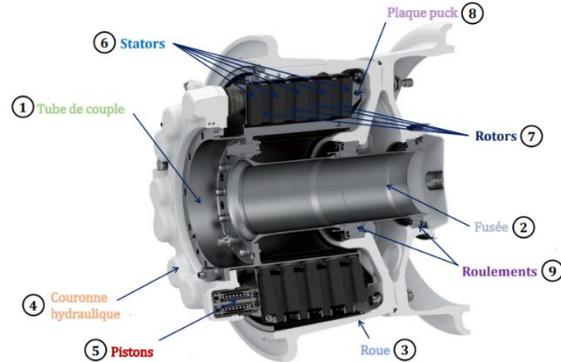
+ Génie civil : bâtiments, ponts, polygones électriques



+ Biomécanique



+ Aéronautique



+ Automobile



Classification des corps :

+ Corps tridimensionnel (3D) :

Les solides



+ Corps bidimensionnel (2D) :

Deux directions sont prépondérantes par rapport à la troisième

$$(e < 10L)$$



Coques

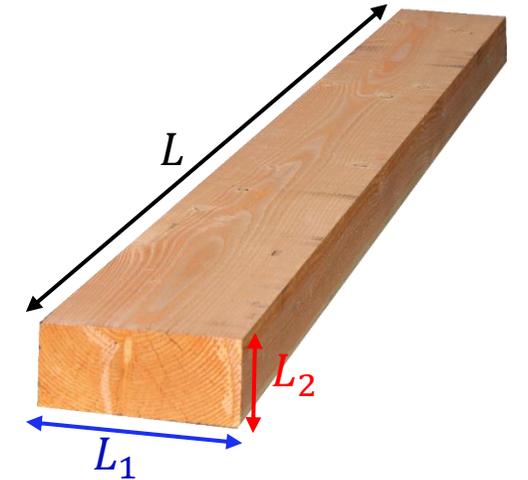


Plaques

+ Corps uni-dimensionnel (1D) :

Une direction est prépondérante par rapport aux deux autres directions

$$L > 5 \max(L_1, L_2)$$

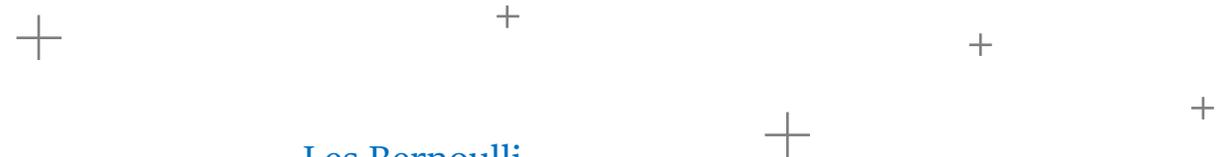


Théorie des plaques ou des coques

Théorie des poutres

Mécanique des Milieux continus

Un peu d'histoire :



+ Début des travaux expérimentaux au XV^{ème} siècle

Résistance d'un câble de cuivre à un effort de traction d'intensité croissante

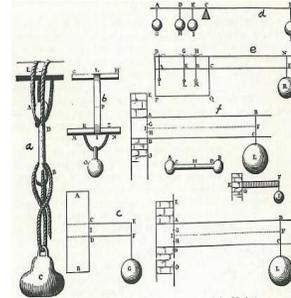
Léonard de Vinci (1452-1512)



Déformation élastique fonction linéaire des contraintes. Il a relié l'allongement à la force appliqué



Robert Hooke (1635-1703)



Les Bernoulli



Johann (1667-1748)

1^{ère} fois problème réduit à une équation différentielle

Equation différentielle de la flexion élastique

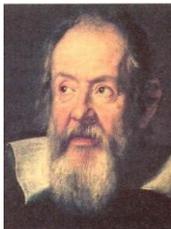


Euler (1707-1783)

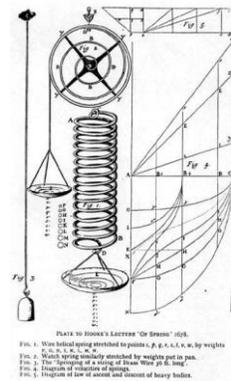
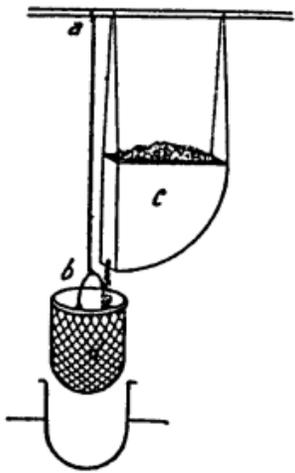


+ Début des travaux scientifique au XVII^{ème} siècle

Travaux sur la tension et la flexion des poutres



Galilée (1564-1642)



Flexion linéaire des poutres élastiques/ Relation linéaire entre courbure et moment flexion

Mariotte (1620-1684)



Jacob (1654-1705)



Equation différentielle du rayon de courbure

Daniel (1700-1782)

