

Dimensionnement des structures (DDS)

R2.MMP.02 - BUT GMP

Djibrilla NOMA

Enseignant-chercheur (MCF)

djibrilla.noma@univ-lyon1.fr

Institut Universitaire de Technologie (IUT) Lyon 1
Département GMP - Laboratoire de DDS



Pourquoi le dimensionnement des structures ?



(a) Peugeot 408
© Peugeot



(b) TGV M
© SNCF - Alstom Avelia Horizon



(c) Eolienne
© Radio France - Stéphane Pocher



(d) Cuve
© Labbe Process Equipment

Qu'est que le dimensionnement des structures ?

Dimensionnement des structures

Il s'agit d'une discipline scientifique qui permet de déterminer ou de vérifier les propriétés d'un produit afin de prévenir sa rupture lors de son utilisation.

Dimensionner une structure signifie :

- Calculer les dimensions adéquates.
- Choisir les matériaux les plus adaptés.

pour que la structure étudiée supporte les actions mécaniques extérieures appliquées.

Cette discipline est en lien étroit avec les autres modules : mécanique, science des matériaux, conception,...

Il est intéressant de noter que, contrairement à la mécanique qui considère des solides indéformables, en DDS, on s'intéresse à des solides déformables.



- Déterminer les actions mécaniques intérieures d'une structure.
- Identifier la nature de la sollicitation (traction/compression, cisaillement, etc.).
- Dimensionner un problème avec la théorie des poutres.
- Identifier le point critique (de vulnérabilité) d'une structure en vue de son dimensionnement.
- Vérifier et valider les résultats avec une étude numérique.

Répartition horaire :

- 4 séances (8h) de cours magistraux (CM)
- 9 séances (18h) de travaux dirigés (TD)
- 1 séance (4h) de travaux pratiques (TP)

Évaluations :

- 2 devoirs surveillés (DS) de 1h30 (2h pour les 1/3 temps) sur les travaux dirigés
- 1 note de travaux pratiques

Références bibliographiques



M. Rossat, Résistance des matériaux et dimensionnement des structures : BUT, BTS, CPGE, licences, masters, écoles d'ingénieurs, Ellipses, 2021.



Y. Xiong, Exercices résolus de résistance des matériaux. Toute la RDM en 300 sujets, Eyrolles, 2016.



C. Chèze, Résistance des matériaux - Dimensionnement des structures, Ellipses, 2012.



P. Agati, F. Lerouge, M. Rosseto, Résistance des matériaux - 2ème édition, Dunod, 2008.

- ➊ Introduction et bases du dimensionnement des structures
- ➋ Tenseur de cohésion et sollicitations simples
- ➌ Contraintes mécaniques
- ➍ Traction/compression - Effort normal
 - Traction-compression
 - Problème hyperstatique
 - Treillis
- ➎ Cisaillement - Effort tranchant

Chapitre 1

Introduction et bases du dimensionnement des structures

PLAN

Chapitre 1

Objectif :

Présenter la théorie des poutres et ses grandes hypothèses

Contenu :

- Classification des corps
- Théorie des poutres
- Hypothèses en DDS
- Principe de superposition

Classification des corps

Les corps peuvent être classés en trois familles :

- Corps uni-dimensionnel (1-D) : les **poutres** (dont la longueur transversale L est beaucoup plus grande que les autres dimensions du corps).
- Corps bi-dimensionnel (2-D) : les **plaques** (l'épaisseur e de la plaque est au moins 10 fois inférieure aux autres dimensions).
- Corps tri-dimensionnel (3-D) : les **solides**.

Note importante :

Dans ce module, nous nous concentrerons sur les corps de type **poutre**.

Théorie des poutres



Poutre



Plaque



Solide

Exercices d'application

Indiquer la nature des solides ci-dessous :

Hélicoptère



Clé à pipe débouchée



Barres de treillis



Table



Airbus 380



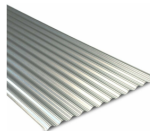
Cuve



Grue de levage

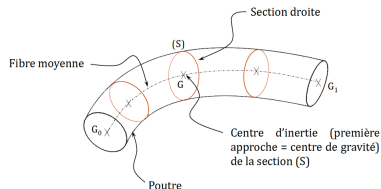


Tôle métallique



Définition

Une poutre est une pièce caractérisée par une ligne, appelée fibre moyenne ou neutre, présentant une courbure faible devant sa longueur, ainsi qu'une section perpendiculaire à cette fibre, appelée section droite, dont la variation est lente le long de la poutre.



Une poutre est caractérisée par :

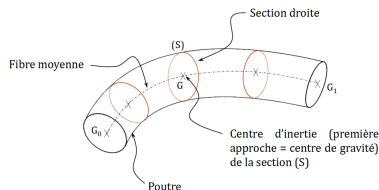
- Une longueur L de la fibre moyenne très supérieure aux dimensions transversales (**rapport** > 5).
- Un rayon de courbure de la fibre moyenne grand devant les dimensions transversales (**rapport** > 5)).
- Un profil sans discontinuité.

Conventions de repérage :

- L'axe (O, \vec{x}) suit la fibre moyenne de la poutre.
- Le plan (\vec{y}, \vec{z}) correspond à la section droite.

Trois types de poutres :

- une **poutre gauche** : poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche (3-D : trois dimensions dans l'espace).
- une **poutre plane** : poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane (2-D : contenue dans un plan).
- une **poutre droite** : poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite (1-D).



La section (S) de la poutre peut être soit :

- **constante** : la section droite (S) ne varie pas le long de la fibre moyenne.
- **variable** : la section droite (S) n'est pas identique le long de la fibre moyenne.

$$S = \int_S dS \quad (1)$$

Exemples de types de poutres

Poutre droite (1D) :

Poutre en acier de type IPN utilisée pour soutenir un plancher dans une structure de bâtiment industriel.

Fibre moyenne = segment de droite.

Poutre plane (2D) :

Arche en béton armé d'un pont en arc (forme parabolique ou semi-circulaire).

Fibre moyenne = courbe contenue dans un plan.

Poutre gauche (3D) :

Rail hélicoïdal d'un toboggan ou spirale architecturale.

Fibre moyenne = courbe spatiale non plane.

Où sont les poutres ?



- Où repère-t-on des **poutres droites** ?
- Des **poutres planes** ?
- Des **poutres gauches** ?



Pont en arc – poutre plane



Hélice – poutre gauche

Hypothèses géométriques dans ce module

- Solide « allongé » : une dimension largement dominante (type poutre) (rapport > 5).
- Fibre moyenne droite (1-D) : **poutre droite**.
- Section droite constante ou à variation lente.
- Section perpendiculaire à la fibre moyenne.
- Poutre avec un plan de symétrie longitudinal.

Matériaux

- Un matériau est dit « **homogène** » s'il possède, en tout point, la même composition et la même structure. Ainsi, le matériau possède les mêmes propriétés mécaniques et thermiques en son sein.
- Un matériau est dit « **isotrope** » si ses propriétés mécaniques et thermiques sont identiques dans toutes les directions.
- Un matériau est qualifié d'« **élastique linéaire** » s'il retrouve sa forme initiale après avoir subi un cycle de charge et décharge. Cette propriété implique que le matériau se déforme peu, voire pas du tout.

À savoir

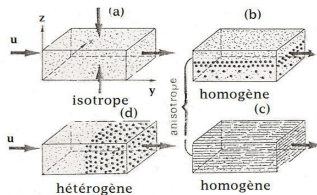
Les caractéristiques intrinsèques du matériau, telles que l'homogénéité et l'isotropie, sont évaluées au niveau de sa microstructure, c'est-à-dire à des échelles très petites.

(cf. cours de SDM)



Elastique

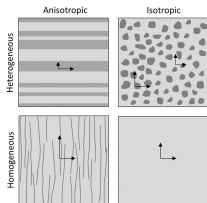
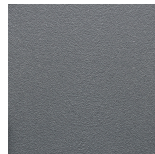
Hypothèses utilisées en DDS



Isotropie et homogénéité

(© R. Atmani)

Matériau homogène :
Exemple : acier inoxydable



Isotropie et homogénéité

(© H.B. Lynn)

Matériau isotrope :
Exemple : verre trempé



Quelques hypothèses fondamentales

- **Hypothèse de Navier-Bernoulli** : Les sections droites et planes demeurent droites et planes après déformation.
- **Principe de Saint-Venant** : Les résultats obtenus lors du dimensionnement des structures ne sont valables qu'à une distance suffisante de la zone d'application des efforts concentrés, appelée zone de singularité.
- **Hypothèses des petites déformations (HPP)** : Le solide subit de petits déplacements (de l'ordre de 1/100 de la longueur de la fibre moyenne) ainsi que de petites déformations.

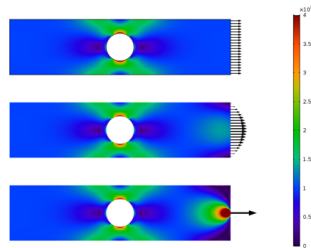


Illustration du principe de Saint-Venant
© COMSOL

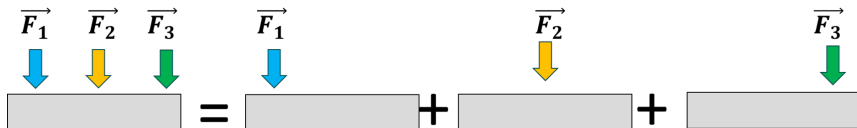
Cliquez [ICI](#) pour un résumé des hypothèses de la DDS (© TSI Alès).

Définition

Petites déformations : déplacements et changements de forme suffisamment faibles (typiquement $< 1\%$ de la dimension caractéristique) pour que la relation entre contraintes et déformations soit linéaire.

