

Dimensionnement des structures (DDS)

R2.02 - BUT GMP

Djibrilla NOMA

Enseignant-chercheur à l'Université Lyon 1
djibrilla.noma@univ-lyon1.fr

Institut Universitaire de Technologie Lyon 1
Département GMP - Laboratoire de DDS



Pourquoi le dimensionnement des structures ?



(a) Peugeot 408
© Peugeot



(b) TGV M
© SNCF - Alstom Avelia Horizon



(c) Eolienne
© Radio France - Stéphane Pocher



(d) Cuve
© Labbe Process Equipment

Qu'est que le dimensionnement des structures ?

Dimensionnement des structures

Il s'agit d'une discipline scientifique qui permet de déterminer ou de vérifier les propriétés d'un produit afin de prévenir sa rupture lors de son utilisation.

Dimensionner une structure signifie :

- Calculer les dimensions adéquates.
- Choisir les matériaux les plus adaptés.

pour que la structure étudiée supporte les actions mécaniques extérieures appliquées.

Cette discipline est en lien étroit avec les autres modules : mécanique, science des matériaux, conception,...

Il est intéressant de noter que, contrairement à la mécanique qui considère des solides indéformables, en DDS, on s'intéresse à des solides déformables.



- Déterminer les actions mécaniques intérieures d'une structure.
- Identifier la nature de la sollicitation (traction/compression, cisaillement, etc.).
- Dimensionner un problème avec la théorie des poutres.
- Identifier le point critique (de vulnérabilité) d'une structure en vue de son dimensionnement.
- Vérifier et valider les résultats avec une étude numérique.

Répartition horaire :

- 4 séances (8h) de cours magistraux (CM)
- 9 séances (18h) de travaux dirigés (TD)
- 1 séance (4h) de travaux pratiques (TP)

Évaluations :

- 2 devoirs surveillés (DS) de 1h30 (2h pour les 1/3 temps) sur les travaux dirigés
- 1 note de travaux pratiques

Références bibliographiques



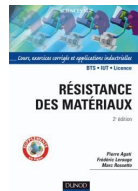
M. Rossat, Résistance des matériaux et dimensionnement des structures : BUT, BTS, CPGE, licences, masters, écoles d'ingénieurs, Ellipse, 2021.



Y. Xiong, Exercices résolus de résistance des matériaux. Toute la RDM en 300 sujets, Eyrolles, 2016.



C. Chèze, Résistance des matériaux - Dimensionnement des structures, Ellipse, 2012.



P. Agati, F. Lerouge, M. Rossetto, Résistance des matériaux - 2ème édition, Dunod, 2008.

- 1 Introduction et bases du dimensionnement des structures
- 2 Tenseur de cohésion et sollicitations simples
- 3 Contraintes mécaniques
- 4 Traction/compression
 - Traction-compression
 - Problème hyperstatique et treillis
- 5 Cisaillement

Chapitre 1

Introduction et bases du dimensionnement des structures

PLAN

Chapitre 1

Objectif :

Présenter la théorie des poutres et ses grandes hypothèses

Contenu :

- Classification des corps
- Théorie des poutres
- Hypothèses en DDS
- Principe de superposition

Classification des corps

Les corps peuvent être classés en trois familles :

- Corps uni-dimensionnel (1-D) : les **poutres** (dont la longueur L est beaucoup plus grande que les autres dimensions du corps).
- Corps bi-dimensionnel (2-D) : les **plaques** (l'épaisseur e de la plaque est au moins 10 fois inférieure aux autres dimensions).
- Corps tri-dimensionnel (3-D) : les **solides**.

Dans ce module, nous nous concentrerons sur les corps de type poutre.

Théorie des poutres



Poutre



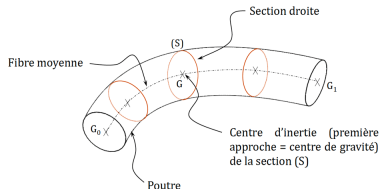
Plaque



Solide

Définition

Une poutre est une pièce caractérisée par une ligne, appelée fibre moyenne ou neutre, présentant une faible courbure par rapport à la longueur de la pièce, ainsi qu'une section perpendiculaire à cette fibre, dont la variation le long de la poutre est lente, appelée section droite.



Une poutre est caractérisée par :

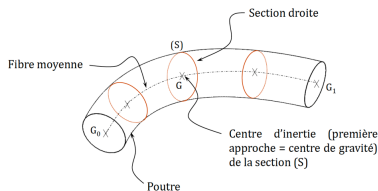
- Une longueur L de la fibre (ou ligne) moyenne est grande par rapport aux dimensions transversales, avec un **rapport supérieur à 5 entre la longueur de la fibre moyenne et la plus grande dimension transversale**.
- Un rayon de courbure de la fibre moyenne est grand par rapport aux dimensions transversales de la section droite, avec un **rapport supérieur à cinq**.
- un profil sans discontinuité.

Par convention :

- l'axe (O, \vec{x}) correspond à la direction de la fibre moyenne de la poutre.
- le plan (\vec{y}, \vec{z}) correspond à la section droite de la poutre.

Trois types de poutres :

- une **poutre gauche** : poutre dont la fibre moyenne est une courbe gauche (3-D : trois dimensions dans l'espace).
- une **poutre plane** : poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane (2-D : contenue dans un plan).
- une **poutre droite** : poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite (1-D).



La section (S) de la poutre peut être soit :

- **constante** : la section droite (S) ne varie pas le long de la fibre moyenne.
- **variable** : la section droite (S) n'est pas identique le long de la fibre moyenne.

$$S = \int_S dS \quad (1)$$

Où sont les poutres ?



- Des poutres gauches ?
- Des poutres droites ?
- Des poutres planes ?



Hypothèses dans ce module

- un solide avec une dimension grande comparée aux deux autres : un **solide de type poutre**.
- une poutre avec une fibre moyenne droite (1D) : **poutre droite**.
- une section droite constante ou variant très progressivement.
- une section droite toujours perpendiculaire à la fibre moyenne.
- une poutre avec au moins un plan de symétrie suivant sa plus grande longueur.

Matériaux

- Un matériau est dit « **homogène** » s'il possède, en tout point, la même composition et la même structure. Ainsi, le matériau possède les mêmes propriétés mécaniques et thermiques en son sein.
- Un matériau est dit « **isotrope** » si ses propriétés mécaniques et thermiques sont identiques dans toutes les directions.
- Un matériau est qualifié d'« **élastique linéaire** » s'il retrouve sa forme initiale après avoir subi un cycle de charge et décharge. Cette propriété implique que le matériau se déforme peu, voire pas du tout.

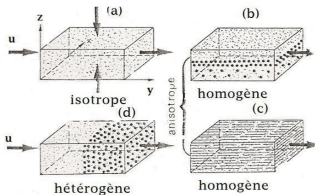
Les caractéristiques intrinsèques du matériau, telles que l'homogénéité et l'isotropie, sont évaluées au niveau de sa microstructure, c'est-à-dire à des échelles très petites.

(cf. cours de SDM)

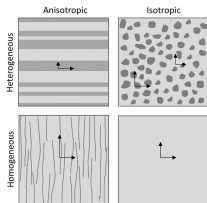


Elastique

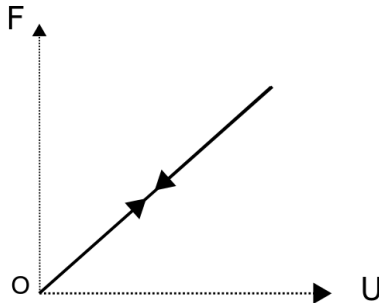
Hypothèses utilisées en DDS ?



Isotropie et homogénéité (© R. Atmani)



Isotropie et homogénéité (© H.B. Lynn)



Relation force-déplacement pour un matériau élastique linéaire

Quelques hypothèses fondamentales

- **Hypothèse de Navier-Bernoulli** : Les sections droites et planes demeurent droites et planes après déformation.
- **Principe de Saint-Venant** : Les résultats obtenus lors du dimensionnement des structures ne sont valables qu'à une distance suffisante de la zone d'application des efforts concentrés, également appelée zone de singularité.
- **Hypothèses des petites déformations (HPP)** : Le solide subit de petits déplacements (de l'ordre de 1/100 de la longueur de la fibre moyenne) ainsi que de petites déformations.

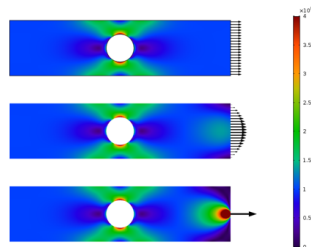
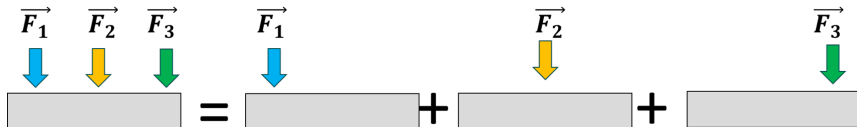


Illustration du principe de Saint-Venant
© COMSOL

Cliquez [ICI](#) pour un résumé des hypothèses de la DDS (©TSI Alès).