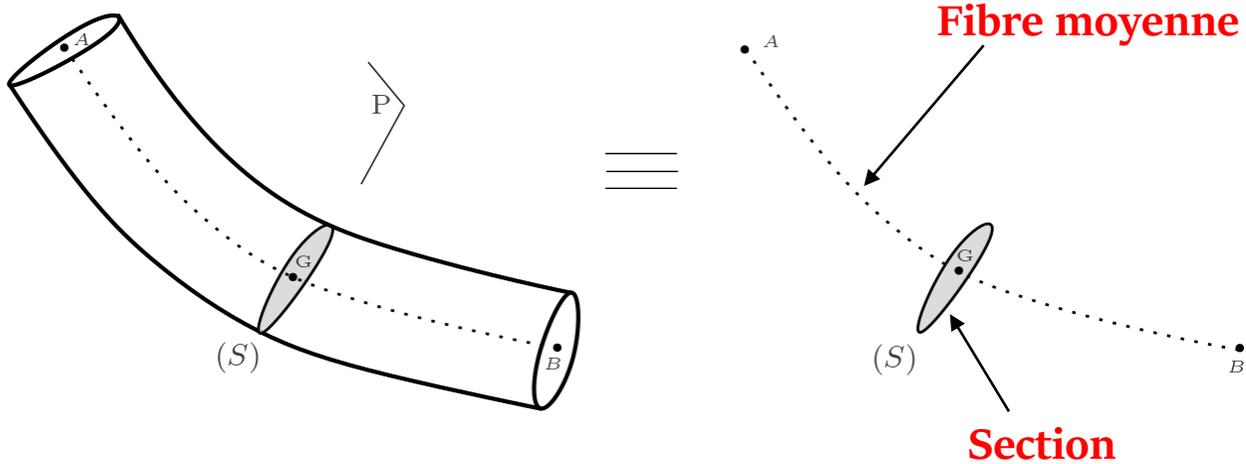


Travaux sur l'élasticité statique

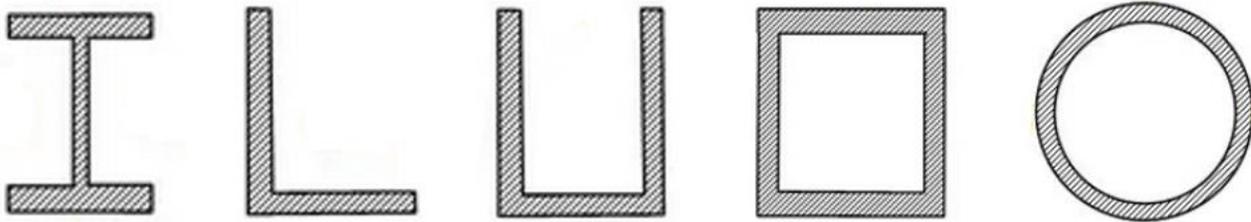
1970-...
Méthodes numériques

Définition d'une poutre :

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe AB dans l'espace



Différentes formes de sections :

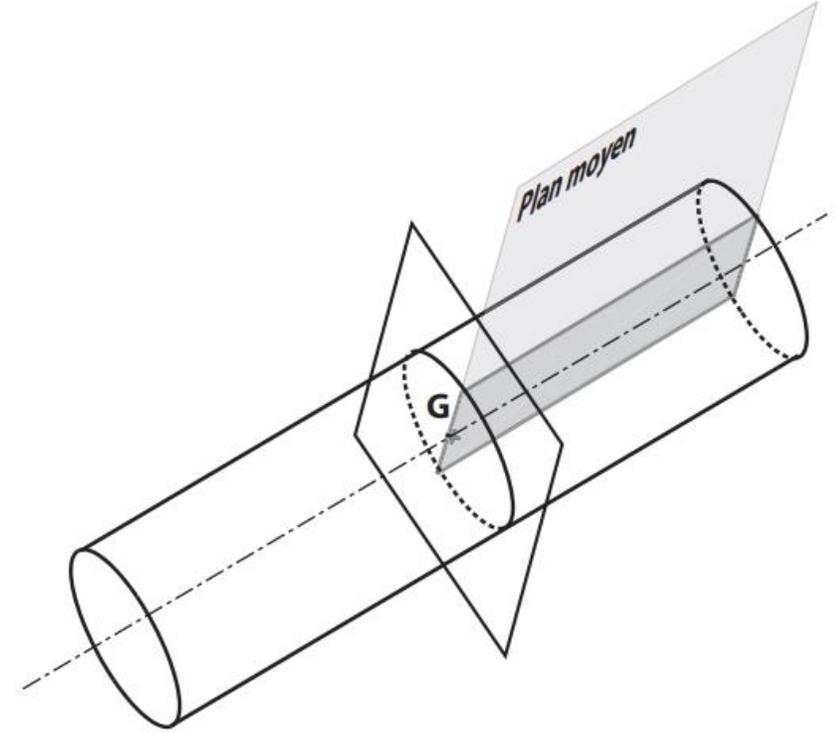


- Si la section (S) de la poutre est constante le long de AB, alors la poutre est dite 'à section constante'
- Si la section (S) de la poutre varie de façon continue le long de AB, alors la poutre est dite 'à section variable'



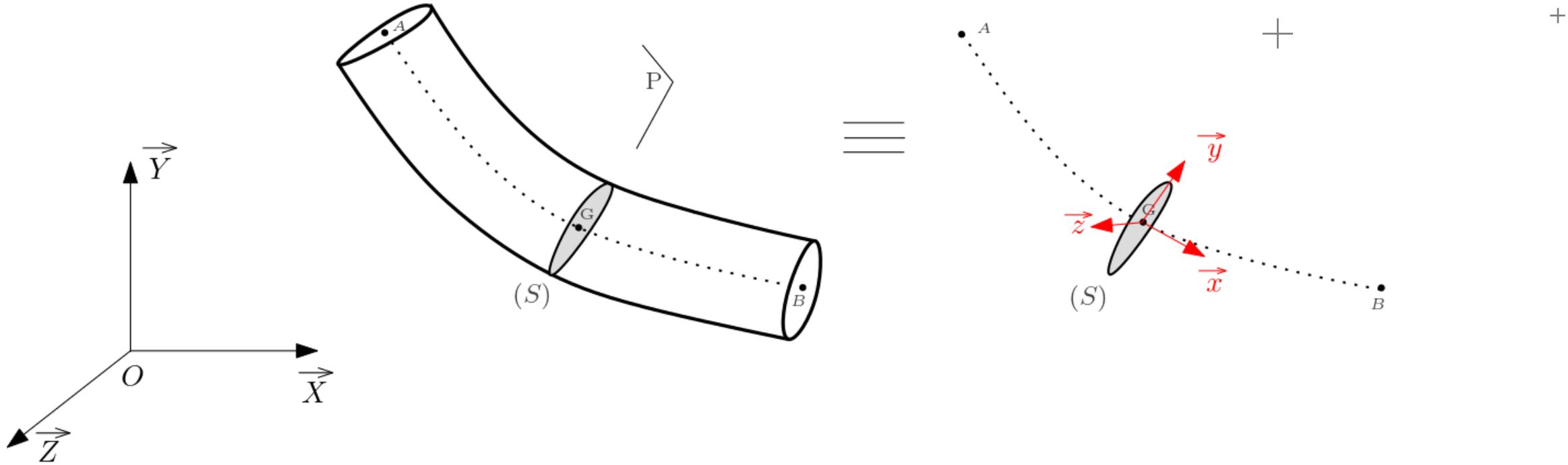
Définition d'une poutre :

- Un poutre gauche est une poutre dans la fibre moyenne est une courbe gauche (3 directions dans l'espace)
- Une poutre plane est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane (contenue dans un plan 2D)
- Un poutre droite est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite (1D)
- Une poutre à plan moyen est une poutre plane dont un plan de la fibre moyenne est un plan de symétrie, appelé plan moyen, de la poutre



Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons qu'aux poutres droites à plan moyen

Définition d'une poutre :