Élastiques : le matériau retrouve sa forme initiale après suppression des charges, sans déformation permanente.

Sous ces conditions, les hypothèses linéaires s'appliquent, ce qui permet notamment l'usage du **principe de superposition**. Ce principe stipule qu'un système de forces extérieures est équivalent à la somme des forces individuelles agissant séparément.



Chapitre 2

Torseur de cohésion et sollicitations simples

PLAN

Chapitre 2

Objectifs :

- Appliquer la théorie des poutres.
- Déterminer les efforts mécaniques internes.

Pré-requis (cf. cours de mécanique S1) :

- Modélisation des actions mécaniques extérieures
- Principe fondamental de la statique (PFS)

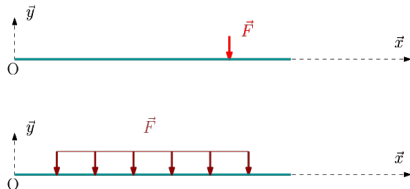
Contenu :

- Efforts internes
- Définition du torseur de cohésion/section
- Sollicitations simples

Rappel : actions mécaniques extérieures

Les **actions mécaniques extérieures** sont des conditions aux limites appliquées au système. Elles provoquent un mouvement ou une déformation de la structure étudiée. Elles peuvent être de deux types :

- **Charges concentrées/localisées** : Les charges extérieures sont concentrées en un point le long de la poutre. Elles sont représentées par un torseur des actions mécaniques appliquées à une section droite au niveau du point d'application.
- **Charges réparties** : Les charges extérieures sont réparties sur une portion ou l'ensemble de la poutre. Elles sont représentées par une fonction de répartition le long de la zone concernée.



Rappel : actions mécaniques extérieures

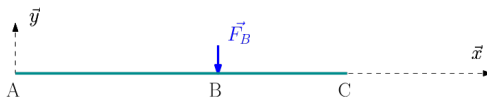
Le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées en un point B (charge localisée), dans l'espace, s'écrit :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_B \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (2)$$

dans le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Dans le cas d'une modélisation 2D dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , ce torseur se réduit à :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (3)$$



Rappel : actions mécaniques extérieures

Torseur des actions mécaniques

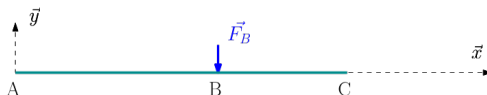
$$\{\tau_B\}_{B,R} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_B \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (4)$$

dans le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Nous souhaitons exprimer ce torseur en un autre point A :

- La résultante $\vec{\mathcal{R}}$ reste inchangée quel que soit le point.
- En revanche, le moment doit être transporté du point B vers A selon la formule de Varignon :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{AB} \wedge \vec{\mathcal{R}} \quad (5)$$

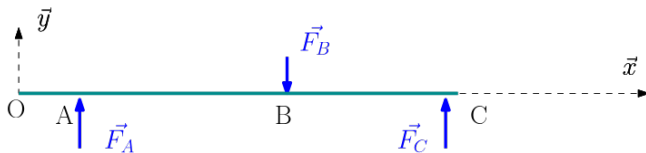


Rappel : Principe fondamental de la statique (PFS)

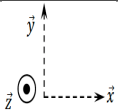
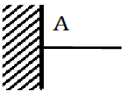
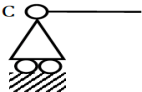
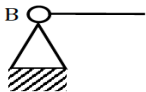



Principe fondamental de la statique (PFS)

Un système est en équilibre statique lorsqu'il est immobile (pas en mouvement). Dans ce cas, le principe fondamental de la statique (PFS) stipule que la somme des forces extérieures et la somme des moments extérieurs au point O sont nulles.

$$\mathcal{T}_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \quad (6)$$



Rappel : Quelques liaisons mécaniques courantes

	Encastrement	Ponctuelle d'axe \vec{y}	Pivot d'axe \vec{z}
			
Exemple			
Torseur des AM	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$
Torseur cinématique	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} U_x & R_x \\ 0 & R_y \\ U_z & R_z \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}_R$

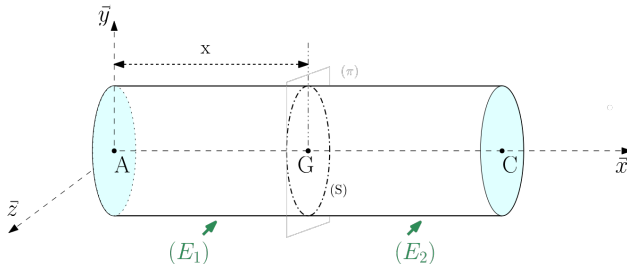
- Le torseur des actions mécaniques (AM) représente les efforts (forces et moments) transmissibles par la liaison au point de contact avec le système.
- Le torseur cinématique décrit les degrés de liberté de la liaison : les composantes de translation et de rotation autorisées.

Torseur de cohésion – torseur de section

- **Actions mécaniques intérieures** : Les efforts intérieurs d'une poutre sont des forces agissant à l'intérieur du matériau, garantissant l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'effet des charges extérieures appliquées.
- Pour déterminer les efforts internes d'une poutre, il est nécessaire de réaliser une coupure fictive sur la poutre (E) à l'aide d'un plan (π) perpendiculaire à la ligne (fibre) moyenne de la section (S). La poutre est ainsi divisée en deux parties, (E_1) et (E_2), appelées « **tronçons** », au niveau du point G , centre de surface de (S).

À retenir

- Le **torseur de cohésion** représente l'action mécanique exercée par une portion de la poutre sur une autre, de part et d'autre d'une coupure fictive.

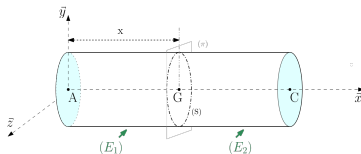


Torseur de cohésion – Torseur de section

Définition du torseur de cohésion

Les actions mécaniques exercées par le tronçon (E_2) sur le tronçon (E_1) à travers la section droite fictive (π) d'un solide (S) correspondent aux efforts internes à la poutre. Elles sont modélisées par le **torseur de cohésion** (ou **torseur de section**) $\{\tau_{\text{coh}}\}_{G, \mathcal{R}}$, dont les éléments sont rapportés au point G , centre de la surface de (π) . Ce torseur est aussi noté $\{\tau_{\text{int}}\}_{G, \mathcal{R}}$.

- Repère fixe : $\mathcal{R}_O(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, utilisé pour l'étude de l'équilibre statique de (S) .
- Repère lié à la poutre : $\mathcal{R}_A(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec (A, \vec{x}) représentant l'axe tangent à la ligne moyenne (ou fibre moyenne).
- Dans le cas traité ici, on a $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_O$.

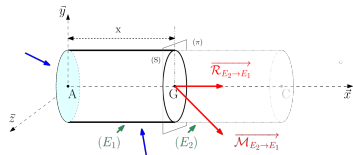


Torseur de cohésion – Torseur de section

Torseur de section sur le tronçon de gauche (E_1), appelé « amont »

- **Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :**
 - Actions mécaniques **extérieures** agissant sur (E_1) : $\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}}$
 - Actions mécaniques **intérieures** exercées par le tronçon (E_2) sur (E_1) : $\{\tau_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}}$
- **Principe fondamental de la statique (PFS) :**

$$\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}} + \{\tau_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}} = \vec{0}$$



Par convention :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G, \mathcal{R}} = \{\tau_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}}$$

Ainsi, le torseur de cohésion représentant les actions internes de (E_2) sur (E_1) est donné par :

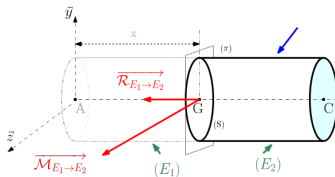
$$\{\tau_{\text{coh}}\}_{G, \mathcal{R}} = \{\tau_{\text{int}}\}_{G, \mathcal{R}} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G, \mathcal{R}} = -\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{ext} \rightarrow E_1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{ext} \rightarrow E_1}} \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}} \quad (7)$$

Torseur de cohésion – Torseur de section

Torseur de section sur le tronçon de droite (E_2), appelé « aval »

- **Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :**
 - Actions mécaniques **extérieures** agissant sur (E_2) : $\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}}$
 - Actions mécaniques **intérieures** exercées par le tronçon (E_1) sur (E_2) : $\{\tau_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}}$
- **Principe fondamental de la statique (PFS) :**

$$\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}} + \{\tau_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}} = \vec{0}$$



Par convention :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G, \mathcal{R}} = -\{\tau_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}}$$

Ainsi, le torseur de cohésion représentant les actions internes du tronçon (E_1) sur (E_2) est donné par :

$$\{\tau_{\text{coh}}\}_{G, \mathcal{R}} = \{\tau_{\text{int}}\}_{G, \mathcal{R}} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G, \mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{ext} \rightarrow E_2}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{ext} \rightarrow E_2}} \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}} \quad (8)$$

Convention du torseur de cohésion

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique exercée par une portion (E_2) de la poutre sur une autre portion (E_1), de part et d'autre d'une section fictive (π). Il représente les **actions internes** de la poutre. Ce torseur est exprimé au point G , centre de la section, dans le repère local \mathcal{R} lié à la poutre.

$$\{\tau_{\text{coh}}\}_{G,\mathcal{R}} = \{\tau_{\text{int}}\}_{G,\mathcal{R}} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G,\mathcal{R}} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G,\mathcal{R}} \quad (9)$$

Lors de l'analyse des actions internes dans une poutre, il est nécessaire d'effectuer une coupe fictive chaque fois qu'une des situations suivantes se présente :

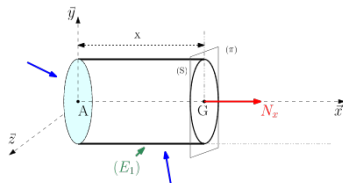
- discontinuité des efforts due à la présence d'actions mécaniques concentrées (efforts ponctuels, moments, liaisons mécaniques comme pivots, rotules, appuis, etc.) ;
- discontinuité géométrique, notamment en cas de changement de direction de la ligne moyenne.