Définition

Pour de petites déformations élastiques, le **principe de superposition** peut être appliqué. Ce principe stipule qu'un système de forces extérieures est équivalent à la somme des forces individuelles agissant séparément.



Chapitre 2

Torseur de cohésion et sollicitations simples

PLAN

Chapitre 2

Objectifs :

- Appliquer la théorie des poutres.
- Déterminer les efforts mécaniques internes.

Pré-requis (cf. cours de mécanique S1) :

- Modélisation des actions mécaniques extérieures
- Principe fondamental de la statique (PFS)

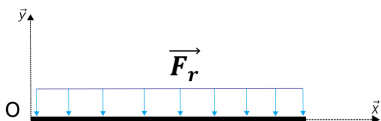
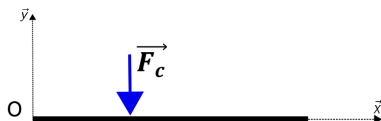
Contenu :

- Efforts internes
- Définition du torseur de cohésion
- Sollicitations simples

Rappel : actions mécaniques extérieures

Les **actions mécaniques extérieures** sont des conditions aux limites appliquées au système. Elles provoquent un mouvement ou une déformation de la structure étudiée. Elles peuvent être de deux types :

- **Charges concentrées/localisées** : Les charges extérieures sont concentrées en un point le long de la poutre. Elles sont représentées par un torseur des actions mécaniques appliquées à une section droite au niveau du point d'application.
- **Charges réparties** : Les charges extérieures sont réparties sur une portion ou l'ensemble de la poutre. Elles sont représentées par une fonction de répartition le long de la zone concernée.



Rappel : actions mécaniques extérieures

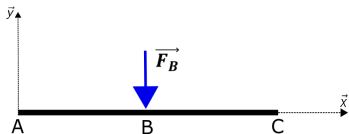
Le torseur des actions mécaniques dans l'espace au point B (charge localisée) est donné par :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{cc} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (2)$$

dans le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , le torseur des actions mécaniques devient :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{cc} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (3)$$



Torseur des actions mécaniques

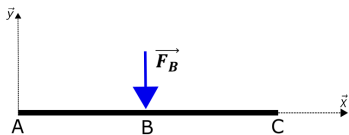
$$\{\tau_B\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{array} \right\}_{B,R} = - \left\{ \begin{array}{cc} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{array} \right\}_{B,R} \quad (4)$$

dans le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Nous nous proposons de déplacer le torseur des actions mécaniques du point B au point A :

- la résultante $\vec{\mathcal{R}}$ des actions mécaniques extérieures reste identique dans n'importe quel point de l'espace.
- par contre, pour le moment $\vec{\mathcal{M}}$ il va falloir le déplacer avec la formule de transport (Varignon) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\{\tau_B\}_{A,R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\{\tau_B\}_{B,R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{\{\tau_B\}_R} \quad (5)$$

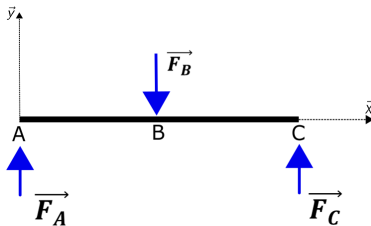


Rappel : principe fondamental de la statique (PFS)

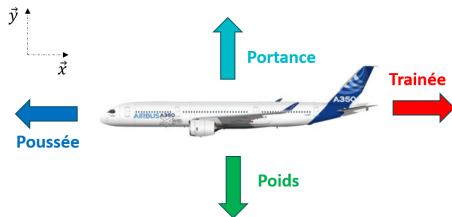
Principe fondamental de la statique (PFS)

Un système est en équilibre statique lorsqu'il est immobile (pas en mouvement). Dans ce cas, le principe fondamental de la statique (PFS) stipule que la somme des forces extérieures est nulle, tout comme la somme de leurs moments.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (6)$$



Exercice :



Principe fondamental de la statique (PFS) :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

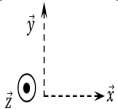
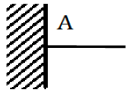
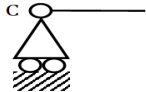
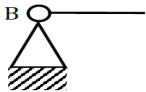



$$\vec{Portance} + \vec{Poids} + \vec{Trainée} + \vec{Poussée}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Portance \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Poids \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Trainée \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Poussée \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} Poussée = -Trainée \\ Portance = -Poids \end{cases}$$

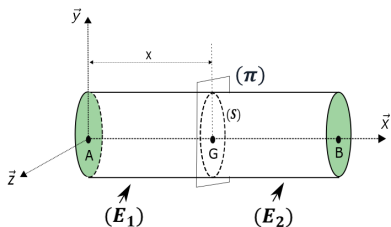
Rappel : Quelques liaisons mécaniques courantes

	Encastrement	Ponctuelle d'axe \vec{y}	Pivot d'axe \vec{z}
			
Exemple			
Torseur des AM	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$
Torseur cinématique	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} U_x & R_x \\ 0 & R_y \\ U_z & R_z \end{Bmatrix}_R$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}_R$

- Le torseur des actions mécaniques (AM) exprime respectivement les forces mécaniques (résultante) et les moments mécaniques imposés par la liaison.
- Le torseur cinématique exprime respectivement les déplacements et les rotations autorisés par la liaison.

Torseur de cohésion – torseur de section

- **Actions mécaniques intérieures** : Les efforts intérieurs d'une poutre sont des forces agissant à l'intérieur du matériau, garantissant l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'effet des charges extérieures appliquées.
- Pour déterminer les efforts internes d'une poutre, il est nécessaire de réaliser une coupure fictive sur la poutre (E) à l'aide d'un plan (π) perpendiculaire à la ligne (fibre) moyenne de la section (S). La poutre est ainsi divisée en deux parties, (E_1) et (E_2), appelées « **tronçons** », au niveau du point G , centre de surface de (S).
- Le **torseur de cohésion** représente l'action mécanique exercée par une portion de la poutre sur une autre, de part et d'autre d'une coupure fictive.



Définition du torseur de cohésion

Les actions mécaniques exercées par le tronçon (E_2) sur le tronçon (E_1) à travers la section droite fictive (π) d'un solide (S) correspondent aux efforts internes à la poutre, modélisés par le torseur de cohésion (ou torseur de section), $\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R}$, dont les éléments sont concentrés au point G , centre de la surface de (S). Le torseur de cohésion des actions internes est aussi noté $\{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R}$.

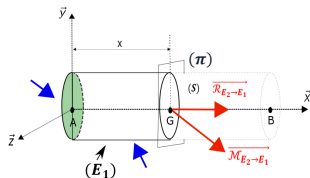
- Repère fixe : $\mathcal{R}_O(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ utilisé pour l'étude de l'équilibre statique de (E).
- Repère lié à la poutre : $\mathcal{R}_A(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec (A, \vec{x}) l'axe tangent à la ligne (ou la fibre) moyenne.
- Dans ce cas, $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_O$.

Torseur de cohésion – torseur de section

Torseur de section sur le tronçon de gauche (E_1) appelé « amont »

- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :
 - Actions mécaniques **extérieures** agissant sur (E_1) : $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R}$
 - Actions mécaniques **intérieures** du tronçon (E_2) sur (E_1) : $\{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G,R}$
- Principe fondamental de la statique (PFS) :

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} + \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G,R} = \vec{0}$$



Par convention :

$$\{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_{G,R}$$

Ainsi, le torseur de cohésion représentant les actions internes du tronçon (E_2) sur (E_1) est donné par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = -\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{ext \rightarrow E_1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext \rightarrow E_1}} \end{array} \right\}_{G,R} \quad (7)$$

Torseur de cohésion – torseur de section

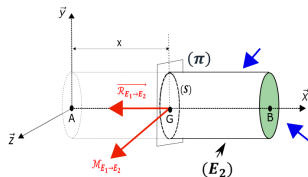
Torseur de section sur le tronçon de gauche (E_2) appelé « aval »

- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :
 - Actions mécaniques **extérieures** agissant sur (E_2) : $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R}$
 - Actions mécaniques **intérieures** du tronçon (E_1) sur (E_2) : $\{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G,R}$
- Principe fondamental de la statique (PFS) :

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R} + \{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G,R} = \vec{0}$$

Ainsi, le torseur de cohésion représentant les actions internes du tronçon (E_1) sur (E_2) est donné par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{ext \rightarrow E_2}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext \rightarrow E_2}} \end{array} \right\}_{G,R} \quad (8)$$



Par convention :

$$\{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = -\{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\}_{G,R}$$

Convention du torseur de cohésion

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique exercée par une portion de la poutre (E_2) sur une autre portion (E_1), de part et d'autre d'une coupure fictive. Il permet de représenter les actions internes de la poutre. Ce torseur est exprimé au point G dans le repère local de la poutre analysée.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R}$$

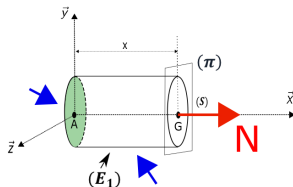
Lors de l'analyse des actions internes d'une poutre, il est nécessaire d'effectuer des coupes fictives dès qu'une des situations suivantes se présente :

- une discontinuité due à la présence d'actions mécaniques concentrées (efforts ou moments extérieurs, liaisons mécaniques telles que pivots, rotules, appuis plans, etc.) ;
- une discontinuité géométrique (changement de direction de la ligne moyenne).