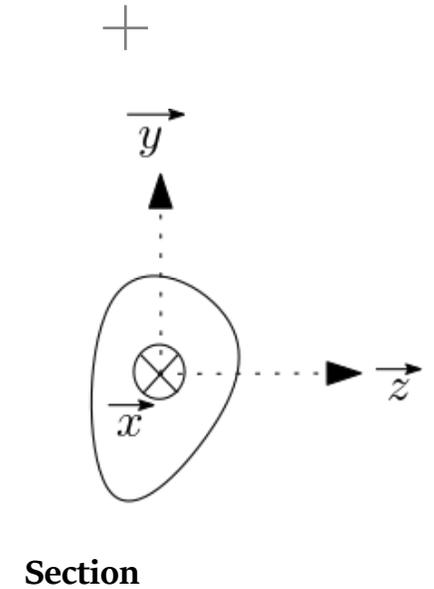
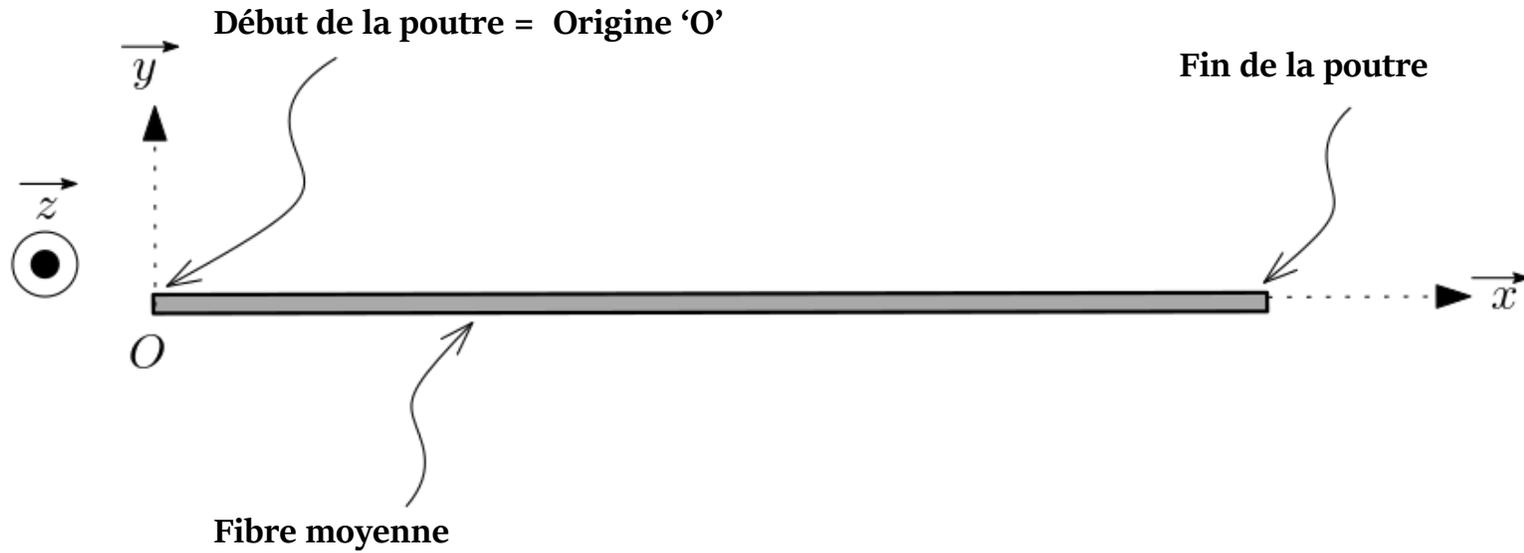
$\mathcal{R}_O(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$: repère global fixe

$\mathcal{R}_G(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: repère local mobile

\vec{x} est **tangent** à la ligne moyenne AB et **normal** à la section (S)

(\vec{y}, \vec{z}) définissant le plan de la section (S)

Modélisation d'une poutre :

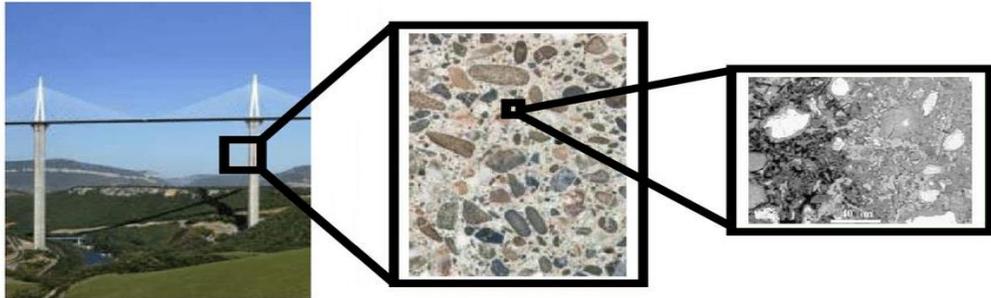


- O est positionné à l'origine de la fibre moyenne
- \vec{x} est le vecteur unitaire de la fibre moyenne
- \vec{y} est tel que le plan (\vec{x}, \vec{y}) soit le plan moyen (le plan de symétrie)
- \vec{z} est choisi de telle sorte que le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit **direct**

Hypothèses sur le matériau : + + + +

+ **Homogène** : à l'échelle macroscopique, les propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point

Matériaux homogènes : acier, aluminium, béton, plastique...
Matériaux hétérogènes : bois, béton armé, composite



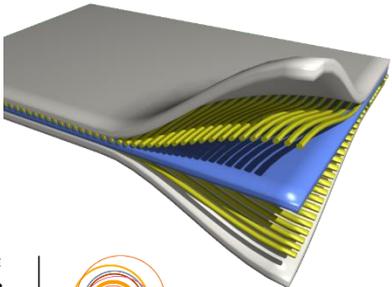
Vue macroscopique

Vue mésoscopique

Vue microscopique

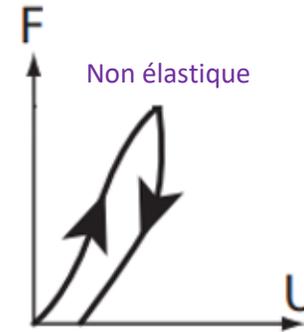
+ **Isotrope** : à l'échelle macroscopique, le matériau a les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace

Matériaux isotropes : acier, aluminium, béton, plastique...
Matériaux non-isotropes : bois, peau de banane, matériaux fibrés