Attention : l'amont n'est pas forcément à gauche, ni l'aval à droite. Cette convention dépend uniquement du repère local (\vec{x}) de la poutre. Toujours bien poser le sens d'analyse avant d'appliquer les conventions de signe !

Effort normal N

L'effort interne agissant perpendiculairement à une section droite de la poutre entraîne soit un allongement (traction), soit un raccourcissement (compression) de celle-ci.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (10)$$



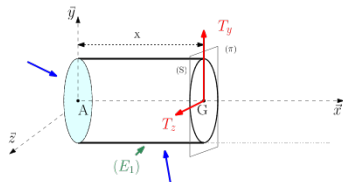
Pour :

- $N_x > 0$: Traction
- $N_x < 0$: Compression

Efforts tranchants T_y et T_z

Les efforts internes agissant dans le plan d'une section droite de la poutre provoquent un cisaillement relatif entre deux sections.

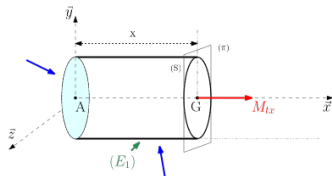
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (11)$$



Moment de torsion M_{tx}

Un moment de torsion correspond à la somme des moments de tous les efforts internes dans la section, calculés par rapport à l'axe normal de la fibre moyenne \vec{x} .

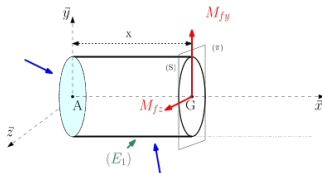
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (12)$$



Moments fléchissants M_{fy} et M_{fz}

Un moment fléchissant est une composante du moment résultant des actions mécaniques qui engendrent la flexion longitudinale de la poutre, contribuant ainsi à sa réduction.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (13)$$



Torseur de cohésion (ou torseur de section)

Le **torseur de cohésion** est donc donné par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R} \quad (14)$$

Avec :

- N_x : Effort normal selon l'axe (G, \vec{x})
- T_y : Effort tranchant selon l'axe (G, \vec{y})
- T_z : Effort tranchant selon l'axe (G, \vec{z})
- M_{tx} : Moment de torsion selon l'axe (G, \vec{x})
- M_{fy} : Moment fléchissant selon l'axe (G, \vec{y})
- M_{fz} : Moment fléchissant selon l'axe (G, \vec{z})

Exercice 1 — Détermination de l'effort normal N

Objectif : déterminer le torseur de cohésion associé à une sollicitation en traction.

- Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon gauche (partie amont).
- Déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon droit (partie aval).

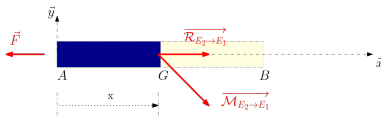


Données géométriques :

- $\vec{AB} = L \vec{x}$: longueur de la poutre.
- $\vec{AG} = x \vec{x}$: G est le point de section fictive sur la fibre moyenne.

Torseur de cohésion – Exercice 1 : tronçon amont (E_1)

1) Équilibre des efforts (résultante)



Application du PFS à E_1 :

$$\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\tau_{int}\} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} + \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0}$$

Résolution :

$$\begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N = F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Interprétation : L'effort de traction F est totalement équilibré par la cohésion interne. Aucun effort tranchant.

2) Équilibre des moments au point G

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow E_1}(G) + \vec{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0}$$

Transport du moment de A à G :

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow E_1}(G) = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}(A)}_{=0} + \underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1}}_{\begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}} = \vec{0}$$

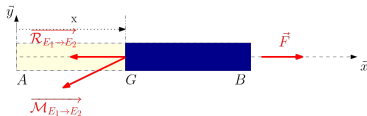
Résolution :

$$\vec{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_{tx} = 0 \\ M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Aucun moment interne ne se développe, la poutre est uniquement sollicitée en traction axiale.

Torseur de cohésion – Exercice 1 : tronçon aval (E_2)

1) Équilibre des efforts (résultante)



Application du PFS à E_2 :

$$\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\} + \{\tau_{E_1 \rightarrow E_2}\} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\} - \{\tau_{\text{int}}\} = \vec{0}$$

Résolution :

$$\vec{\mathcal{R}}_{\text{ext} \rightarrow E_2} - \vec{\mathcal{R}}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N = F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Interprétation : L'effort de traction est équilibré de façon identique par la cohésion interne. Aucune composante tranchante.

2) Équilibre des moments au point G

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow E_2}(G) - \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow E_2}(G)$$

Calcul du moment transporté au point G :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow E_2}(G) = \vec{GB} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = \begin{pmatrix} L - x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Conclusion :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_{tx} = 0 \\ M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = 0 \end{cases}$$

Aucun moment interne ne se développe sur le tronçon aval.

Exercice 1 — Synthèse

Pour le système soumis à une force axiale F , le torseur de cohésion au point G dans le repère R est donné par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- L'effort normal N est positif, ce qui signifie que la poutre est sollicitée en **traction**.
- Le torseur obtenu est identique que l'on considère la partie amont ou la partie aval.

Torseur de cohésion – Exercice 2 : effort normal N

Objectifs :

- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de gauche (partie amont).
- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de droite (partie aval).

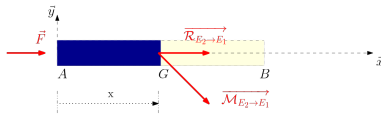


Données géométriques :

- $\vec{AB} = L\vec{x}$: longueur totale de la poutre.
- $\vec{AG} = x\vec{x}$: point G au niveau de la section de coupe fictive.

Exercice 2 – Équilibre du tronçon amont (E_1)

1) Résultante des actions mécaniques



Application du PFS à E_1 :

$$\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\tau_{int}\} = \vec{0}$$

Résolution :

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} + \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} N = -F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : L'échantillon gauche est en compression ($N < 0$).

Exercice 2 – Moment au point G (tronçon amont)

Équilibre des moments en G :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow E_1}(A) + \vec{GA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext} \rightarrow E_1}(A) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0}$$

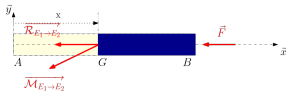
Calcul :

$$\vec{GA} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Mt_x = 0 \\ Mf_y = 0 \\ Mf_z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Aucun moment interne ne se développe sur E_1 .

Exercice 2 – Équilibre du tronçon aval (E_2)



PFS appliqué à E_2 :

$$\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\} - \{\tau_{\text{int}}\} = \vec{0}$$

Résultante des forces :

$$\begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} N = -F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Moment en G :

$$\vec{GB} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GB} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0}$$

Conclusion : Même torseur de cohésion qu'en amont.

Synthèse – Torseur de cohésion (Exercice 2)

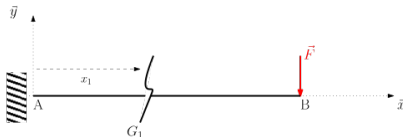
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- L'effort normal $N = -F$ indique que la poutre est en **compression**.
- Aucun effort tranchant ni moment interne : effort normal pur.
- Le résultat est identique sur les deux tronçons (amont et aval).

Torseur de cohésion – Exercice 3 : effort tranchant T_y

Objectifs :

- Déterminer le torseur de cohésion sur les deux parties de la poutre.



Données :

- $\vec{AB} = L\vec{x}$: longueur totale de la poutre.
- $\vec{AG} = x\vec{x}$: coupe fictive au point G .
- Action extérieure : force verticale \vec{F} appliquée en B .

Exercice 3 – Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME)



Principe fondamental de la statique (PFS global) :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

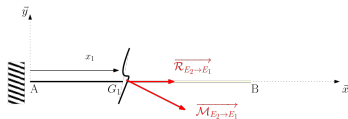
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - F = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = F}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - F \cdot L = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = FL}$$

Conclusion : Les efforts d'appui sont connus. On peut maintenant analyser les efforts intérieurs via une coupe fictive.

Exercice 3 – Équilibre du tronçon amont (E_1)

1) Résultante des forces – PFS :



$$\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\tau_{int}\} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{R}}_{ext} + \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y = -F \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : La poutre est soumise à un cisaillement vertical $T_y = -F$.

Exercice 3 – Moment au point G (tronçon amont)

Équilibre des moments :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ FL \end{pmatrix}, \quad \vec{GA} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

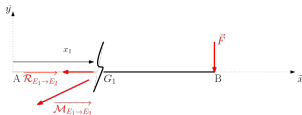
$$\vec{GA} \wedge \vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xF \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ FL - xF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(L - x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F(L - x) \end{pmatrix}$$

Conclusion : Moment fléchissant $M_f = \boxed{-F(L - x)}$

Exercice 3 – Équilibre du tronçon aval (E_2)

2) Résultante des forces – PFS :



$$\{\tau_{ext \rightarrow E_2}\} - \{\tau_{int}\} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{R}}_{ext} - \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y = -F \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Même effort tranchant que pour E_1 .