Effort normal N

L'effort interne agissant perpendiculairement à une section droite de la poutre entraîne soit un allongement (traction), soit un raccourcissement (compression) de celle-ci.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (9)$$



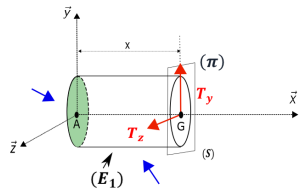
Pour :

- $N > 0$: Traction
- $N < 0$: Compression

Efforts tranchants T_y et T_z

Les efforts internes agissant dans le plan d'une section droite de la poutre provoquent un cisaillement relatif entre deux sections.

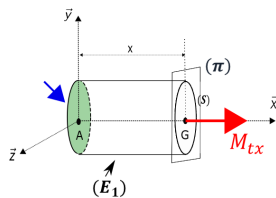
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (10)$$



Moment de torsion M_{tx}

Un moment de torsion correspond à la somme des moments de tous les efforts internes dans la section, calculés par rapport à l'axe normal de la fibre moyenne \vec{x} .

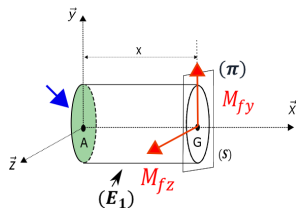
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (11)$$



Moments fléchissants M_{fy} et M_{fz}

Un moment fléchissant est une composante du moment résultant des actions mécaniques qui engendrent la flexion longitudinale de la poutre, contribuant ainsi à sa réduction.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G,R} \quad (12)$$



Le **torseur de cohésion** est donc donné par :

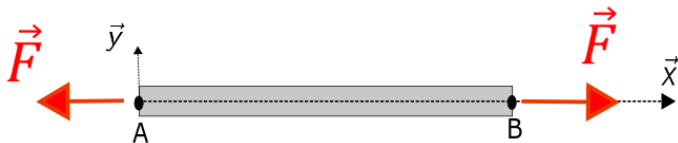
$$\{T_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R} \quad (13)$$

Avec :

- N : Effort normal par rapport à l'axe (G, \vec{x})
- T_y : Effort tranchant par rapport à l'axe (G, \vec{y})
- T_z : Effort tranchant par rapport à l'axe (G, \vec{z})
- M_{tx} : Moment de torsion par rapport à l'axe (G, \vec{x})
- M_{fy} : Moment fléchissant par rapport à l'axe (G, \vec{y})
- M_{fz} : Moment fléchissant par rapport à l'axe (G, \vec{z})

Effort normal N – exercice 1

- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de gauche (partie amont).
- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de droite (partie aval).

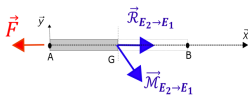


N.B :

- $\vec{AB} = L\vec{x}$: il s'agit de la longueur de la poutre.
- $\vec{AG} = x\vec{x}$: G est le point sur la fibre moyenne où est réalisé la coupe fictive.

Effort normal N - exercice 1

1) PFS sur le tronçon amont (E_1)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

- Actions mécaniques :

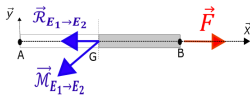
$$\vec{R}_{ext \rightarrow E_1} + \vec{R}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N = F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

- Moment au point G :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{ext \rightarrow E_1}(A)} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}_{ext \rightarrow E_1}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{int}} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Mt_x \\ Mf_y \\ Mf_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Mt_x = 0 \\ Mf_y = 0 \\ Mf_z = 0 \end{cases}$$

Effort normal N - exercice 1

2) PFS sur le tronçon aval (E_2)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} + \{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} - \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

- Actions mécaniques :

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} - \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N = F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

- Moment au point G :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow E_1}(B) + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_2}(B) - \overrightarrow{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L - x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Mt_x \\ Mf_y \\ Mf_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Mt_x = 0 \\ Mf_y = 0 \\ Mf_z = 0 \end{cases}$$

Effort normal N - exercice 1

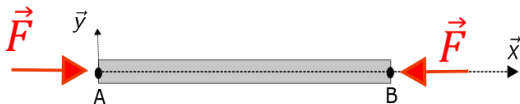
Pour le problème présenté dans l'exercice 1, le torseur de cohésion est :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- L'effort normal N est positif, la poutre est donc sollicitée en traction ($N > 0$).
- On voit qu'il est le même qu'on prenne la partie amont ou aval.

Effort normal N – exercice 2

- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de gauche (partie amont).
- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de droite (partie aval).

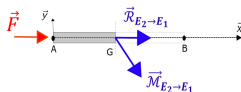


N.B :

- $\vec{AB} = L\vec{x}$: il s'agit de la longueur de la poutre.
- $\vec{AG} = x\vec{x}$: G est le point sur la fibre moyenne où est réalisé la coupe fictive.

Effort normal N - exercice 2

1) PFS sur le tronçon amont (E_1)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

• Actions mécaniques :

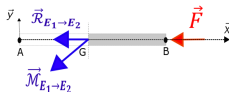
$$\vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} + \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N = -F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

• Moment au point G :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow E_1}(A) + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1}(A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Mt_x \\ Mf_y \\ Mf_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Mt_x = 0 \\ Mf_y = 0 \\ Mf_z = 0 \end{cases}$$

Effort normal N - exercice 2

2) PFS sur le tronçon aval (E_2)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} + \{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} - \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

- Actions mécaniques :

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} - \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N = -F \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases}$$

- Moment au point G :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow E_1}(B) + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1}(B) - \overrightarrow{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Mt_x \\ Mf_y \\ Mf_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Mt_x = 0 \\ Mf_y = 0 \\ Mf_z = 0 \end{cases}$$

Effort normal N - exercice 2

Pour le problème présenté dans l'exercice 2, le torseur de cohésion est :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

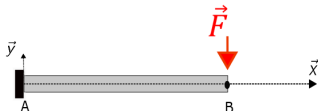
- L'effort normal N est négatif, la poutre est donc sollicitée en compression ($N < 0$).
- On voit qu'il est le même qu'on prenne la partie amont ou aval.

Effort tranchant (cisaillement) – exercice 3

Principe fondamental de la statique (PFS) :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = F \\ Z_A = 0 \end{cases}$$



- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de gauche (partie amont).
- Déterminer le torseur de cohésion sur l'échantillon de droite (partie aval).

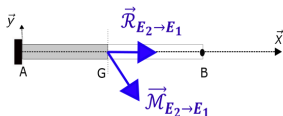
On ne s'intéressera qu'à la résultante des actions mécaniques. Il n'est pas demandé de déterminer les moments intérieurs de la poutre.

N.B :

- $\vec{AB} = L\vec{x}$: il s'agit de la longueur de la poutre.
- $\vec{AG} = x\vec{x}$: G est le point sur la fibre moyenne où est réalisé la coupe fictive.

Effort tranchant (cisaillement) - exercice 3

1) PFS sur le tronçon amont (E_1)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

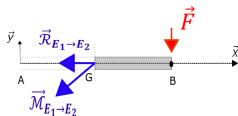
Résultante des actions mécaniques :

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext \rightarrow E_1} + \vec{\mathcal{R}}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y = -Y_A = -F \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Effort tranchant (cisaillement) - exercice 3

2) PFS sur le tronçon aval (E_2)



$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} + \{\mathcal{T}_{E_1 \rightarrow E_2}\} = \vec{0} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\} - \{\mathcal{T}_{int}\} = \vec{0}$$

Résultante des actions mécaniques :

$$\vec{R}_{ext \rightarrow E_1} - \vec{R}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y = -F \\ T_z = 0 \end{cases}$$

Effort tranchant (cisaillement) - exercice 3

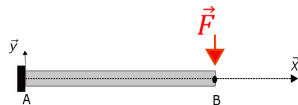
Pour le problème présenté dans l'exercice 3, la résultante des actions mécaniques intérieures est donné par :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}_{coh\ G,R} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -F \\ 0 \end{array} \right\}_{G,R}$$

- La poutre est sollicitée en cisaillement avec un effort tranchant : $T_y = -F$.
- On voit qu'il est le même qu'on prenne la partie amont ou aval.