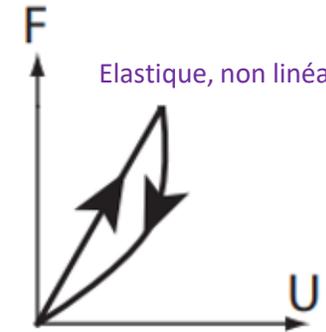


+ **Elastique** : Matériau qui reprend sa forme initiale après un cycle de chargement/déchargement

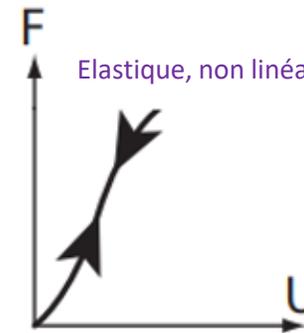
+ **Linéaire** : Les déformations sont proportionnelles aux contraintes (la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire)



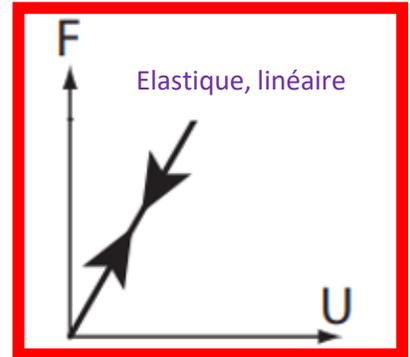
Non élastique



Elastique, non linéaire



Elastique, non linéaire

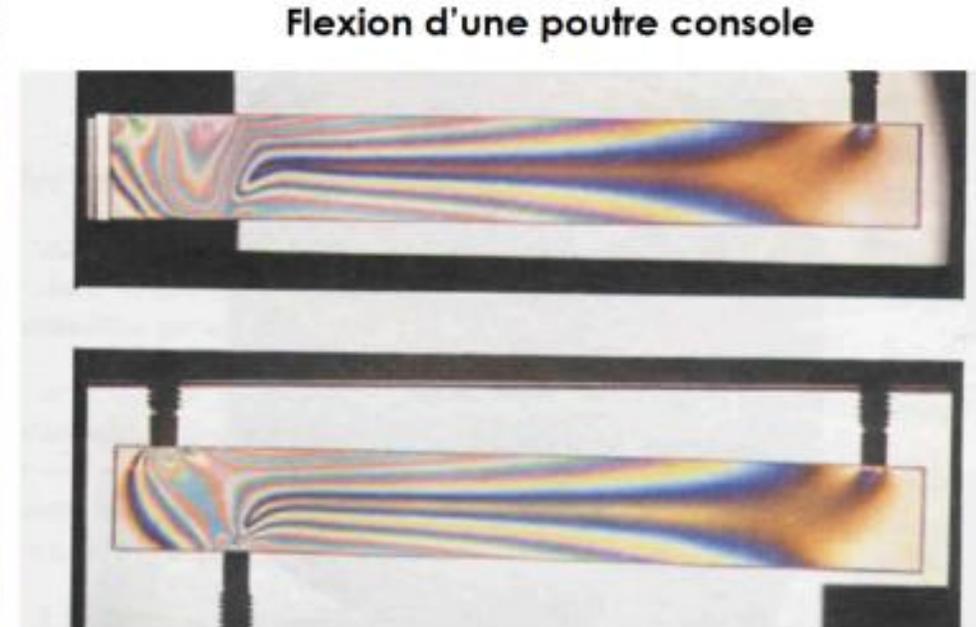
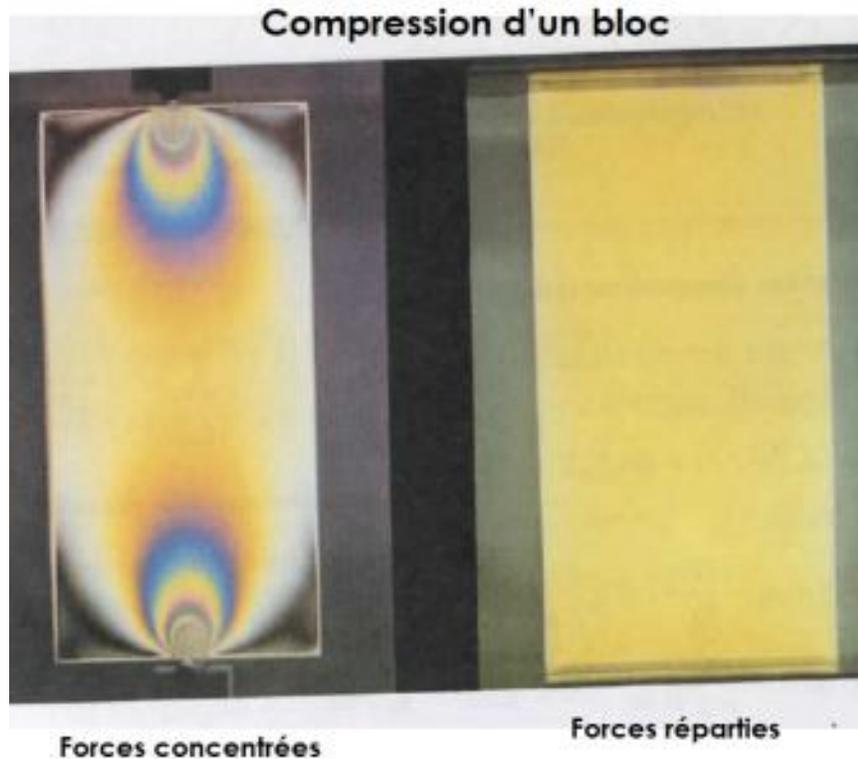


Elastique, linéaire

Hypothèses fondamentales de la RdM :

+ Principe de Saint-Venant :