Exercice 3 – Moment au point G (tronçon aval)

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(B) + \vec{GB} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}}(B) - \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \vec{0}$$

$$\vec{GB} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}}(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GB} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)F \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} Mt_x \\ Mf_y \\ Mf_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)F \end{pmatrix}$$

Conclusion : Moment fléchissant $M_f = -(L-x)F$

Torseur de cohésion au point G :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & M_f \end{Bmatrix}_{G,R} \quad \text{avec} \quad M_f = \begin{cases} -F(L-x) & (\text{amont}) \\ -(L-x)F & (\text{aval}) \end{cases}$$

- Effort tranchant constant $T_y = -F$
- Moment fléchissant variable selon x
- Même torseur quelle que soit la coupe

Diagrammes des sollicitations

Pour chaque sollicitation — effort normal N , efforts tranchants T_y, T_z , moment de torsion M_{tx} , moments fléchissants M_{fy}, M_{fz} — il est possible de tracer un diagramme montrant l'évolution de sa valeur le long de la poutre (en fonction de la position x).

Ces valeurs sont tracées avec leur signe algébrique, selon les conventions choisies, ce qui permet de visualiser les zones soumises à compression, traction, cisaillement ou flexion.

Les diagrammes de sollicitations traduisent donc graphiquement les composantes du tenseur de cohésion déterminé par les équilibres statiques, et mettent en évidence les zones de sollicitation maximale.

Diagrammes des sollicitations - exercices

Exercice 1 - diagramme de sollicitation



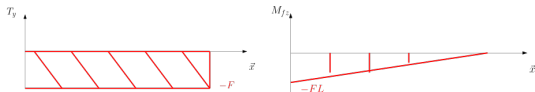
Effort normal N
(Traction : $N > 0$)

Exercice 2- diagramme de sollicitation



Effort normal N
(Compression : $N < 0$)

Exercice 3- diagrammes de sollicitation



Effort tranchant T_y
Moment fléchissant M_{fz}

Synthèse — Torseur de cohésion (ou torseur de section)

Définition

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique interne exercée par une portion (E_2) sur (E_1), séparées par une section fictive (π).

Exprimé au point G , centre de la section, dans le repère local $\mathcal{R} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,\mathcal{R}} = \{\tau_{int}\} = -\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}$$

Coupure fictive : nécessaire en cas de

discontinuité d'efforts (forces/moments concentrés, appuis)

discontinuité géométrique (changement de direction)

Section amont/aval : selon axe \vec{x} du repère local.

Attention : l'amont n'est pas forcément à gauche !

Forme générale

$$\{\tau_{coh}\}_{G,\mathcal{R}} = \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fz} \\ T_z & M_{fy} \end{Bmatrix}$$

N_x : effort normal
(traction/compression)

T_y, T_z : efforts tranchants
(cisaillement)

M_{tx} : moment de torsion

M_{fz}, M_{fy} : moments fléchissants

Chapitre 3

Contraintes mécaniques

PLAN

Chapitre 3

Objectifs :

- Déterminer les contraintes mécaniques dans une structure.

Pré-requis :

- Notion de vecteur force
- Loi d'action-réaction (Newton III)
- Bases de la statique des solides

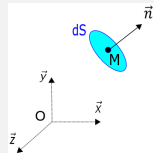
Contenu :

- Vecteur contrainte
- Tenseur des contraintes mécaniques
- Contraintes principales

Vecteur contrainte

On considère un point $M(x, y, z)$ arbitraire appartenant au solide étudié, dans un repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On examine une surface infinitésimale dS qui contient le point M. Cette surface est caractérisée par sa direction normale \vec{n} (c'est-à-dire la direction perpendiculaire), qui détermine son orientation, de la manière suivante :

$$\vec{n} = \beta_1 \vec{x} + \beta_2 \vec{y} + \beta_3 \vec{z}$$



La normale extérieure \vec{n} divise l'espace en deux demi-espaces, de part et d'autre de la facette. Selon le principe d'équilibre des actions mécaniques (troisième loi de Newton ou loi d'action-réaction), les efforts mécaniques exercés sur la facette inférieure \vec{df} sont égaux en valeur absolue et opposés en signe à ceux exercés sur la facette supérieure. On peut ainsi définir un **vecteur de contrainte** $\vec{T}(M, \vec{n})$ au point M, associé à la normale \vec{n} tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{\vec{df}}{dS}$$

Décomposition

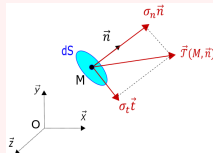
Le vecteur contrainte se décompose en :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t}$$

où :

- σ_n : composante normale (le long de \vec{n})
- σ_t : composante tangentielle (dans le plan de dS)

Ces composantes dépendent du point M et de l'orientation de la surface. Leur unité est le Pascal (Pa), soit N/m^2 .



Théorème de Cauchy

Théorème de Cauchy

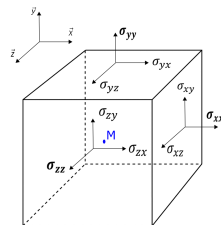
Pour généraliser les contraintes en tout point, on introduit le tenseur des contraintes ou tenseur de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$, qui est indépendant de l'orientation de la facette considérée. Ce tenseur est défini en un point M quelconque par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{M,R}$$

Le **théorème de Cauchy** énonce que :

En tout point M et en chaque instant t, la dépendance du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ à la normale \vec{n} est linéaire.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \text{ avec } \vec{n} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}_R$$



Tenseur des contraintes sur un cube élémentaire au voisinage d'un point M (M appartenant au solide étudié).

Expression dans une base quelconque

Dans une base quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{M, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Chaque composante σ_{ij} indique une contrainte agissant dans la direction i sur une surface de normale orientée selon j .

Dans le cas général, le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{M, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Remarque : le tenseur est symétrique ce qui implique que les termes non-diagonaux sont égaux $\Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Définition

Il est possible de trouver une base dans laquelle le tenseur des contraintes devient diagonal. Les composantes dans cette base sont appelées **contraintes principales** :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{M, (\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} \quad (15)$$

- $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$: directions principales.
- Par convention : $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.
- Dans cette base, les contraintes tangentielles sont nulles.

Définition générale

Les contraintes mécaniques représentent les efforts internes exercés sur une surface élémentaire dS dans un solide.

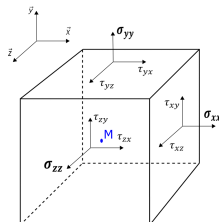
Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, elles se décomposent en :

- Contraintes normales : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
- Contraintes tangentielles : $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (et leurs symétriques)

Tenseur associé :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Unités : souvent exprimées en MPa.



Tenseur des contraintes sur un cube élémentaire au voisinage d'un point M (M appartenant au solide étudié)

Hypothèse poutre

Pour une poutre allongée selon \vec{x} , les seules contraintes significatives sont :

$$\vec{\mathcal{T}}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Avec :

- σ_{xx} : contrainte normale dans la direction longitudinale
- τ_{xy} et τ_{xz} : contraintes tangentielles dans la section droite
- Si $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, alors \vec{x} est une direction principale

Relation entre contraintes mécaniques et torseur de cohésion

Les contraintes mécaniques sont étroitement liées au torseur de cohésion (ou aux actions mécaniques internes). Cette relation est exprimée par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}} = \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}).dS \\ \vec{\mathcal{M}} = \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}).dS \end{array} \right\}_{G,R} \quad \text{avec } \vec{GM} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}_R$$

En théorie des poutres, on a :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{ll} \iint_{(S)} \sigma_{xx}.dS & \iint_{(S)} (y.\tau_{xz} - z.\tau_{xy}).dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xy}.dS & \iint_{(S)} z \sigma_{xx}.dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xz}.dS & - \iint_{(S)} y \sigma_{xx}.dS \end{array} \right\}_{G,R} \quad (18)$$

Contraintes mécaniques

Dans ce module, nous nous concentrerons uniquement sur les contraintes associées à un effort normal (contraintes normales σ_{xx}) et au cisaillement/effort tranchant (contraintes tangentielles τ_{xy} subis par une poutre.

Contraintes normales lié à un effort normal

Un solide soumis à un effort normal N_x subit une contrainte normale σ_{xx} donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{S} \quad (19)$$

avec S la surface de la section droite.

Contraintes tangentielles lié à un effort tranchant

Un solide soumis à un effort tranchant T_y (respectivement T_z) subit une contrainte tangentielle τ_{xy} (respectivement τ_{xz}) donnée par :

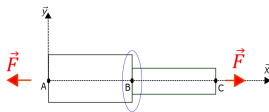
$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad \left(\text{respectivement } \tau_{xz} = \frac{T_z}{S} \right) \quad (20)$$

avec S la surface de la section droite.

Concentration de contrainte

- Elle apparaît lorsqu'on a une discontinuité de la pièce avec une modification géométrique (changement de section ou trou par exemple) ou près d'une charge concentrée (principe de Saint-Venant).
- Elle a pour conséquence d'entraîner localement une augmentation des contraintes. Il est important d'en tenir compte en DDS car c'est souvent la zone qui risque de céder en premier sous l'effet des charges extérieures.
- Pour en tenir compte, on multiplie les contraintes par un **coefficient de concentration** Kt propre à chaque type de sollicitation.

Concentration de contrainte au niveau de la zone en bleu.



La contrainte normale en traction au point B est donnée par :

$$\sigma_{xx} = Kt_{traction} \cdot \frac{N}{S}$$

Chapitre 4

Traction/compression - Effort normal

PLAN

Chapitre 4

Objectifs :

- Dimensionner un problème de traction/compression.
- Résoudre un problème de treillis (assemblage de barres).