Remarques

- Le torseur de cohésion des actions intérieures est identique, qu'on fasse une coupe fictive de la partie amont (E_1) ou de la partie aval (E_2).
- Il est donc judicieux de prendre la partie présentant le moins d'inconnues de liaisons, à chaque fois que le concepteur effectue une coupe fictive.



Dans le cas ci-dessus, il semble plus simple de prendre le tronçon en aval (de droite) car l'inconnu est directement connu sans faire le BAME.

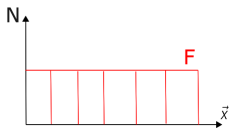
Diagrammes des sollicitations

Pour chaque sollicitation $((N, T_y, T_z, M_{tx}, M_{fy}, M_{fz}))$, il est possible de tracer l'évolution de la valeur associée (en ordonnée) en fonction de la position le long de la poutre (en abscisse). Les valeurs caractéristiques des sollicitations sont représentées sur la courbe en tenant compte de leur signe.

Les diagrammes de sollicitations offrent une représentation graphique des points ou des zones de la poutre les plus soumis à des efforts (valeurs maximales).

Diagrammes des sollicitations - exercices

Exercice 1 - diagramme de sollicitation



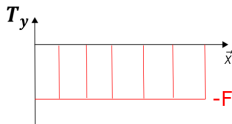
Effort normal N
(Traction : $N > 0$)

Exercice 2- diagramme de sollicitation



Effort normal N
(Compression : $N < 0$)

Exercice 3- diagramme de sollicitation



Effort tranchant T_y
(cisaillement)

Chapitre 3

Contraintes mécaniques

PLAN

Chapitre 3

Objectif :

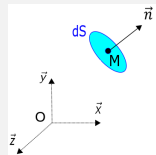
Déterminer les contraintes mécaniques d'une structure

Contenu :

- Vecteur contrainte
- Tenseur des contraintes mécaniques
- Contraintes principales

On considère un point $M(x, y, z)$ arbitraire appartenant au solide étudié, dans un repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On examine une surface infinitésimale dS qui contient le point M. Cette surface est caractérisée par sa direction normale \vec{n} (c'est-à-dire la direction perpendiculaire), qui détermine son orientation, de la manière suivante :

$$\vec{n} = \beta_1 \vec{x} + \beta_2 \vec{y} + \beta_3 \vec{z}$$



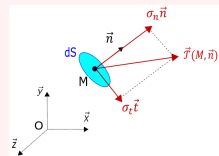
La normale extérieure \vec{n} divise l'espace en deux demi-espaces, de part et d'autre de la facette. Selon le principe d'équilibre des actions mécaniques (troisième loi de Newton ou loi d'action-réaction), les efforts mécaniques exercés sur la facette inférieure $d\vec{f}$ sont égaux en valeur absolue et opposés en signe à ceux exercés sur la facette supérieure. On peut ainsi définir un **vecteur de contrainte** $\vec{T}(M, \vec{n})$ au point M, associé à la normale \vec{n} tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{f}}{dS}$$

Vecteur contrainte

Le vecteur de contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ se décompose en une composante σ_n suivant la direction normale \vec{n} et une composante σ_t suivant la direction tangentielle \vec{t} à la surface dS . Il se définit par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t}$$



- Les composantes σ_n (projection algébrique de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur la normale extérieure \vec{n}) et σ_t (projection algébrique de $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans le plan de la facette) sont respectivement appelées contrainte normale et contrainte tangentielle.
- Le vecteur de contrainte dépend du point examiné et de l'orientation de la normale à la facette en ce point.
- Une contrainte représente le rapport entre une force (en Newtons, N) et une surface (en mètres carrés, m^2), et s'exprime donc en Newton par mètre carré (N/m^2) ou en Pascal (Pa).

Théorème de Cauchy

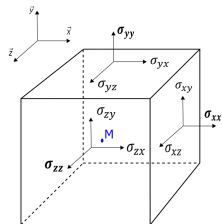
Nous allons maintenant généraliser le vecteur contrainte à l'ensemble du solide. On introduit ainsi le **tenseur des contraintes ou tenseur de Cauchy** $\bar{\bar{\sigma}}$, qui est indépendant de l'orientation de la facette considérée. Ce tenseur est défini en un point M quelconque par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}_{M,R}$$

Le **théorème de Cauchy** énonce que :

En tout point M et en chaque instant t, la dépendance du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ à la normale \vec{n} est linéaire.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \text{ avec } \vec{n} = \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_R$$



Tenseur des contraintes sur un cube élémentaire au voisinage d'un point M (M appartenant au solide étudié).

Cas général

Nous avons opté pour le repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ afin de simplifier les calculs et d'en faciliter l'utilisation. Cependant, il convient de noter que, dans une base quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le tenseur des contraintes est exprimé par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right\}_{M, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Pour une contrainte σ_{ij} , le premier indice i désigne l'axe de projection, tandis que le second indice j fait référence à la normale de la section. Dans le cas général, le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right\}_{M, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \right\}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

N.B : le tenseur des contraintes est une matrice symétrique, les termes diagonaux sont donc égaux $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Contraintes principales

Il est possible d'exprimer le tenseur des contraintes dans une base orthonormée permettant de le diagonaliser tel que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{array} \right\}_{M, (\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} \quad (14)$$

Les directions principales de contraintes sont alors \vec{e}_I , \vec{e}_{II} et \vec{e}_{III} .

- Par convention, les contraintes principales sont classées par ordre décroissant :
 $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$
- La base principale $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$ a un réel intérêt physique. En effet, dans cette base, il n'y a pas de contraintes tangentielles puisque les termes non-diagonaux sont nuls.

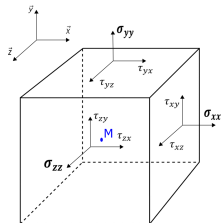
Définition

Les contraintes mécaniques à l'intérieur d'un solide correspondent aux efforts internes exercés sur une surface élémentaire dS . Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, elles sont caractérisées par des composantes normales (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) et tangentielles (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} et τ_{zy}).

À un point M quelconque appartenant au solide, le **tenseur des contraintes mécaniques** est donné par :

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}_{M,R} \quad (15)$$

Souvent, les contraintes mécaniques s'expriment en MPa.



Tenseur des contraintes sur un cube élémentaire au voisinage d'un point M (M appartenant au solide étudié).

Théorie des poutres

Pour une poutre dont la dimension longitudinale est beaucoup plus grande que les deux autres, orientée selon la direction \vec{x} , le vecteur contrainte se simplifie à :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\}_{M,R} \quad (16)$$

avec :

- σ_{xx} , la contrainte normale dans la direction \vec{x} (direction perpendiculaire à la section transverse).
- τ_{xy} et τ_{xz} , les contraintes tangentielles respectivement dans les directions \vec{y} et \vec{z} qui sont parallèles à la section droite de la poutre.
- si le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans la section droite de la poutre ne possède pas de contraintes tangentielles, alors le vecteur \vec{x} est une direction principale. Dans ce cas, la contrainte normale σ_{xx} est une contrainte principale.

Relation entre contraintes mécaniques et torseur de cohésion

Les contraintes mécaniques sont étroitement liées au torseur de cohésion (ou aux actions mécaniques internes). Cette relation est exprimée par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \\ \vec{M} = \iint_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot dS \end{array} \right\}_{G,R} \quad \text{avec } \vec{GM} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}_R$$

En théorie des poutres, on a :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{ll} \iint_{(S)} \sigma_{xx} \cdot dS & \iint_{(S)} (y \cdot \tau_{xz} - z \cdot \tau_{xy}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xy} \cdot dS & \iint_{(S)} z \sigma_{xx} \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xz} \cdot dS & - \iint_{(S)} y \sigma_{xx} \cdot dS \end{array} \right\}_{G,R} \quad (17)$$

Contraintes mécaniques

Dans ce module, nous nous concentrerons uniquement sur les contraintes associées à un effort normal (contraintes normales σ_{xx}) et au cisaillement/effort tranchant (contraintes tangentielles τ_{xy} subis par une poutre.

Contraintes normales lié à un effort normal

Un solide soumis à un effort normal N_x subit une contrainte normale σ_{xx} donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{S} \quad (18)$$

avec S la surface de la section droite.