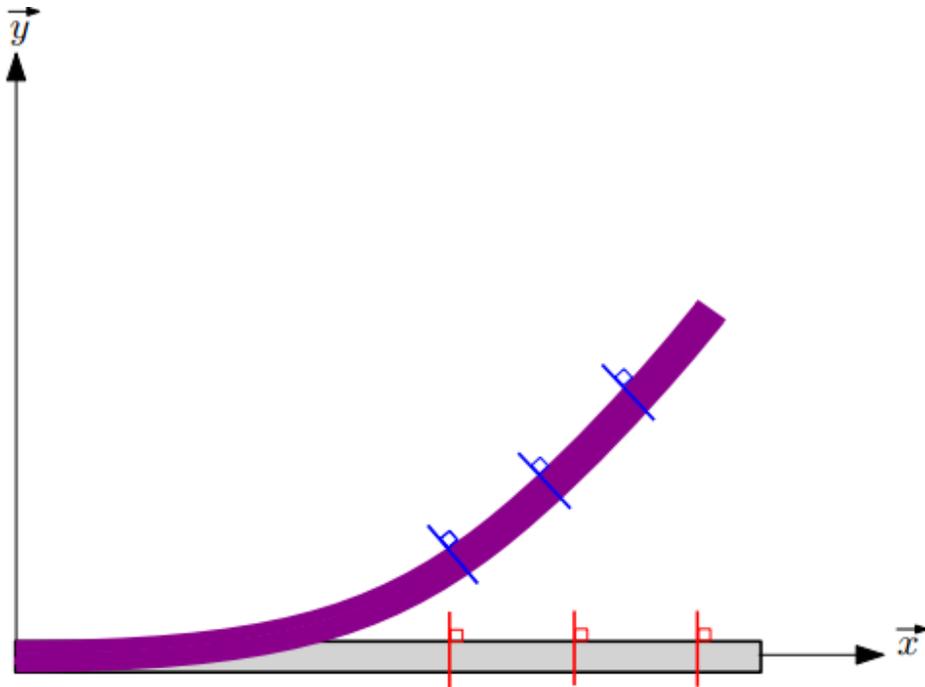
Le comportement en un point quelconque d'une poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'application des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons



Charge appliquée identique - conditions d'appui différentes

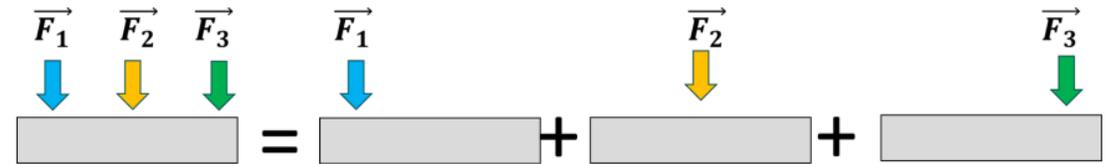
+ Principe de Navier-Bernoulli :

Les sections planes et droites (perpendiculaires à la fibre moyenne) restent planes et droites après déformation (perpendiculaires à la fibre moyenne déformée)



+ Principe de superposition :

Quelque soit l'ordre d'application des efforts extérieurs sur la poutre, l'état final est le même. Autrement dit, la déformation et la contrainte en un point de la poutre dues à plusieurs actions mécaniques n'est que la somme des déformations et des contraintes (respectivement) dues à chaque action mécanique prise isolément



+ Hypothèse de petites perturbations (HPP) :

Les sollicitations engendrent des petites perturbations de la structure étudiée : les déformations, les déplacements et les rotations de la poutre restent faibles

Rappels sur la statique des solides :

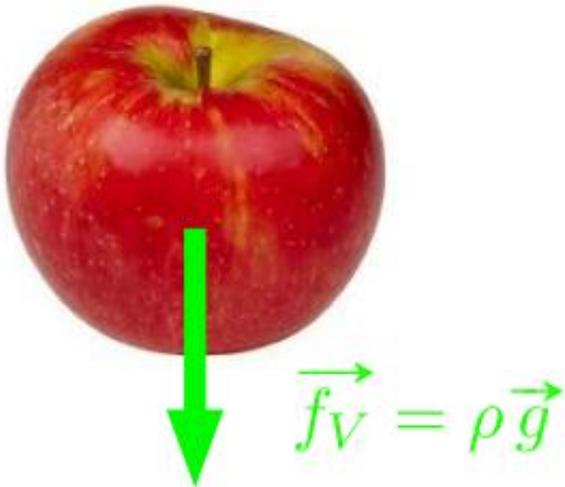
Toutes les structures sont supposées immobiles et en équilibre sous l'effet de diverses actions mécaniques (toutes causes est susceptible de déplacer ou déformer un solide)

Modélisation des actions mécaniques :

Plusieurs types d'efforts :

+ Densités volumiques de forces
 \vec{f}_V ($[N/m^3]$)

Exemple : Force de pesanteur



+ Densités surfaciques de forces
 \vec{f}_S ($[N/m^2]$)



Force réparties appliquées sur une partie importante de la surface d'un solide



+ Force ponctuelle ou concentrée
 \vec{F}_i ($[N]$) en P_i



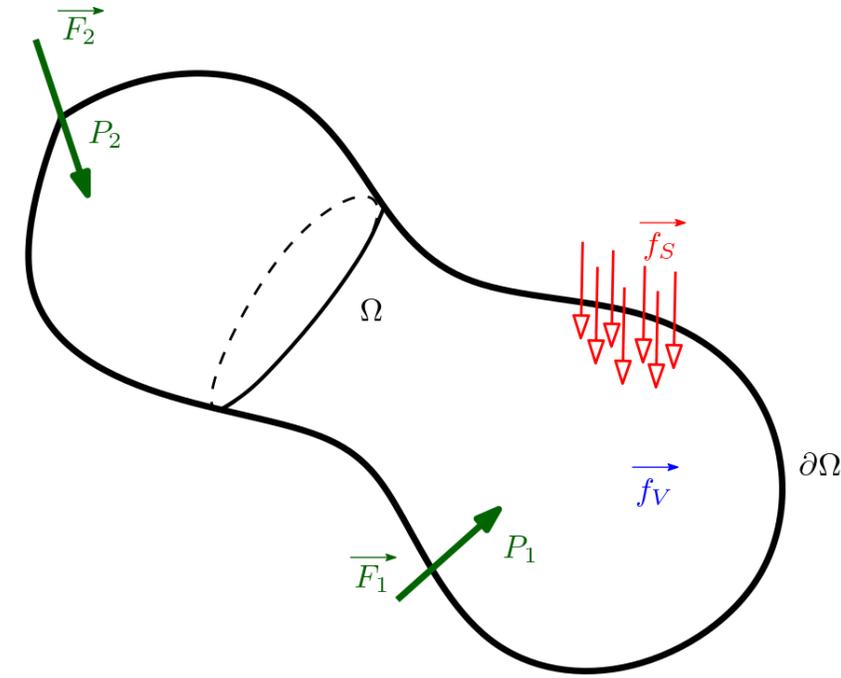
Surface de contact très petite

Notion de force et de moment :

On considère un solide Ω délimité par une frontière $\partial\Omega$

Les résultantes de ces forces s'obtiennent par intégration volumique ou surfacique :

Efforts	Résultante
Densité volumique	$\vec{R}(\vec{f}_V) = \int_{\Omega} \vec{f}_V \, dV$
Densité surfacique	$\vec{R}(\vec{f}_S) = \int_{\partial\Omega} \vec{f}_S \, dS$
Force ponctuelle	$\vec{R}(\vec{F}_i) = \vec{F}_i$