Pré-requis :

- Principe fondamental de la statique (PFS)

Contenu :

- Caractéristiques de sollicitation en traction/compression
- Définition d'un treillis
- Méthode de Ritter (méthode des sections)

Définition

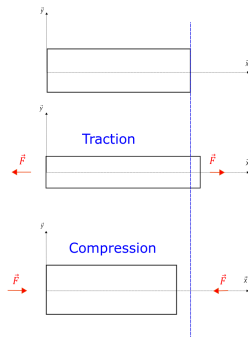
La traction (ou la compression) est une sollicitation mécanique provoquant l'allongement ou le raccourcissement d'un solide le long de sa direction longitudinale (généralement selon l'axe \vec{x}). Elle résulte de deux forces opposées, de même direction et de même intensité, appliquées aux extrémités du solide. Le tenseur des actions mécaniques au point G, dans le repère R, s'écrit :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Contrainte mécanique

En traction/compression, un corps (E) soumis à un effort normal N_x ne subit qu'une contrainte normale σ_{xx} donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{S}$$

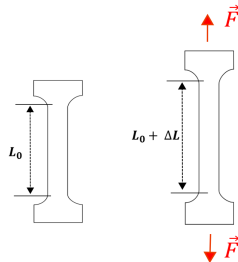
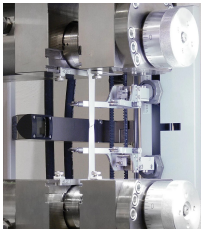


Essai de traction

Essai de traction

L'essai de traction consiste à soumettre une éprouvette normalisée à un effort de traction croissant. Il permet d'analyser le comportement mécanique du matériau à travers :

- le domaine élastique : raideur (module de Young), limite d'élasticité,
- le domaine plastique : allongement, déformation permanente,
- la rupture : contrainte maximale, allongement à rupture.

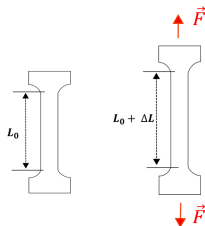


Déformation - essai de traction

Pour un corps de section circulaire :

Avant chargement	Après chargement
L_0 : longueur initial	$L = L_0 + \Delta L$: longueur après chargement
d_0 : diamètre initial	$d = d_0 - \Delta d$: diamètre après chargement

avec ΔL et Δd respectivement les variations de longueur et de diamètre.



Déformation

Une déformation mécanique est une modification géométrique d'un corps sous l'effet d'une contrainte mécanique. On peut définir deux déformations :

- Déformation longitudinale :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (21)$$

- Déformation transversale :

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (22)$$

Les déformations sont des grandeurs adimensionnelles (sans unité).

Relation entre déformation et déplacement

La déformation longitudinale moyenne est définie par :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

où ΔL est l'allongement de la poutre de longueur initiale L_0 .

Localement, si $u(x)$ est le déplacement longitudinal d'un point situé à l'abscisse x , alors la déformation locale est donnée par :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

En cas de déformation homogène, on a : $\varepsilon(x) = \varepsilon_L$.

Courbe de traction

Domaine élastique et plastique

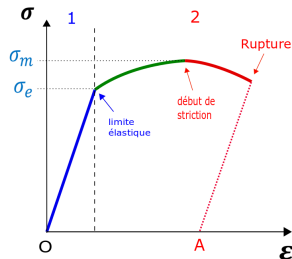
La courbe $\sigma = f(\varepsilon_L)$ présente deux grands domaines :

- **Domaine élastique** ($\sigma < Re = \sigma_E$) : les déformations sont réversibles (retour à la forme initiale après déchargement).
- **Domaine plastique** ($\sigma > Re = \sigma_E$) : les déformations deviennent irréversibles.

Résistance maximale, striction et rupture

Dans la zone plastique :

- La contrainte augmente jusqu'à une valeur maximale : la **résistance maximale** σ_m ou R_m .
- Ensuite, débute la **striction** : une réduction localisée de la section.
- Le matériau finit par rompre. L'allongement total au moment de la rupture est noté A (allongement à la rupture).



avec :

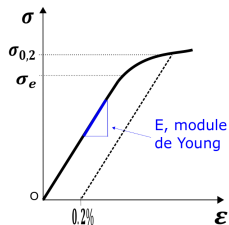
σ_E : limite élastique

σ_m : contrainte maximale

A : allongement à la rupture

Déformation — Domaine élastique

Lors d'un essai de traction, le matériau se comporte d'abord de manière **élastique** : les déformations sont réversibles et disparaissent à l'arrêt de la sollicitation.



Caractéristiques du domaine élastique

- Le domaine élastique est limité par la **contrainte** σ_E , au-delà de laquelle la déformation devient irréversible.
- Dans la pratique, une limite conventionnelle à 0.2 % de déformation plastique est souvent utilisée : $\sigma_{0,2}$.
- La relation entre contrainte et déformation est linéaire, appelée loi de comportement. Elle est donnée par la **loi de Hooke** :

$$\sigma = E \cdot \epsilon_L$$

où E est le **module de Young**, caractéristique de la rigidité du matériau (en GPa).

Coefficient de Poisson

- Lors d'un essai de traction, la poutre s'allonge dans la direction longitudinale, mais sa section transversale se réduit. Ce phénomène est lié à la nature du matériau et à son comportement mécanique.
- Cette contraction transversale est reliée à l'allongement longitudinal par le **coefficient de Poisson** ν , défini par :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

où :

ε_L : déformation longitudinale,

ε_T : déformation transversale (négative en traction).

- La valeur de ν varie typiquement entre 0 et 0.5 :
 - Aciers : $\nu \approx 0.28$ à 0.30
 - Aluminium : $\nu \approx 0.34$
 - Matériau incompressible (idéal) : $\nu = 0.5$

Critère de dimensionnement

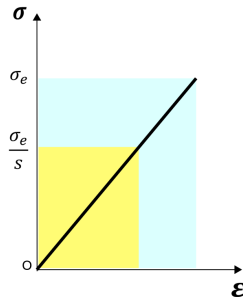
Lors du dimensionnement d'une pièce soumise à un effort de traction ou de compression, il faut vérifier que la contrainte σ supportée par la pièce est inférieure à la limite d'élasticité σ_E (ou résistance élastique R_e) :

$$\sigma \leq \sigma_E = R_e \quad (23)$$

En pratique, un coefficient de sécurité $s \geq 1$ est utilisé pour prendre en compte les incertitudes liées au matériau, à la géométrie, aux conditions d'appui, et aux charges appliquées. Le critère de dimensionnement devient alors :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_E}{s} = R_{pe} \quad (24)$$

avec $R_{pe} = \frac{\sigma_E}{s}$, la résistance pratique élastique.



Concentration de contrainte

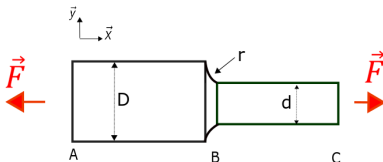
La **contrainte nominale** $\sigma_{nom} = \frac{N}{S}$ correspond à la contrainte moyenne sur la section. En présence de discontinuités (trous, changements de section, etc.), il y a un risque accru d'amorçage de fissure. La contrainte locale est amplifiée par un **coefficient de concentration** K_t :

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$$

Pour assurer la sécurité, le critère de dimensionnement devient :

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_E}{s} = R_{pe}$$

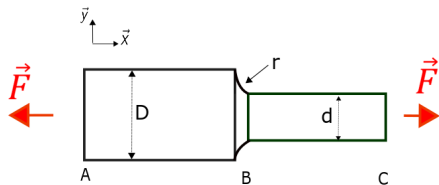
où σ_E est la limite élastique et s le coefficient de sécurité.



Traction/compression : exercice

Dans cet exercice, on se propose de déterminer les actions mécaniques intérieures et de vérifier le dimensionnement. Nous allons procéder en trois étapes :

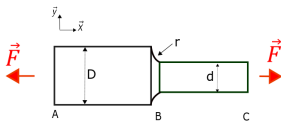
1. Contrainte dans le tronçon]AB[
2. Contrainte dans le tronçon]BC[
3. Contrainte au point B (concentration de contrainte)



Les données du problème sont :

- Grand diamètre : $D=8$ mm
- Petit diamètre : $d=6$ mm
- Rayon du congé : $r=0.6$ mm
- Force : $F= 500$ N
- Limite élastique : $Re=30$ MPa
- Coefficient de sécurité : $s=1.2$

Traction/compression : exercice



1. Contrainte dans le tronçon]AB[:

- On commence par déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon]AB[:

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = -\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = -\{\tau_A\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- On détermine la contrainte normale sur le tronçon]AB[:

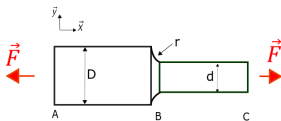
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{AB}} = \frac{F}{\pi \frac{D^2}{4}} = 9.946 \text{ MPa}$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$\sigma_{xx} = 9.946 \text{ MPa} < \frac{\sigma_E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

Ce tronçon est donc bien dimensionné.

Traction/compression : exercice



2. Contrainte dans le tronçon]BC[:

- On commence par déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon]BC[:

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R} = \{\tau_C\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- On détermine la contrainte normale sur le tronçon]BC[:

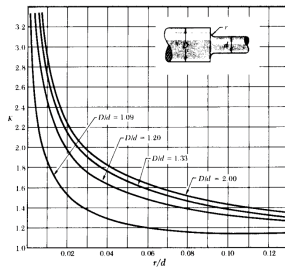
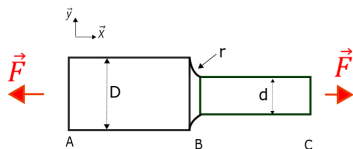
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{BC}} = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} = 17.686 \text{ MPa}$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$\sigma_{xx} = 17.686 \text{ MPa} < \frac{\sigma_E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

Ce tronçon est donc bien dimensionné.