Contraintes tangentielles lié à un effort tranchant

Un solide soumis à un effort tranchant T_y (respectivement T_z) subit une contrainte tangentielle τ_{xy} (respectivement τ_{xz}) donnée par :

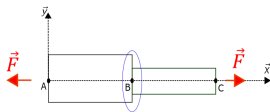
$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad \left(\text{respectivement } \tau_{xz} = \frac{T_z}{S} \right) \quad (19)$$

avec S la surface de la section droite.

Concentration de contrainte

- Elle apparaît lorsqu'on a une discontinuité de la pièce avec une modification géométrique (changement de section ou trou par exemple) ou près d'une charge concentrée (principe de Saint-Venant).
- Elle a pour conséquence d'entraîner localement une augmentation des contraintes. Il est important d'en tenir compte en DDS car c'est souvent la zone qui risque de céder en premier sous l'effet des charges extérieures.
- Pour en tenir compte, on multiplie les contraintes par un **coefficient de concentration** K_t propre à chaque type de sollicitation.

Concentration de contrainte au niveau de la zone en bleu.



La contrainte normale en traction au point B est donnée par :

$$\sigma_{xx} = K_{t_{traction}} \cdot \frac{N}{S}$$

Chapitre 4

Traction/compression

PLAN

Chapitre 4

Objectifs :

- Dimensionner un problème de traction/compression.
- Résoudre un problème de treillis (assemblage de barres)

Contenu :

- Caractéristiques de sollicitation en traction/compression
- Définition d'un treillis
- Méthode de Ritter (méthode des sections) pour résoudre des problèmes de type treillis.

Définition

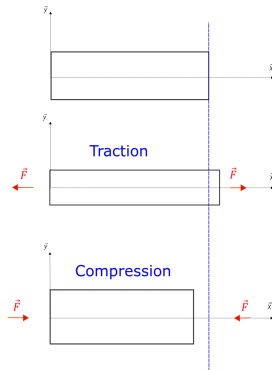
Il s'agit d'une action mécanique qui provoque l'allongement (traction) ou le raccourcissement (compression) du corps sur lequel elle agit au centre de surface G , le long de sa direction longitudinale (généralement suivant l'axe \vec{x}). Cette action résulte de deux forces de même direction, même norme, mais de sens opposé.

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Contrainte mécanique

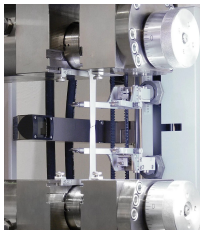
En traction/compression, un corps (E) soumis à un effort normal N_x ne subit qu'une contrainte normale σ_{xx} donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{S}$$

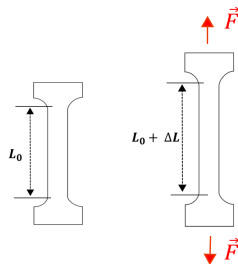


Essai de traction

Des éprouvettes généralement normalisées (pièces dont les caractéristiques géométriques sont précisément définies) sont soumises à un effort de traction pour analyser le comportement du matériau. Cette expérience fournit des informations sur le comportement élastique, le comportement plastique, ainsi que la résistance à la rupture du matériau.



© ZwickRoell

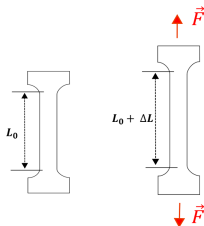


Déformation - essai de traction

Pour un corps de section circulaire :

Avant chargement	Après chargement
L_0 : longueur initial	$L = L_0 + \Delta L$: longueur après chargement
d_0 : diamètre initial	$d = d_0 + \Delta d$: diamètre après chargement

avec ΔL et Δd respectivement les variations de longueur et de diamètre.



Déformation

Une déformation mécanique est une modification géométrique d'un corps sous l'effet d'une contrainte mécanique. On peut définir deux déformations :

- Déformation longitudinale :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (20)$$

- Déformation transversale :

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (21)$$

Les déformations ε sont sans en unité.

Relation déformation / déplacement

- On a vu précédemment que la déformation longitudinale ε_L est donnée par :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

avec ΔL l'allongement (variation de longueur) et L_0 la longueur initiale de la poutre.

- Il est possible d'exprimer la déformation en fonction du déplacement longitudinal de la poutre $u(x)$ tel que :

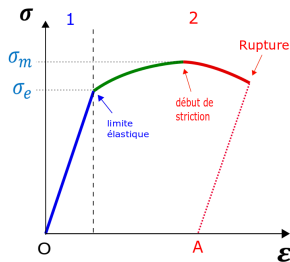
$$\varepsilon(x) = \varepsilon_L = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (22)$$

Caractéristiques

Un essai de traction (relation entre σ et ε_L) permet de distinguer deux grandes zones de déformations :

- $\sigma < \sigma_E$ (zone 1) : domaine **élastique**. Dans cette zone, les déformations sont réversibles, c'est-à-dire qu'elles disparaissent après déchargement.
- $\sigma > \sigma_E$ (zone 2) : domaine **plastique**. Les déformations deviennent irréversibles.

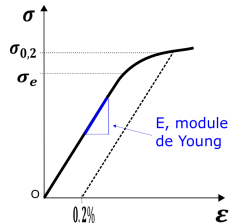
Le domaine plastique se divise en deux sous-régions. D'abord, une zone plastique se situe entre la limite d'élasticité **limite d'élasticité** σ_E et la **limite mécanique de rupture** σ_m , marquant le début de la striction (rétrécissement transversal et localisé sur une partie de la pièce). Ensuite, la striction s'intensifie jusqu'à la rupture du matériau. Après la rupture, le corps est caractérisé par un **allongement à la rupture**, appelé **A**



avec σ_E la limite élastique, σ_m la limite mécanique de rupture et A l'allongement à la rupture.

(cf. cours de SDM)

Comme mentionné précédemment, dans un premier temps, le corps sera soumis à une sollicitation dans son domaine élastique, (c'est-à-dire une déformation réversible, qui disparaît après le déchargement).



Domaine élastique

- Ce domaine élastique est défini par sa limite d'élasticité σ_E , qui représente la contrainte au-delà de laquelle la déformation devient irréversible. Toutefois, dans certains cas, il peut être difficile de mesurer précisément cette limite. C'est pourquoi on définit une limite élastique à 0.2%, notée $\sigma_{0,2}$.
- La relation (ϵ_L, σ) est linéaire dans le domaine élastique. Sa pente permet de déterminer le module de Young E (généralement exprimé en GPa), qui caractérise la rigidité d'un matériau. Cette relation est connue sous le nom de loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \epsilon_L \quad (23)$$

Aspects transversaux

- Cet essai de traction a un impact sur les dimensions transversales de la poutre. En effet, lors de la traction, la conservation de la matière implique qu'un allongement de la dimension longitudinale entraîne une réduction de la dimension transversale (section droite) de la poutre. L'effet inverse se produit en compression.
- On relie la déformation longitudinale ε_L et la déformation transversale ε_T à l'aide **coefficient de Poisson** ν tel que :

$$\nu = \frac{-\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (24)$$

Le coefficient de Poisson est un paramètre positif, dont la valeur varie entre 0 et 0.5 pour des matériaux incompressibles. Par exemple, il se situe entre 0.28 et 0.3 pour les aciers, et atteint 0.34 pour un alliage d'aluminium.

Critère de dimensionnement

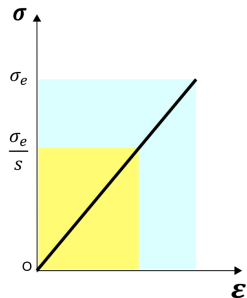
Dans un problème de traction/compression, le dimensionnement consiste à vérifier que la contrainte mécanique subie par le corps (E) est inférieure à la limite d'élasticité σ_E (ou résistance élastique Re), de manière à ce que :

$$\sigma \leq \sigma_E = Re \quad (25)$$

En dimensionnement des structures (DDS), un coefficient de sécurité **coefficient de sécurité** ($s \geq 1$) est fréquemment utilisé. Ce coefficient permet de tenir compte des incertitudes liées au matériau (ex : module de Young E), à la géométrie de la pièce, ainsi qu'aux liaisons et aux charges extérieures. Le **critère de dimensionnement** est alors exprimé par :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_E}{s} = Rpe \quad (26)$$

avec $Rpe = \frac{\sigma_E}{s}$, la résistance pratique élastique.