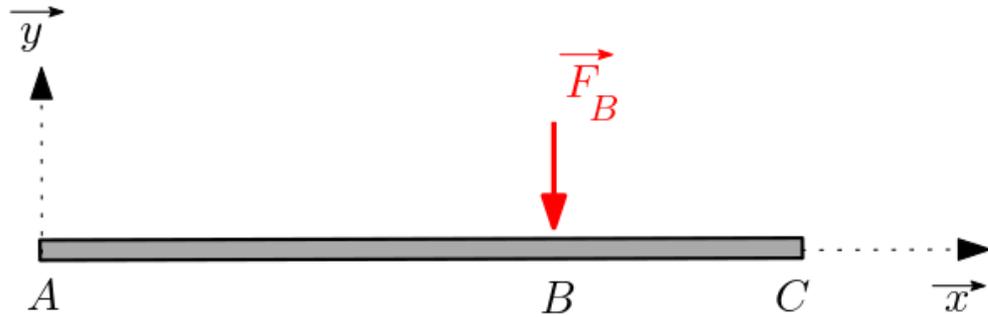
Le calcul du moment résultant de ces forces se fait par rapport à un point A :

Efforts	Moment
Densité volumique	$\vec{M}_A(\vec{f}_V) = \int_{\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_V \, dV$
Densité surfacique	$\vec{M}_A(\vec{f}_S) = \int_{\partial\Omega} \vec{AP} \wedge \vec{f}_S \, dS$
Force ponctuelle	$\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i$

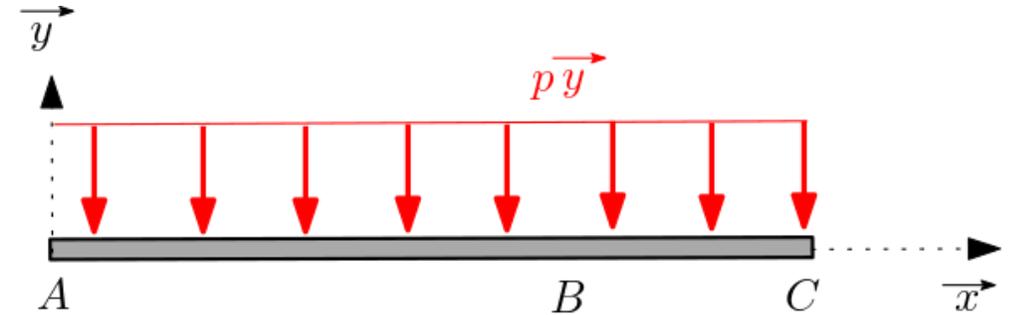
Notion de force et de moment :

De la même façon pour les poutres :

+ **Charges concentrées** : Les charges extérieures sont localisées en un point de la poutre. Elles sont modélisées par un torseur des actions mécaniques sur une section droite au point d'application.



+ **Densités linéiques de forces** : Les charges extérieures sont réparties sur une partie ou sur l'ensemble de la poutre. Elles sont modélisées par une fonction de répartition le long de la zone concernée.



Le torseur des actions mécaniques extérieures en un point est donnée par :

$$\left\{ \mathcal{T}_B \right\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ L_B \vec{x} + M_B \vec{y} + N_B \vec{z} \end{array} \right\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{array} \right\}_{B,R}$$

Résultante Moment en B

Éléments de réduction au point B du torseur des actions mécaniques

Pour déplacer le torseur des actions mécaniques du point B au point A , on a :

- La résultante \vec{R}_B des actions mécaniques extérieures reste identique dans n'importe quel point de l'espace
- Par contre, pour le moment \vec{M}_B , il va falloir le déplacer avec la formule de transport (relation de Varignon) :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B$$

$$\left\{ \mathcal{T}_B \right\}_{A,R} = \left\{ \vec{R}_B \quad \vec{M}_A \right\}_{A,R} = \left\{ \vec{R}_B \quad \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \right\}_{A,R}$$

Principe Fondamental de la Statique (PFS⁺):

Soit un solide Ω soumis à un ensemble des actions mécaniques (forces et moments). Ce solide est en équilibre si ces actions mécaniques **extérieures** qui lui sont appliquées vérifient :

$$\sum \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} = \vec{0}$$

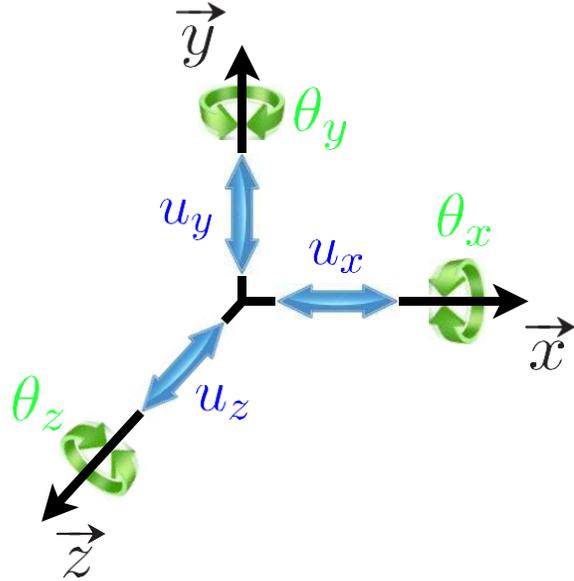
Théorème de la résultante

$$\sum \vec{M}_{A \text{ext} \rightarrow \Omega} = \vec{0}$$

Théorème du moment en A

Liaisons :

+Solide 3D

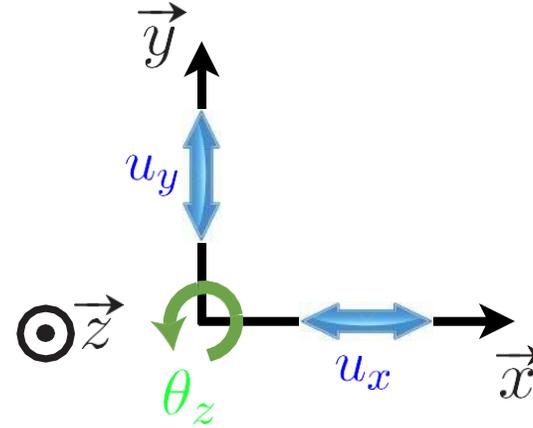


6 degrés de liberté (ddl)

- Trois translations u_x , u_y et u_z
- Trois rotations θ_x , θ_y et θ_z

+ + + + +

+Solide 2D



3 degrés de liberté (ddl)