Traction/compression : exercice



3. Contrainte au point B (concentration de contrainte) :

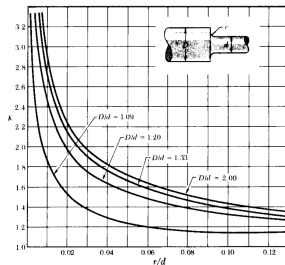
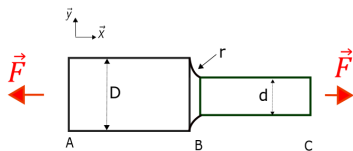
- On commence par la contrainte normale au point B. On considérera la section d car la contrainte y est maximale :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{BC}} = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} = 17.686 \text{ MPa}$$

- On détermine le coefficient de concentration K :

$$\frac{D}{d} = \frac{8}{6} = 1.33 \text{ et } \frac{r}{d} = \frac{0.6}{6} = 0.1 \Rightarrow K \sim 1.38$$

Traction/compression : exercice



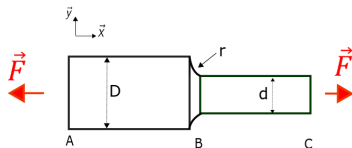
3. Contrainte au point B (concentration de contrainte) :

$$K \sim 1.38$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$K \cdot \sigma_{xx} = 1.38 \times 17.686 = 24.406 \text{ MPa} < \frac{\sigma E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

La structure est donc bien dimensionnée.



Remarques finales :

- La pièce est correctement dimensionnée vis-à-vis des critères de résistance.
- On observe que la contrainte augmente quand la section diminue ($\sigma_{BC} > \sigma_{AB}$).
- Le point B, au niveau du changement de section, est le point critique à cause de la concentration de contrainte. C'est là que la contrainte maximale apparaît.

Méthodologie

Face à un problème en traction/compression, la démarche à employer pour vérifier le dimensionnement est la suivante :

- Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).
- Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) pour déterminer les inconnues de liaison.
- Déterminer le torseur de cohésion. Attention : effectuer autant de coupes fictives que nécessaire (ex : changement de direction, liaisons, efforts ponctuels...).
- Identifier le point le plus sollicité (point critique) à l'aide des diagrammes de sollicitations.
- Vérifier le critère de dimensionnement :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_E}{s} = Rpe$$

(penser à intégrer un éventuel coefficient de concentration K_t)

Traction/compression : déterminer les dimensions

Méthodologie

Face à un problème en traction/compression, la démarche à employer pour déterminer les dimensions d'une structure est la suivante :

- Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).
- Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) pour déterminer les inconnues de liaison.
- Déterminer le torseur de cohésion. Attention : effectuer autant de coupes fictives que nécessaire (ex : changement de direction, liaisons, efforts ponctuels...).
- Identifier le point le plus sollicité (point critique).
- Utiliser le critère de dimensionnement pour exprimer une contrainte maximale admissible, puis calculer les dimensions nécessaires.

Exemple : pour une section circulaire de diamètre D , on obtient :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_E}{s} = Rpe \Rightarrow \frac{N}{S} \leq Rpe \Rightarrow \frac{N}{\pi \frac{D^2}{4}} \leq Rpe$$

D'où la condition minimale sur le diamètre :

$$D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot Rpe}}$$

Compression : le cas du flambement

Flambement

Une structure en compression a tendance à se raccourcir. Toutefois, au-delà d'une certaine valeur de charge, dite **charge critique**, la structure peut se déformer latéralement de manière instable : on parle de **flambement**.

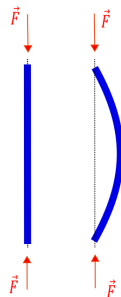
La charge critique de flambement est donnée par la formule d'Euler :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2}$$

avec :

- F_{cr} : charge critique de flambement (N)
- E : module de Young (Pa)
- I : moment d'inertie de la section (m⁴)
- L_k : longueur équivalente entre deux points d'inflexion (m)

Cette formule s'applique à des colonnes élancées avec des conditions d'appui bien définies.



Flambement d'un pont © Esprit Génie Civil

Cadre d'analyse

Le **Principe Fondamental de la Statique (PFS)** permet d'établir les conditions d'équilibre d'un système mécanique indéformable.

Il conduit aux équations suivantes :

- En **2D (plan)**, on dispose de **3 équations d'équilibre** :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

- En **3D (espace)**, on dispose de **6 équations d'équilibre** :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \\ \sum M_x &= 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0\end{aligned}$$

- Ces équations permettent de déterminer, au maximum :

3 inconnues de liaison indépendantes en 2D

6 inconnues de liaison indépendantes en 3D

Avant toute résolution, il est essentiel de :

établir le **bilan des inconnues de liaison**

comparer avec le nombre d'équations disponibles

Objectif : identifier si le système est **isostatique**, **hypostatique** ou **hyperstatique**.

Degré d'hyperstatisme

Le **degré d'hyperstatisme** permet de déterminer si un système mécanique peut être résolu uniquement à l'aide du **Principe Fondamental de la Statique (PFS)**.

On utilise la relation :

$$h = N_i - N_e$$

avec :

- N_i : nombre d'inconnues de liaison (réactions),
- N_e : nombre d'équations d'équilibre indépendantes (3 en 2D, 6 en 3D),
- h : degré d'hyperstatisme.

Trois cas peuvent se présenter :

- $h < 0$: Système **hypostatique** — système mobile, instable ou insuffisamment contraint.
- $h = 0$: Système **isostatique** — les équations d'équilibre suffisent à déterminer les inconnues.
- $h > 0$: Système **hyperstatique** — la résolution nécessite des équations supplémentaires (lois de comportement, compatibilité des déformations, etc.).

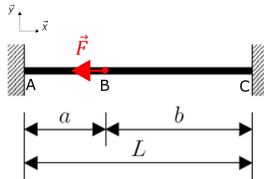
Intérêt des structures hyperstatiques

Une **structure hyperstatique** est une structure dont l'équilibre ne peut pas être déterminé uniquement par le **principe fondamental de la statique**. Elle présente plusieurs avantages mécaniques et structurels :

- **Meilleure répartition des efforts** : les charges sont réparties sur plusieurs éléments porteurs.
- **Répartition plus uniforme des contraintes** : diminution des concentrations de contraintes locales.
- **Rigidité accrue** : flèches et déformations plus faibles sous chargement.
- **Sécurité améliorée** : présence de redondances permettant une reprise des efforts en cas de défaillance locale.
- **Meilleur comportement aux actions dynamiques** (vent, séisme, charges mobiles).
- **Durabilité et confort d'usage** : réduction de la fatigue, des vibrations et des dégradations.

Hyperstatisme : exercice

On considère une **poutre bi-encastée** soumise à une force ponctuelle horizontale.



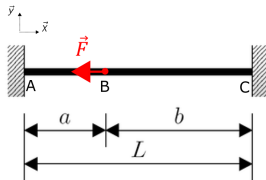
Poutre encastée en A et C. Une force horizontale $-F$ est appliquée en un point B avec $AB = a$, $BC = b$, donc $L = a + b$.

Travail demandé :

1. Réaliser une **schématisation** complète du système avec les liaisons et la force appliquée.
2. Appliquer le **principe fondamental de la statique (PFS)** pour écrire les équations d'équilibre.
3. Calculer :
 - le nombre d'inconnues de liaison N_i ,
 - le nombre d'équations disponibles N_e ,
 - le **degré d'hyperstatisme** $h = N_i - N_e$.
4. **Suggestion** : proposer un moyen de rendre le système isostatique (ex : transformation d'une liaison ou suppression d'une réaction).

Hyperstatisme : exercice – solution (1/2)

Considérons la poutre bi-encastée avec une force ponctuelle $-F$ appliquée en B.



Poutre encastée en A et C, longueur totale $L = a + b$.

1. Schématisation :

Encastrement en A : 3 réactions inconnues X_a , Y_a , M_a

Encastrement en C : 3 réactions inconnues X_c , Y_c , M_c

Force externe $-F$ appliquée au point B, direction $-x$

2. Application du principe fondamental de la statique (PFS) :

En 2D, on dispose de 3 équations d'équilibre :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

Hyperstatisme : exercice – solution (2/2)

3. Calcul du degré d'hyperstatisme :

$$N_i = 6 \quad (\text{réactions inconnues : } X_a, Y_a, M_a, X_c, Y_c, M_c)$$

$$N_e = 3 \quad (\text{équations d'équilibre en 2D})$$

$$h = N_i - N_e = 6 - 3 = 3$$

4. Conclusion :

Le système est **hyperstatique de degré 3**.

Les équations d'équilibre seules ne suffisent pas pour déterminer toutes les réactions.

Il faut ajouter des équations supplémentaires basées sur la compatibilité des déformations et les lois de comportement des matériaux.

5. Suggestion :

Pour rendre le système isostatique (résoluble uniquement par PFS), on peut remplacer l'un des encastrement par une liaison plus simple (ex. appui simple) réduisant ainsi le nombre d'inconnues.

Hyperstatisme : exercice – résolution (1/2)

Hypothèses :

- Encastrements en A et C : déplacements verticaux et rotations nuls,

$$\omega_A = 0, \quad \omega'_A = 0, \quad \omega_C = 0, \quad \omega'_C = 0$$

où $\omega(x)$ est la flèche (déplacement vertical), et $\omega(x)' = \frac{dw}{dx}$ la rotation (pente de la poutre).

- Réactions inconnues : $X_a, Y_a, M_a, X_c, Y_c, M_c$.

Étape 1 : Équilibre statique

Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) pour écrire les équations d'équilibre :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

Étape 2 : Relation moment–courbure

La flexion engendre une courbure $\omega''(x)$ liée au moment fléchissant :

$$\omega''(x) = \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

On exprime les déplacements verticaux et rotations en A et C en fonction des moments M_a, M_c .

Remarque : cette méthode repose sur des notions de flexion vues au semestre 3.