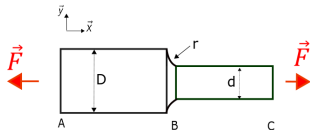


Concentration de contrainte

Les concentrations de contraintes se produisent lorsqu'il y a une discontinuité, comme un changement de section de la poutre ou une charge concentrée. Elles provoquent une augmentation locale des contraintes. Pour en tenir compte, la contrainte normale σ_{xx} est multipliée par un coefficient de concentration **coefficient de concentration** Kt . Ainsi, en présence d'une concentration de contraintes, le critère de dimensionnement en traction/compression devient :

$$Kt_{traction} \cdot \sigma_{xx} = Kt_{traction} \cdot \frac{N}{S} \leq \frac{\sigma_E}{s} = Rpe \quad (27)$$

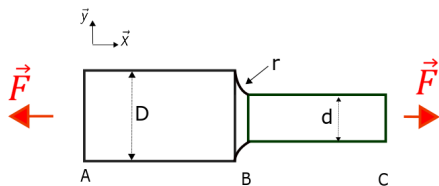
avec N l'effort normal, S la section droite de la poutre, σ_E la limite élastique du matériau, s le coefficient de sécurité.



Traction/compression : exercice

Dans cet exercice, on se propose de déterminer les actions mécaniques intérieures et de vérifier le dimensionnement. Nous allons procéder en trois étapes :

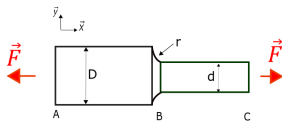
1. Contrainte dans le tronçon]AB[
2. Contrainte dans le tronçon]BC[
3. Contrainte au point B (concentration de contrainte)



Les données du problème sont :

- Grand diamètre : $D=8$ mm
- Petit diamètre : $d=6$ mm
- Rayon du congé : $r=0.6$ mm
- Force : $F= 500$ N
- Limite élastique : $Re=30$ MPa
- Coefficient de sécurité : $s=1.2$

Traction/compression : exercice



1. Contrainte dans le tronçon]AB[:

- On commence par déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon]AB[:

$$\{T_{coh}\}_{G,R} = -\{T_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = -\{T_A\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- On détermine la contrainte normale sur le tronçon]AB[:

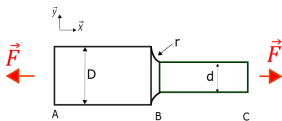
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{AB}} = \frac{F}{\pi \frac{D^2}{4}} = 9.946 \text{ MPa}$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$\sigma_{xx} = 9.946 \text{ MPa} < \frac{\sigma_E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

Ce tronçon est donc bien dimensionné.

Traction/compression : exercice



2. Contrainte dans le tronçon]BC[:

- On commence par déterminer le torseur de cohésion sur le tronçon]BC[:

$$\{T_{coh}\}_{G,R} = \{T_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R} = \{T_C\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

- On détermine la contrainte normale sur le tronçon]BC[:

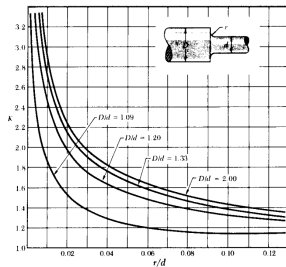
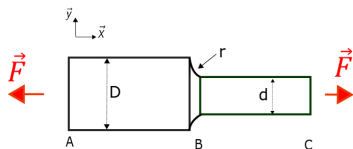
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{BC}} = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} = 17.686 \text{ MPa}$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$\sigma_{xx} = 17.686 \text{ MPa} < \frac{\sigma_E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

Ce tronçon est donc bien dimensionné.

Traction/compression : exercice



3. Contrainte au point B (concentration de contrainte) :

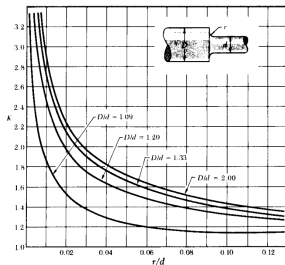
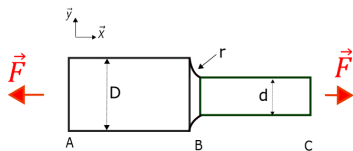
- On commence par la contrainte normale au point B. On considérera la section d car la contrainte y est maximale :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_{BC}} = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} = 17.686 \text{ MPa}$$

- On détermine le coefficient de concentration K :

$$\frac{D}{d} = \frac{8}{6} = 1.33 \text{ et } \frac{r}{d} = \frac{0.6}{6} = 0.1 \Rightarrow K \sim 1.38$$

Traction/compression : exercice



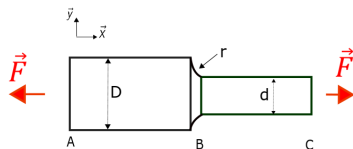
3. Contrainte au point B (concentration de contrainte) :

$$K \sim 1.38$$

- On vérifie le critère de dimensionnement :

$$K \cdot \sigma_{xx} = 1.38 \times 17.686 = 24.406 \text{ MPa} < \frac{\sigma E}{s} = \frac{30}{1.2} = 25 \text{ MPa}$$

La structure est donc bien dimensionnée.



Remarques :

- La pièce est bien dimensionnée.
- On peut observer deux aspects. Tout d'abord, la contrainte augmente avec une diminution de la section ($\sigma_{BC} > \sigma_{AB}$). Ensuite, on constate que la contrainte est maximale au point B (changement de section) qui constitue le point critique de la structure.

Méthodologie

Face à un problème en traction/compression, la démarche a employé pour vérifier le dimensionnement est la suivante :

- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).
- Principe fondamental de la statique (PFS) pour déterminer les inconnues de liaisons.
- Déterminer le torseur de cohésion. Attention, il faut faire autant de coupes fictives que nécessaire (ex : changement de direction, liaisons, charges localisées, etc.).
- Identifier le point le plus sollicité (point critique).
- Vérifier le critère de dimensionnement :

$$\sigma \leq \frac{\sigma E}{s} = Rpe$$

(Ne pas oublier de tenir compte d'un éventuel coefficient de concentration K_t)

Méthodologie

Face à un problème en traction/compression, la démarche a employé pour déterminer les dimensions d'une structure est la suivante :

- Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).
- Principe fondamental de la statique (PFS) pour déterminer les inconnues de liaisons.
- Déterminer le torseur de cohésion. Attention, il faut faire autant de coupes fictives que nécessaire (ex : changement de direction, liaisons, charges localisées, etc.).
- Identifier le point le plus sollicité (point critique).
- Utiliser le critère de dimensionnement, notamment la résistance pratique élastique, pour déterminer les dimensions.

Exemple : pour un section circulaire de diamètre D , on obtient la condition suivante :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_E}{s} = Rpe \Rightarrow \frac{N}{S} \leq Rpe \Rightarrow \frac{N}{\pi \frac{D^2}{4}} \leq Rpe$$

Par conséquent : $D > \sqrt{\frac{4 \cdot N}{Rpe \cdot \pi}}$

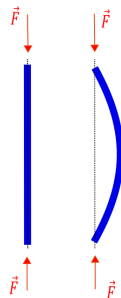
Flambement

On a vu précédemment qu'une structure sollicitée en compression a tendance à se raccourcir. Néanmoins, pour une charge critique, la poutre s'infléchit et se déforme dans sa direction perpendiculaire avant de rompre. Cette valeur critique est appelée : charge de flambement. La charge critique de rupture par flambage est donnée par la formule d'Euler :

La charge critique de rupture par flambage est donnée par la formule d'Euler :

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k} \quad (28)$$

avec F la charge critique, E le module de Young du matériau, I le moment quadratique et L_k la longueur équivalente séparant deux points d'inflexions de la poutre.



Flambement d'un pont © Esprit Génie Civil

Problématique

Le principe fondamental de la statique (PFS) permet de déterminer les conditions d'équilibre d'un système mécanique. Ainsi, en deux dimensions (2D), on obtient trois équations :

- Une équation relative au moment résultant des forces extérieures, qui est également nul.

Le principe fondamental de la statique permet donc de déterminer un maximum de trois inconnues de liaison en deux dimensions (2D) et six en trois dimensions (3D).

Ainsi, avant de tenter de résoudre un système d'inconnues, il est essentiel de faire le bilan des inconnues de liaison et du nombre d'équations disponibles afin de déterminer si le problème est solvable.

Degré d'hyperstatisme

Pour savoir si le problème est solvable, on applique la formule suivante :

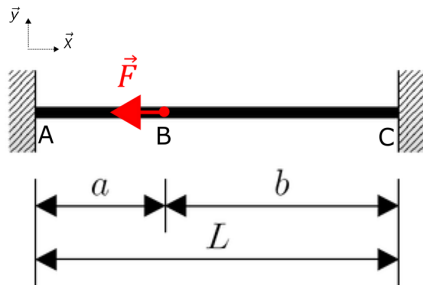
$$h = N_i - N_e \quad (29)$$

où h est le degré d'hyperstatisme, N_i le nombre d'inconnues et N_e le nombre d'équations. On distingue trois cas : où h représente le degré d'hyperstatisme, N_i le nombre d'inconnues et N_e le nombre d'équations. Trois cas peuvent être distingués :

- $h < 0$: Le système est **hypostatique**, c'est-à-dire que le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues, ce qui permet de déterminer toutes les inconnues.
- $h = 0$: Le système est **isostatique**. Dans ce cas, le principe fondamental de la statique permet de résoudre le problème en déterminant l'ensemble des inconnues de liaison.
- $h > 0$: Le système est **hyperstatique**, ce qui signifie qu'il y a plus d'inconnues de liaison que d'équations. Par conséquent, le principe fondamental de la statique ne permet pas de résoudre complètement le système. Une des solutions consiste à obtenir des équations supplémentaires en tenant compte des efforts internes.