- Deux translations u_x et u_y
- Une rotation θ_z

Liaisons :

+ Articulation ou appui simple fixe



Articulation ou appui simple fixe

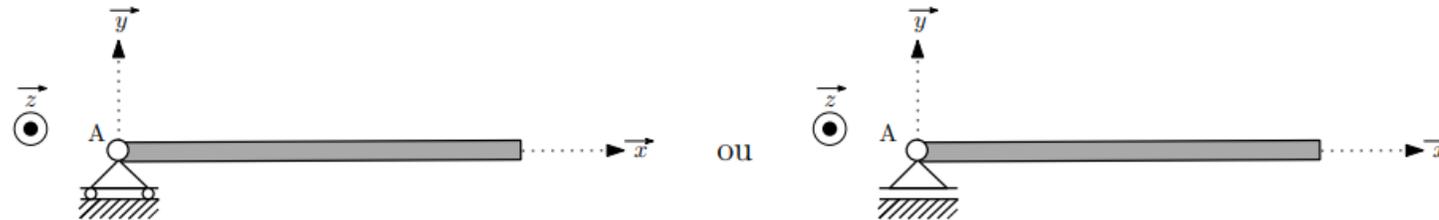
Grandeur cinématique $\parallel u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z \neq 0 \implies 1 \text{ddl}$

Grandeur statique $\parallel R_x \neq 0 \quad R_y \neq 0 \quad M_z = 0 \implies 2 \text{ réaction}$

Torseur de liaison $\parallel \left\{ \mathcal{T}_{\text{liaison}} \right\}_A = \left\{ R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \quad \vec{0} \right\}_A$

Liaisons :

+ Appui mobile ou appui simple glissant



Appui mobile ou appui simple glissant

Grandeur cinématique $\parallel u_x \neq 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z \neq 0 \implies 2ddl$

Grandeur statique $\parallel R_x = 0 \quad R_y \neq 0 \quad M_z = 0 \implies 1 \text{ réaction}$

Torseur de liaison $\parallel \left\{ \mathcal{T}_{\text{liaison}} \right\}_A = \left\{ R_y \vec{y} \quad \vec{0} \right\}_A$

Liaisons :

+ Encastrement



Grandeur cinématique $\parallel u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad \theta_z = 0 \implies 0 \text{ddl}$

Grandeur statique $\parallel R_x \neq 0 \quad R_y \neq 0 \quad M_z \neq 0 \implies 3 \text{ réaction}$

Torseur de liaison $\parallel \left\{ \mathcal{T}_{\text{liaison}} \right\}_A = \left\{ R_x \vec{x} + R_y \vec{y} \quad M_z \vec{z} \right\}_A$

Systemes isostatique et hyperstatique :

Soit une structure ayant au total r **inconnues de liaison** (composantes de réactions à déterminer).

Pour une structure 3D, on dispose de **6** équations pour écrire l'équilibre global de la structure (**3** pour le théorème de la résultante, **3** pour le théorème du moment d'après le PFS)

On note h le degré d'hyperstatisme, alors pour le cas 3D : **$h_{3D} = r - 6$**

Pour une structure plane, on dispose de **3** équations pour écrire l'équilibre global de la structure (**2** pour le théorème de la résultante, **1** pour le théorème du moment), alors pour le cas plan :

$h_{2D} = r - 3$

Systemes isostatique et hyperstatique :

+ Si $h = 0$ alors la structure est dite **isostatique**.

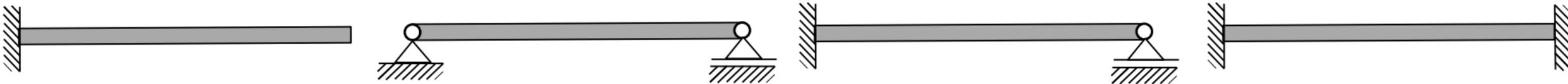
Les liaisons sont au nombre strictement suffisant pour assurer l'équilibre. L'écriture du PFS suffit à déterminer les réactions de liaisons.

+ Si $h > 0$ alors la structure est dite **hyperstatique d'ordre h** .

L'écriture du PFS ne suffit pas à déterminer les réactions de liaison. On parle d'appuis surabondants. Il faudra h équations supplémentaires pour résoudre le système.

+ Si $h < 0$ alors la structure est un mécanisme (pas stable).

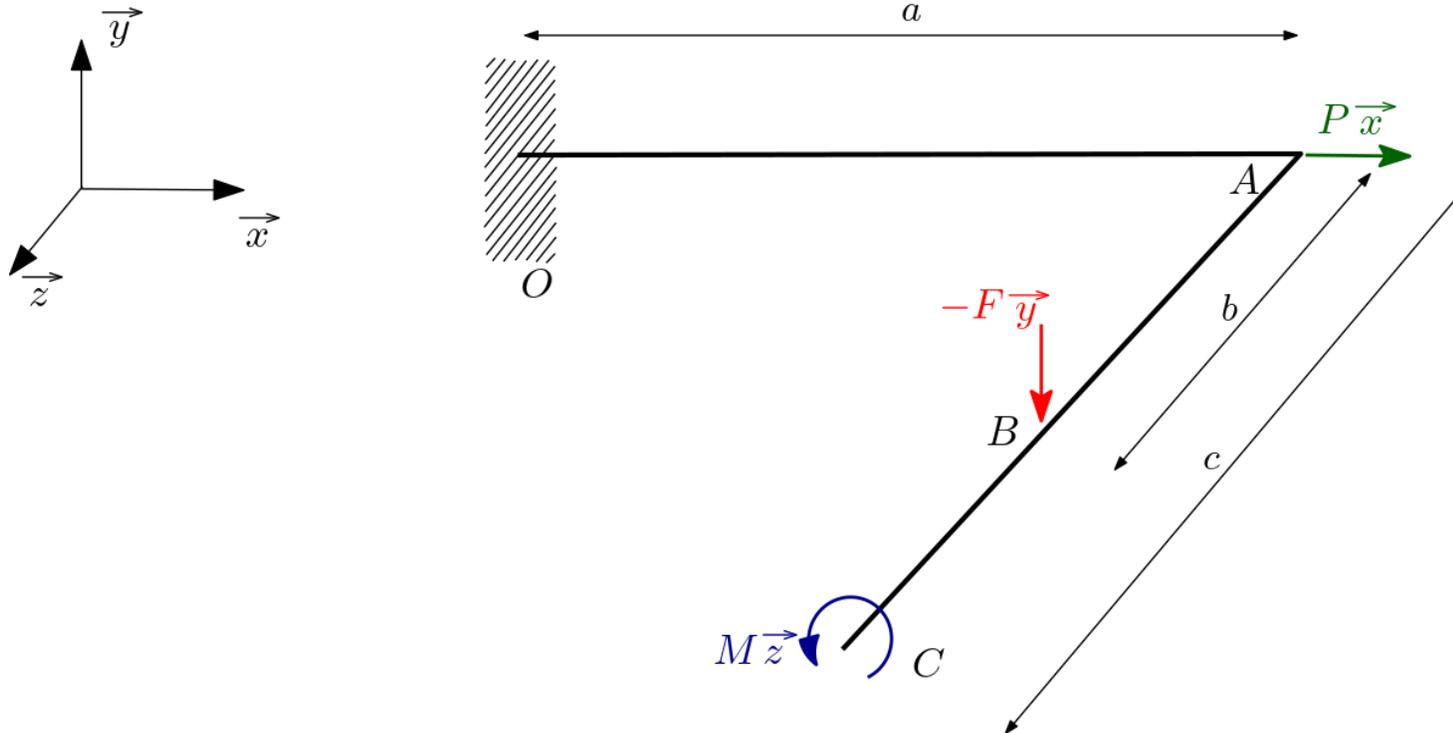
Exemples de calcul du degré d'hyperstatisme :