Hyperstatisme : exercice – résolution (2/2)

Étape 3 : Conditions de compatibilité

Les appuis étant encastres, les déplacements et rotations en A et C doivent être nuls :

$$\omega_A = 0, \quad \omega'_A = 0, \quad \omega_C = 0, \quad \omega'_C = 0$$

Ces conditions apportent 4 équations supplémentaires.

Étape 4 : Résolution

On résout le système de 6 équations à 6 inconnues ($X_a, Y_a, M_a, X_c, Y_c, M_c$).

Résultats typiques :

$$M_a = \frac{Fb^2a}{L^2}, \quad M_c = \frac{Fa^2b}{L^2}$$

$$Y_a = \frac{Fb}{L}, \quad Y_c = \frac{Fa}{L}$$

Les réactions horizontales X_a, X_c sont déterminées par l'équilibre horizontal.

Conclusion :

La combinaison des équations d'équilibre et des conditions de compatibilité permet de résoudre ce problème hyperstatique.

Définition

Un **treillis** (ou structure à barres) est une structure composée de barres rectilignes assemblées de manière triangulée, reposant sur les hypothèses suivantes :

- Les barres sont modélisées par leurs lignes médianes, situées dans un même plan, et se rejoignent en des points appelés **nœuds**.
- Chaque nœud est modélisé comme une **rotule idéale** (sans frottement), permettant uniquement des rotations.
- Les **efforts extérieurs** sont appliqués exclusivement aux nœuds (jamais directement sur les barres). *Cela permet d'éviter que les barres soient sollicitées en flexion.*
- Chaque barre est soumise à un **effort axial** (ou effort normal) : une force de traction ou de compression appliquée aux extrémités.
- Le **poids propre** des barres est considéré comme négligeable.



Pont en treillis © Eugenio Merzagora

Un treillis peut être **isostatique** ou **hyperstatique**.

Degré d'hyperstatisme

Le **degré d'hyperstatisme** d'un treillis plan peut être déterminé par la formule suivante :

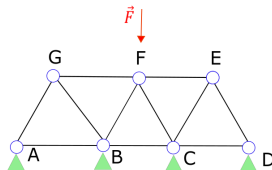
$$h = b + r - 2n$$

avec h représente le degré d'hyperstaticité, b le nombre de barres, r le nombre de réactions d'appui et n le nombre de nœuds.

Un treillis est :

- **isostatique** si $h = 0$,
- **hyperstatique** si $h > 0$,
- **hypostatique** si $h < 0$ (structure instable ou mal modélisée).

Exercice : Déterminer le degré d'hyperstatisme du treillis ci-dessous.



Structures en treillis

Les **treillis** sont des structures largement utilisées dans de nombreux domaines industriels, notamment dans la construction, le génie civil et l'aéronautique (ex. : ponts, charpentes, fuselages d'avion).

Leur principal intérêt réside dans leur capacité à former des **structures légères et rigides**, capables de résister efficacement aux efforts extérieurs, en particulier aux charges axiales (traction / compression).

Méthodes d'analyse des treillis :

- Méthode graphique de **Cremona**.
- Méthode des **nœuds**.
- Méthode des **sections** (ou méthode de Ritter).

Dans ce cours, nous privilégierons la **méthode des sections de Ritter**, qui permet de déterminer rapidement l'effort dans une ou plusieurs barres sans analyser l'ensemble de la structure.



Pont en treillis
© Eugenio Merzagora

Méthode de Ritter (méthode des sections)

Principe

La **méthode de Ritter**, aussi appelée **méthode des sections**, permet de déterminer les efforts internes (traction ou compression) dans les barres d'un treillis sans analyser tous les nœuds.

Elle repose sur les principes suivants :

- **1. Calcul préalable des efforts externes** : détermine d'abord les réactions d'appui en appliquant le **principe fondamental de la statique (PFS)** à l'ensemble du treillis.
- **2. Section fictive** : coupe le treillis en traversant **au maximum trois barres** (dont deux doivent converger en un nœud commun). Cette coupure permet d'isoler une partie de la structure.
- **3. Analyse de l'équilibre** : applique les équations d'équilibre à l'une des deux portions isolées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{array} \right.$$

- Cela permet de calculer les efforts normaux dans les barres sectionnées.

Méthode de Ritter – Exemple (1/2)

On considère le treillis ci-contre, soumis à une force $\vec{F} = F \vec{y}$ appliquée au point B. Les réactions d'appui sont :

$$\vec{R}_A = 0,75 F \vec{y}, \quad \vec{R}_E = 0,25 F \vec{y}$$

Les barres font longueur L , et l'angle incliné est $\alpha = 60^\circ$.

Objectif : déterminer les efforts internes dans les barres 4, 5 et 6.

Étape 1 – Isolement de la partie gauche :

On coupe le treillis selon une section traversant les barres 4, 5 et 6.

Étape 2 – Expression vectorielle des efforts internes :

$$\vec{N}_4 = N_4 \vec{x} \quad (\text{barre 4 horizontale})$$

$$\vec{N}_5 = N_5 (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}) \quad (\text{barre 5 inclinée})$$

$$\vec{N}_6 = N_6 \vec{x} \quad (\text{barre 6 horizontale})$$

Étape 3 – Équilibre vertical (projeté sur \vec{y}) :

$$\sum F_y = -F + N_5 \sin \alpha + R_A = 0 \Rightarrow N_5 = 0.29 F \text{ (traction)}$$

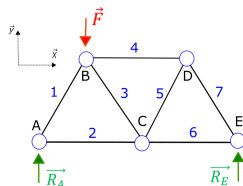


Figure 1 : Treillis initial

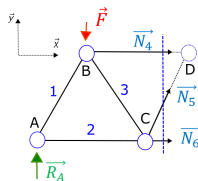


Figure 2 : Coupe du treillis

Méthode de Ritter – Exemple (2/2)

Équilibre des moments au point D (nœud de coupe) : On applique :

$$\sum \vec{M}_D = \vec{0}$$

En pratique (projection scalaire) :

$$M_D = R_A \cdot DA - F \cdot DB + N_6 \cdot h = 0 \Rightarrow N_6 = 0.14 F \quad (\text{Traction})$$

Équilibre horizontal (projeté sur \vec{x}) :

$$\sum F_x = -N_4 + N_5 \cos \alpha + N_6 = 0 \Rightarrow N_4 = -0.29 F \quad (\text{Compression})$$

Interprétation des signes :

- ✓ $N_5 > 0$: barre en **traction**
- ✓ $N_6 > 0$: barre en **traction**
- ✓ $N_4 < 0$: barre en **compression**

Conclusion : La méthode de Ritter permet de déterminer rapidement les efforts dans certaines barres en combinant le PFS et une bonne stratégie de coupe.

Formules et notions clés

Contrainte normale moyenne : $\sigma = \frac{N_x}{S}$

Déformation longitudinale : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Loi de Hooke (traction/compression) : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Critère de résistance (traction/compression) : $\sigma \leq \frac{R_e}{s}$

Treillis : assemblage de barres travaillant uniquement en traction ou en compression.

Méthode de Ritter : permet de déterminer les efforts dans les barres par isolement d'une partie du treillis.

Hyperstaticité : $h = N_i - N_e$

N_i : nombre d'inconnues statiques (appuis + barres)

N_e : nombre d'équations d'équilibre disponibles

Système **isostatique** si $h = 0$, **hyperstatique** si $h > 0$

Concentration de contrainte : présence de zones où la contrainte locale dépasse significativement la contrainte moyenne, souvent due à des géométries irrégulières, des entailles ou des points d'appui. On multiplie alors la contrainte nominale par un coefficient de concentration K_t

Chapitre 5

Cisaillement - Effort tranchant

PLAN

Chapitre 5

Objectifs :

- Analyser un problème soumis à des efforts tranchants (cisaillement) et en déterminer les dimensions.
- Calculer les contraintes tangentielles au niveau de la section de la poutre.

Contenu :

- Caractéristiques du cisaillement.
- Critères de dimensionnement en cisaillement.

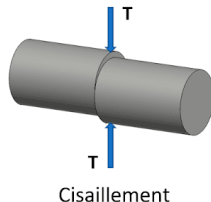
Définition

Un corps est soumis à des efforts tranchants (cisaillement) lorsqu'il subit deux forces égales, de même direction mais de sens opposés, provoquant le glissement d'une partie (E_1) par rapport à une autre (E_2).

Le torseur de cohésion s'exprime ainsi :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

où T_y est l'effort tranchant selon l'axe \vec{y} et T_z celui selon l'axe \vec{z} .



La vérification de la résistance d'une structure au cisaillement est cruciale dans de nombreux cas comme le dimensionnement des axes, goupilles, boulons, ...

Contrainte mécanique liée aux efforts tranchants (cisaillement)

En cisaillement simple, un corps (E) soumis à un effort tranchant T génère une contrainte tangentielle τ .

La contrainte tangentielle τ_{xy} (ou τ_{xz}) s'exerce dans le plan de la section, selon la direction \vec{y} (ou \vec{z}), et s'exprime par :

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad \left(\text{ou} \quad \tau_{xz} = \frac{T_z}{S} \right)$$

où S est la section droite soumise au cisaillement.

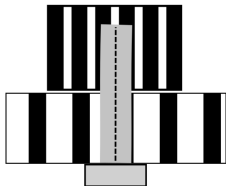
Cette contrainte correspond à une valeur moyenne, souvent notée τ_{moy} ou τ_M .

Essai de cisaillement

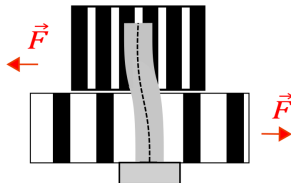
Un essai de cisaillement pur ne peut pas être réalisé physiquement, car le cisaillement simple agit uniquement sur une section précise de la poutre et non sur l'ensemble.