Hyperstatisme : exercice

Dans cet exercice, on considère une poutre bi-encastée.



1. Réaliser une schématisation et appliquer le principe fondamental de la statique.
2. Calculer le nombre d'équations et d'inconnues de liaison.
3. Déterminer le degré d'hyperstatisme.
4. Suggérer une solution.

Définition

Un treillis (ou structure à barres) est un système triangulé défini par les éléments et hypothèses suivants :

- Les lignes médianes des barres sont supposées être situées dans un même plan et se rencontrer en des points communs, appelés "nœuds".
- Chaque nœud est considéré comme une rotule idéale (sans frottement). Les nœuds sont ainsi dits articulés ou rotulés.
- Les efforts mécaniques extérieurs sont toujours appliqués de manière ponctuelle aux nœuds, et non sur les barres elles-mêmes.
- Les barres subissent, à leurs extrémités (nœuds), deux actions mécaniques de même intensité, dans la même direction mais de sens opposé. Elles sont ainsi soumises à un effort normal (N), pouvant être en traction ou en compression.
- Le poids des barres est considéré comme négligeable.



Pont en treillis © Eugenio Merzagora

Un treillis peut être isostatique ou hyperstatique.

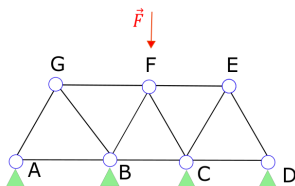
Degré d'hyperstatisme

Pour calculer le degré d'hyperstaticité des systèmes en treillis, on applique la formule suivante :

$$h = b + r - 2n \quad (30)$$

où h représente le degré d'hyperstaticité, b le nombre de barres, r le nombre de réactions et n le nombre de nœuds.

Exercice : déterminer le degrés d'hyperstatisme de ce treillis.



Les treillis sont des structures largement utilisées dans l'industrie, notamment dans le secteur de la construction et des transports (comme les fuselages d'avion). Leur principal avantage réside dans leur capacité à offrir des structures légères tout en garantissant une grande rigidité et une excellente résistance aux efforts extérieurs.

Dans la littérature, plusieurs méthodes permettent de résoudre les efforts internes des barres. Parmi celles-ci, on peut notamment citer :

- la méthode graphique de Cremona.
- la méthode des nœuds.
- la méthode des sections de Ritter.

Dans ce module, nous utiliserons la **méthode des sections de Ritter**. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer les efforts internes d'une barre spécifique sans nécessiter l'examen de tous les nœuds.



Pont en treillis © Eugenio Merzagora

Définition

La méthode de Ritter (ou méthode des sections) est une méthode analytique utilisée pour calculer les efforts internes dans les barres d'un treillis. Elle se présente de la manière suivante :

- Il est essentiel de déterminer les efforts mécaniques externes (PFS) lors de cette première étape, car la méthode repose sur la connaissance des efforts externes, tels que les réactions d'appui et les forces externes appliquées sur les nœuds.
- Réaliser une coupe fictive du treillis en sectionnant trois barres, dont deux sont jointes par un nœud.
- Analyser l'équilibre mécanique statique de cette portion isolée afin de déterminer les efforts internes inconnus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \\ \sum \mathcal{M} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (31)$$

Méthode de Ritter - Exemple

Le treillis représenté sur la figure 1 est soumis à une force $\vec{F} = F\vec{y}$ en B et des réactions d'appui $\vec{R}_A = 0.75 \cdot F \vec{y}$ en A et $\vec{R}_E = 0.25 \cdot F \vec{y}$ en E. Les barres sont de longueur L et sont articulés avec un angle $\alpha = 60^\circ$. Dans ce problème, l'objectif est de déterminer les efforts internes dans les poutres 4, 5 et 6.

- $\sum \vec{F}_y = \vec{0}$

$$-F + N_5 \sin(\alpha) + Y_A = 0 \rightarrow N_5 = 0.29 \cdot F \text{ (Traction)}$$

- $\sum \mathcal{M}_D = \vec{0}$

$$\vec{DA} \wedge \vec{R}_A + \vec{DB} \wedge \vec{F} + \vec{DG}_4 \wedge \vec{N}_4 + \vec{DG}_5 \wedge \vec{N}_5 + \vec{DG}_6 \wedge \vec{N}_6 = \vec{0}$$

$$\rightarrow N_6 = 0.14 \cdot F \text{ (Traction)}$$

- $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$

$$N_4 + N_5 \cos(\alpha) + N_6 = 0$$

$$\rightarrow N_4 = -0.29 \cdot F \text{ (Compression)}$$

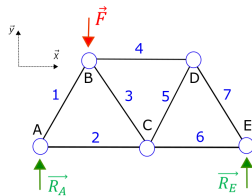


Figure 1 : Treillis

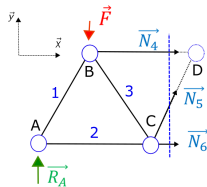


Figure 2 : Coupe du treillis pour appliquer la méthode de Ritter

Chapitre 5

Cisaillement

PLAN

Chapitre 5

Objectifs :

- Analyser un problème soumis à des efforts tranchants (cisaillement) et en déterminer les dimensions. Analyser un problème soumis à des efforts tranchants (cisaillement) et en déterminer les dimensions.
- Calculer les contraintes tangentielles au niveau de la section de la poutre.

Contenu :

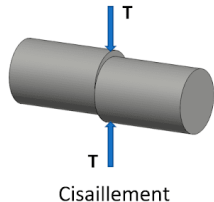
- Caractéristiques du cisaillement.
- Critères de dimensionnement en cisaillement..

Définition

Un corps est soumis à des efforts tranchants (cisaillement) lorsqu'il est exposé à deux forces égales, de même direction, mais de sens opposés, agissant de manière à provoquer le glissement d'une partie (E_1) par rapport à une autre (E_2). Le torseur de cohésion est exprimé par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

avec T_y l'effort tranchant suivant l'axe \vec{y} et T_z celui suivant l'axe \vec{z} .



Contrainte mécanique lié à des efforts tranchants (cisaillement)

En cisaillement simple, un corps (E) soumis à un effort tranchant T engendre une contrainte tangentielle τ . La contrainte tangentielle τ_{xy} (ou τ_{xz}) s'applique dans le plan de la section, dans la direction \vec{y} (ou \vec{z}), et est exprimée par :

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad \left(\text{ou } \tau_{xz} = \frac{T_z}{S} \right)$$

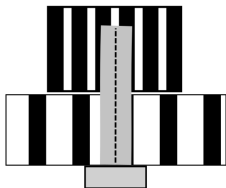
Avec S représentant la section droite soumise au cisaillement, la contrainte tangentielle correspond à une moyenne calculée sur cette section. C'est pourquoi on parle fréquemment de contrainte moyenne, notée τ_{moy} ou τ_M .

Essai de cisaillement

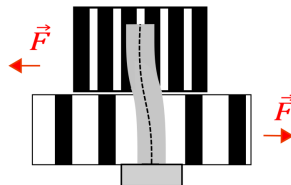
Un essai de cisaillement pur ne peut pas être réalisé physiquement, car le cisaillement simple n'affecte pas l'ensemble de la poutre, mais uniquement une de ses sections. Cependant, nous analyserons un exemple dans la suite qui permettra d'illustrer les effets du cisaillement.

Exemple de cisaillement : rivet

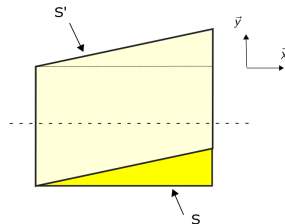
Rivet



Rivet soumis à du cisaillement

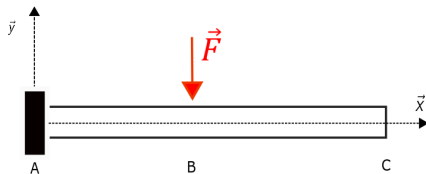


En zoomant sur un rectangle infinitésimal le long de la poutre, on constate qu'il subit un **glissement transversal** dû au cisaillement. Ce glissement est proportionnel à l'effort de cisaillement.