Exercice :

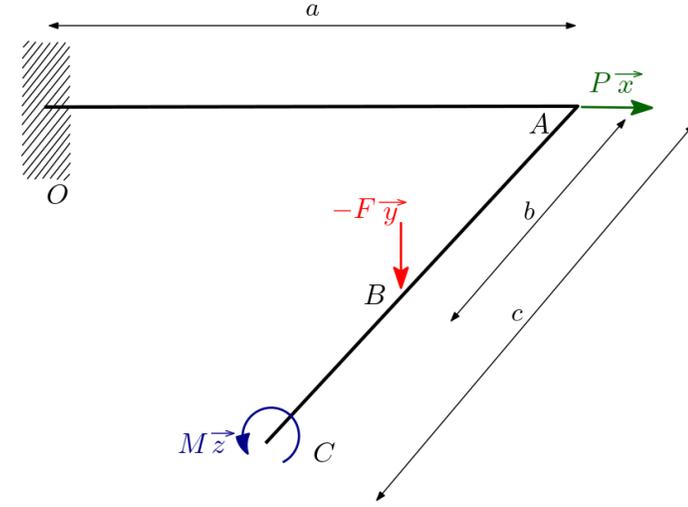
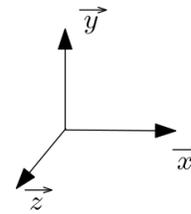
On considère une poutre [OAB] encastree en O ($x = 0, z = 0$) soumise à :

- Une force ponctuelle $P\vec{x}$ en A ($x = a, z = 0$)
- Une force ponctuelle $-F\vec{y}$ en B ($x = a, z = b$)
- Un couple $M\vec{z}$ en C ($x = a, z = c$)



Déterminer le torseur de liaison en O dû à l'encastrement

Correction :



Poutre 3D encastée en O alors :

$$\begin{cases} u_x = 0, u_y = 0, \text{ et } u_z = 0 \\ \theta_x = 0, \theta_y = 0, \text{ et } \theta_z = 0 \end{cases}$$



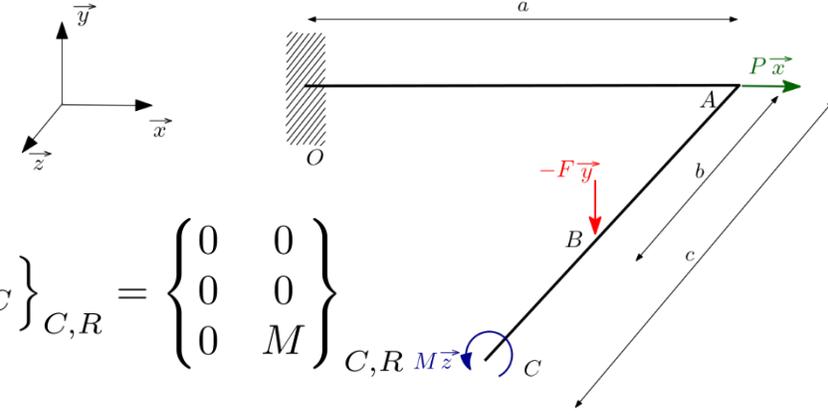
6 inconnues de liaison

$$\begin{cases} \vec{R}_O = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} + Z_O \vec{z} \\ \vec{M}_O = L_O \vec{x} + M_O \vec{y} + N_O \vec{z} \end{cases}$$

On a également 6 équations : 3 pour le théorème de la résultante et 3 pour le théorème du moment, donc $h_{3D} = r - 6 = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Problème isostatique

Correction :

Etape 1 : On réalise le BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures)



$$\left\{ \mathcal{T}_O \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{pmatrix}_{O,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_A \right\}_{A,R} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_B \right\}_{B,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_C \right\}_{C,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}_{C,R}$$

Etape 2 : On transporte les torseurs au point où il y a le plus d'inconnues, ici au point O

$$\left\{ \mathcal{T}_O \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{pmatrix}_{O,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_A \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{O,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_B \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} 0 & bF \\ -F & 0 \\ 0 & -aF \end{pmatrix}_{O,R} \quad \left\{ \mathcal{T}_C \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}_{O,R}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge \vec{R}_A = \vec{0} + a\vec{x} \wedge P\vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0} + (a\vec{x} + b\vec{z}) \wedge -F\vec{y} = -aF\vec{z} + bF\vec{x}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C + \vec{OC} \wedge \vec{R}_C = M\vec{z} + (a\vec{x} + c\vec{z}) \wedge \vec{0} = M\vec{z}$$

Etape 3 : On applique le PFS

$$\sum \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} X_O + P = 0 \\ Y_O - F = 0 \\ Z_O = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_O = -P \\ Y_O = F \\ Z_O = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{O \text{ ext} \rightarrow \Omega} = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} L_O + bF = 0 \\ M_O = 0 \\ N_O - aF + M = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_O = -bF \\ M_O = 0 \\ N_O = aF - M \end{cases}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_O \right\}_{O,R} = \begin{pmatrix} -P & -bF \\ F & 0 \\ 0 & aF - M \end{pmatrix}_{O,R}$$



Attention aux unités :
 X_O, Y_O et Z_O sont en N
 L_O, M_O et N_O sont en Nm