Néanmoins, un exemple sera présenté par la suite afin d'illustrer les effets du cisaillement.

Exemple de cisaillement : rivet



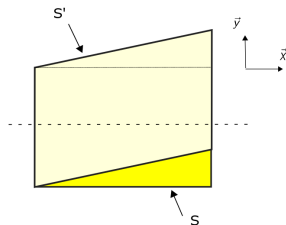
Rivet



Rivet soumis à un effort de cisaillement

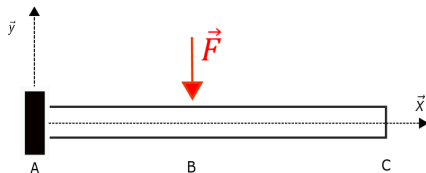
En zoomant sur un élément infinitésimal le long de la poutre, on observe un **glissement transversal** provoqué par le cisaillement.

Ce glissement est proportionnel à l'intensité de l'effort tranchant appliqué.



Cisaillement - exercice

Dans cet exercice, on cherche à déterminer le torseur de cohésion de la poutre]ABC[soumise à une force concentrée F .



Poutre]ABC[avec force appliquée

Objectif : analyser la répartition des efforts internes (cisaillement et moment) dans les tronçons]AB[et]BC[.

On modélise le torseur de cohésion sur chaque tronçon.

Tronçon]AB[:

$$\{\tau_{coh}\}_{G_1, R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}_{G_1, R_1}$$

Ici, $-F$ correspond à l'effort tranchant (cisaillement) et $F \cdot \Delta x$ au moment fléchissant sur la petite longueur Δx .

Tronçon]BC[:

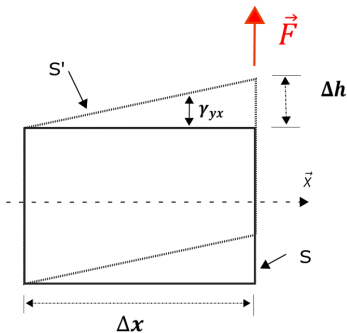
$$\{\tau_{coh}\}_{G_2, R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2, R_2}$$

Aucun effort n'est transmis dans ce tronçon (pas de force ni moment).

Remarque : Le moment fléchissant sur]AB[est proportionnel à Δx . Pour $\Delta x \ll 1$, il est négligeable par rapport au cisaillement. On se concentre donc principalement sur l'effort tranchant.

Déformation de cisaillement ou angle de distorsion/glisement

Glissement transversal



Angle de distorsion

Lors d'un cisaillement, le corps subit une déformation de cisaillement, également appelée angle de glissement ou angle de distorsion γ (en radians). Cet angle est défini géométriquement par :

$$\tan \gamma_{yx} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (25)$$

où Δh représente le glissement transversal (en mètres) et Δx la distance (en mètres).

Si l'angle de distorsion γ est très faible, alors l'approximation suivante est valable :

$$\gamma_{yx} \approx \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

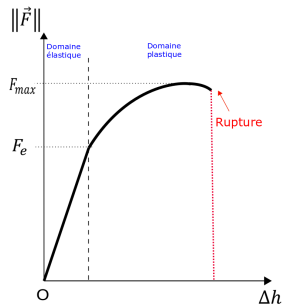
Essai de cisaillement

Bien qu'un essai de cisaillement pur ne soit pas réalisable physiquement, il est possible d'étudier le comportement du matériau lorsque le moment fléchissant est négligeable (comme dans l'exemple précédent). Dans ce cadre, le corps étudié est soumis à une force F de cisaillement (effort tranchant) et on mesure la relation entre l'effort tranchant et le glissement transversal Δh .

On observe deux zones distinctes (élastique et plastique). La frontière entre ces deux zones correspond à la force limite élastique au cisaillement F_e . À partir de cette force, on définit la résistance élastique au glissement R_{eg} (également appelée résistance au cisaillement τ_E) par :

$$R_{eg} = \tau_E = \frac{F_e}{S}$$

avec S la surface de la section droite.



Critère de résistance en cisaillement

Module de Coulomb

Dans le domaine élastique, la relation (τ, γ) est linéaire et définie par :

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

avec τ_{moy} la contrainte tangentielle moyenne dans la section droite, G le module de Coulomb ou module de cisaillement, E le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Critère de résistance en cisaillement

Le critère de dimensionnement est donné par :

$$\tau_{moy} \leq R_{pg} \quad \text{avec} \quad R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

avec R_{pg} la résistance pratique au glissement (ou au cisaillement), τ_{moy} la contrainte tangentielle moyenne, R_{eg} la résistance élastique au glissement, et s le coefficient de sécurité.

Formules clés

Contrainte tangentielle moyenne : $\tau_{moy} = \frac{T}{S}$

Déformation (angle de distorsion) : $\gamma = \frac{\Delta h}{\Delta x}$

Module de Coulomb : $\tau = G \cdot \gamma$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Critère de résistance : $\tau_{moy} \leq R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$

Chapitre 6

Synthèse

Bases de la DDS

Théorie des poutres (1D) : Une poutre est un élément caractérisé par une ligne, appelée fibre moyenne ou neutre, qui présente une courbure faible par rapport à la longueur de la pièce, ainsi qu'une section perpendiculaire à cette fibre, qui varie lentement en fonction de la longueur de la poutre. Cette section est appelée section droite. De plus, la dimension longitudinale de la poutre est au moins cinq fois plus grande que ses autres dimensions transversales.

- **Hypothèses de la DDS :**

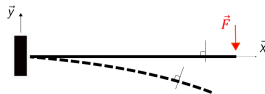
- Un matériau est dit « homogène » s'il possède les mêmes propriétés mécaniques et thermiques en tout point.
- Un matériau est dit « isotrope » si ses propriétés mécaniques et thermiques sont identiques dans toutes les directions.
- Un matériau est dit « élastique linéaire » s'il retrouve sa forme initiale après avoir subi un cycle de charge/décharge. Cette propriété implique que le matériau ne se déforme pas ou très peu.

Bases du dimensionnement des structures

Les hypothèses fondamentales du dimensionnement des structures (DDS) sont :

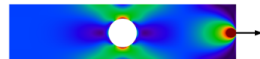
Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections droites planes restent droites et planes après déformation.



Principe de Saint-Venant

Les résultats obtenus lors du dimensionnement des structures ne sont valides qu'à une distance suffisamment éloignée de la zone d'application des efforts concentrés (zone de singularité).



Hypothèse des petites déformations (HPP)

Le solide est soumis à de petits déplacements (1/100 de la longueur de la fibre moyenne) et de petites déformations.

Définition

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique exercée par une partie de la poutre (E_2 , aval) sur une autre partie (E_1 , amont), de part et d'autre d'une coupure fictive. Il permet de décrire les actions internes de la poutre. Ce torseur est exprimé au point G, dans le repère local de la poutre étudiée.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \{\tau_{int}\}_{G,R} = -\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R}$$

Attention : Lors de l'analyse des actions internes d'une poutre, il est nécessaire de réaliser des coupes fictives dès que l'une des situations suivantes se présente :

- une discontinuité liée à la présence d'actions mécaniques concentrées (efforts ou moments mécaniques extérieurs, liaisons mécaniques (pivot, rotule, appui-plan), etc.)
- une discontinuité géométrique (changement de direction de la ligne moyenne).

Le **torseur de cohésion** est donné par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R}$$

Avec N_x effort normal suivant l'axe \vec{x} , T_y et T_z efforts tranchants respectivement suivant les axes \vec{y} et \vec{z} ; M_{tx} moment de torsion suivant l'axe \vec{x} , M_{fy} et M_{fz} moments fléchissants suivant les axes \vec{y} et \vec{z} .

Les **diagrammes des sollicitations** permettent de visualiser graphiquement les points ou les zones de la poutre les plus sollicités (valeurs les plus élevées) en vue du dimensionnement des structures.

Relation entre contraintes mécaniques et torseur de cohésion

En théorie des poutres, le torseur de cohésion est relié aux contraintes mécaniques par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} \iint_{(S)} \sigma_{xx} \cdot dS & \iint_{(S)} (y \cdot \tau_{xz} - z \cdot \tau_{xy}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xy} \cdot dS & \iint_{(S)} z \sigma_{xx} \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xz} \cdot dS & - \iint_{(S)} y \sigma_{xx} \cdot dS \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Contrainte normale :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Déformations :

- Déformation longitudinale :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

- Déformation transversale :

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta d}{d_0}$$

- Déformation-déplacement :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

Loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_L$$

avec E , le module de Young.

Coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{-\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

Critère de dimensionnement :

$$\sigma < R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

Contrainte tangentielle :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Déformation de cisaillement / angle de distorsion / angle de glissement :

$$\tan \gamma = \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

Relation contrainte tangentielle - distorsion

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma$$

avec **G module de Coulomb** ou de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Critère de dimensionnement :

$$\tau_{moy} \leq \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$$

Grandeurs physiques

Grandeurs physiques	Symbole	Unité
Longueur	L	mètre (m)
Surface	S	mètre ² (m^2)
Force/action mécanique	F	Newton (N)
Moment d'une force	M	Newton · mètre (Nm)
Déplacement	u	mètre (m)
Déformation	ε	sans unité
Coefficient de Poisson	ν	sans unité
Glissement transversal	Δh	mètre (m)
Distorsion	γ	radian (rad)
Contraintes mécaniques	σ	Pascal (Pa) <i>souvent exprimé en MPa</i>
Module de Young	E	Pascal (Pa) <i>souvent exprimé en GPa</i>
Module de Coulomb	G	Pascal (Pa) <i>souvent exprimé en GPa</i>