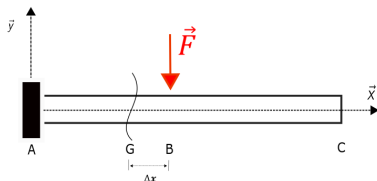
Cisaillement - exercice

Dans cet exercice, on se propose de déterminer le torseur de cohésion de la poutre]ABC[.



Cisaillement - exercice

Dans cet exercice, on se propose de déterminer le torseur de cohésion de la poutre]ABC[.

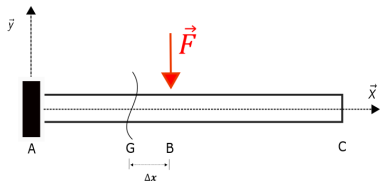


Le torseur de cohésion sur le tronçon]AB[:

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G_1, R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}_{G_1, R_1}$$

Le torseur de cohésion sur le tronçon]BC[:

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G_2, R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2, R_2}$$



Le torseur de cohésion sur le tronçon]AB[:

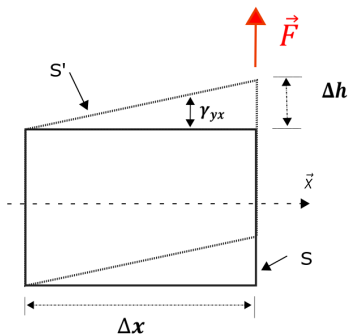
$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Si $\Delta x \ll 1$ alors, le moment fléchissant ($M_{fz} = -F \cdot \Delta x$) est négligeable par rapport au cisaillement lié à l'effort tranchant ($T_y = -F$).

On ne considère que le cisaillement.

Déformation de cisaillement ou angle de distorsion/glisement

Glissement transversal



Angle de distorsion

Lors d'un cisaillement, le corps subit une déformation de cisaillement, également appelée angle de glissement ou angle de distorsion γ (en radians). Cet angle est défini géométriquement par :

$$\tan \gamma_{yx} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (32)$$

avec Δh représentant le glissement transversal (en mètres) et Δx la distance (en mètres), si l'angle de distorsion γ est très faible, l'équation (32) devient :

$$\gamma_{yx} = \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

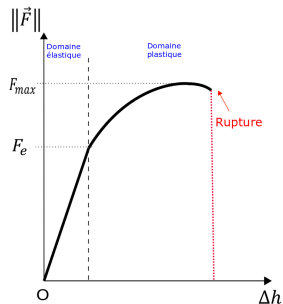
Essai de cisaillement

Bien qu'un essai de cisaillement pur ne soit pas réalisable physiquement, il est possible d'étudier le comportement du matériau lorsque le moment fléchissant est négligeable (comme dans l'exemple précédent). Dans ce cadre, le corps étudié est soumis à une force F de cisaillement (effort tranchant) et on mesure la relation entre l'effort tranchant et le glissement transversal Δh .

On observe deux zones distinctes (élastique et plastique). La frontière entre ces deux zones correspond à la force limite élastique au cisaillement F_e . À partir de cette force, on définit la résistance élastique au glissement R_{eg} (également appelée résistance au cisaillement τ_E) par :

$$R_{eg} = \tau_E = \frac{F_e}{S} \quad (33)$$

avec S la surface de la section droite.



Module de Coulomb

Dans le domaine élastique, la relation (τ, γ) est linéaire et définie par :

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma \text{ avec } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (34)$$

avec τ_{moy} la contrainte tangentielle moyenne dans la section droite, G le module de Coulomb ou module de cisaillement, E le module de Young et ν le coefficient de poisson.

Critère de résistance en cisaillement

Le critère de dimensionnement est donné par :

$$\tau_{moy} \leq R_{pg} \text{ avec } R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} \quad (35)$$

avec R_{pg} la résistance pratique au glissement (ou au cisaillement), τ_{moy} la contrainte tangentielle moyenne, R_{eg} la résistance élastique au glissement et s le coefficient de sécurité.

Chapitre 6

Synthèse

Bases de la DDS

Théorie des poutres (1D) : Une poutre est un élément caractérisé par une ligne, appelée fibre moyenne ou neutre, qui présente une courbure faible par rapport à la longueur de la pièce, ainsi qu'une section perpendiculaire à cette fibre, qui varie lentement en fonction de la longueur de la poutre. Cette section est appelée section droite. De plus, la dimension longitudinale de la poutre est au moins cinq fois plus grande que ses autres dimensions transversales.

- **Hypothèses de la DDS :**

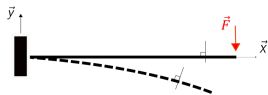
- Un matériau est dit « homogène » s'il possède les mêmes propriétés mécaniques et thermiques en tout point.
- Un matériau est dit « isotrope » si ses propriétés mécaniques et thermiques sont identiques dans toutes les directions.
- Un matériau est dit « élastique linéaire » s'il retrouve sa forme initiale après avoir subi un cycle de charge/décharge. Cette propriété implique que le matériau ne se déforme pas ou très peu.

Bases du dimensionnement des structures

Les hypothèses fondamentales du dimensionnement des structures (DDS) sont :

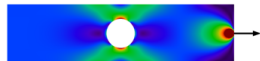
Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections droites planes restent droites et planes après déformation.



Principe de Saint-Venant

Les résultats obtenus lors du dimensionnement des structures ne sont valides qu'à une distance suffisamment éloignée de la zone d'application des efforts concentrés (zone de singularité).



Hypothèse des petites déformations (HPP)

Le solide est soumis à de petits déplacements (1/100 de la longueur de la fibre moyenne) et de petites déformations.

Définition

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique exercée par une partie de la poutre (E_2 , aval) sur une autre partie (E_1 , amont), de part et d'autre d'une coupure fictive. Il permet de décrire les actions internes de la poutre. Ce torseur est exprimé au point G, dans le repère local de la poutre étudiée.

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{int}\}_{G,R} = -\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_1}\}_{G,R} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R}$$

Attention : Lors de l'analyse des actions internes d'une poutre, il est nécessaire de réaliser des coupes fictives dès que l'une des situations suivantes se présente :

- une discontinuité liée à la présence d'actions mécaniques concentrées (efforts ou moments mécaniques extérieurs, liaisons mécaniques (pivot, rotule, appui-plan), etc.)
- une discontinuité géométrique (changement de direction de la ligne moyenne).

Le **torseur de cohésion** est donné par :

$$\{\tau_{coh}\}_{G,R} = \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Avec N_x effort normal suivant l'axe \vec{x} , T_y et T_z efforts tranchants respectivement suivant les axes \vec{y} et \vec{z} ; M_{tx} moment de torsion suivant l'axe \vec{x} , M_{fy} et M_{fz} moments fléchissants suivant les axes \vec{y} et \vec{z} .

Les **diagrammes des sollicitations** permettent de visualiser graphiquement les points ou les zones de la poutre les plus sollicités (valeurs les plus élevées) en vue du dimensionnement des structures.

Relation entre contraintes mécaniques et torseur de cohésion

En théorie des poutres, le torseur de cohésion est relié aux contraintes mécaniques par :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_{G,R} = \left\{ \begin{array}{cc} \iint_{(S)} \sigma_{xx} \cdot dS & \iint_{(S)} (y \cdot \tau_{xz} - z \cdot \tau_{xy}) \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xy} \cdot dS & \iint_{(S)} z \sigma_{xx} \cdot dS \\ \iint_{(S)} \tau_{xz} \cdot dS & - \iint_{(S)} y \sigma_{xx} \cdot dS \end{array} \right\}_{G,R}$$

Contrainte normale :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Déformations :

- Déformation longitudinale :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

- Déformation transversale :

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta d}{d_0}$$

- Déformation-déplacement :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

Loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_L$$

avec E , le module de Young.

Coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{-\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

Critère de dimensionnement :

$$\sigma < R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

Contrainte tangentielle :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Déformation de cisaillement / angle de distorsion / angle de glissement :

$$\tan \gamma = \frac{\Delta h}{\Delta x}$$

Relation contrainte tangentielle - distorsion

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma$$

avec G **module de Coulomb** ou de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Critère de dimensionnement :

$$\tau_{moy} \leq \frac{R_{eg}}{s} = R_{pg}$$

Grandeurs physiques	Symbole	Unité
Longueur	L	mètre (m)
Surface	S	mètre ² (m^2)
Force/action mécanique	F	Newton (N)
Moment d'une force	M	Newton · mètre (Nm)
Déplacement	u	mètre (m)
Déformation	ε	sans unité
Coefficient de Poisson	ν	sans unité
Glissement transversal	Δh	mètre (m)
Distorsion	γ	radian (rad)
Contraintes mécaniques	σ	Pascal (Pa) souvent exprimé en MPa
Module de Young	E	Pascal (Pa) souvent exprimé en GPa
Module de Coulomb	G	Pascal (Pa) souvent exprimé en GPa