Espérance et variance

Licence Sciences pour la Santé

Intervenant : Mathieu Fauvernier

Espérance d'une variable aléatoire

L'espérance d'une variable aléatoire correspond à sa valeur moyenne

- <u>Cas discret</u>

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$

- <u>Cas continu</u>

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Variance d'une variable aléatoire

La variance d'une variable aléatoire mesure la dispersion autour de la moyenne

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

- <u>Cas discret</u>

$E[X^2] = \sum_{i=1}^{+\infty} {x_i}^2 P(X = x_i)$ et $\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

- <u>Cas continu</u>

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ et $\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$

Espérance et variance

L'espérance est un **paramètre de position**

La variance est un **paramètre de dispersion** autour de l'espérance

Dans la suite nous allons tenter d'illustrer ces deux concepts à l'aide de graphiques et de calcul intégral.

Rappels sur le calcul intégral

- Intégrale d'une constante sur un segment : $\forall a, b, C \in \mathbb{R}, \int_a^b C \mathrm{d}x = C(b-a)$.
- Intégrale d'un monôme sur un segment : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \geq 2, \int_a^b x^n \mathrm{d}x = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.
- Intégrale de la fonction exponentielle sur un segment : $\forall a, b, \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}$
- Intégrale de la fonction inverse sur un segment : $\forall a, b, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \int_a^b \frac{1}{\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{log(\alpha b) - log(\alpha a)}{\alpha}$

Exemple loi uniforme discrète

Soit la variable $X \in \{0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9\}$ avec

$$P(X = x) = 1/10$$

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

Exemple loi uniforme discrète

Soit la variable $X \in \{0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9\}$ avec

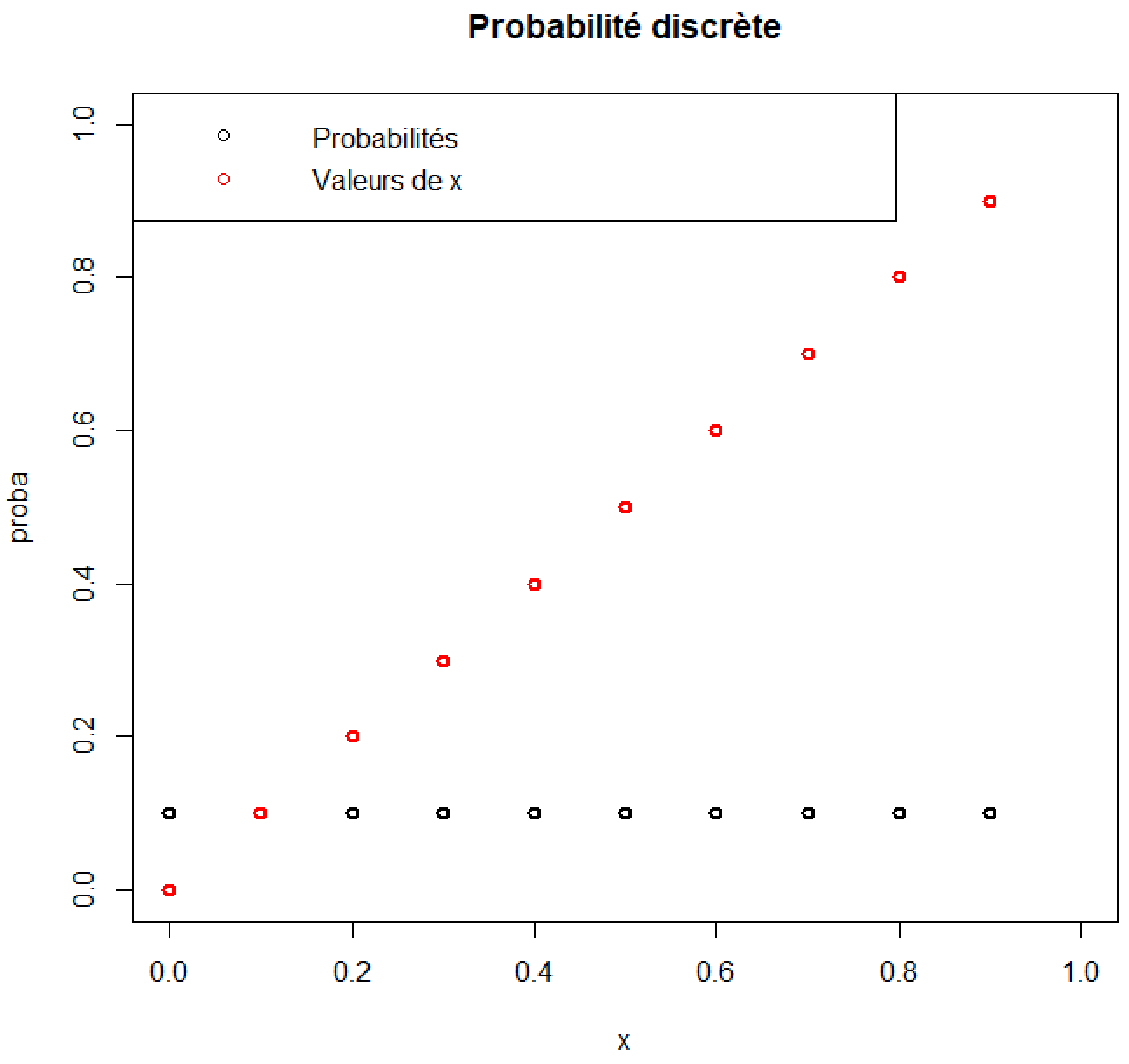
$$P(X = x) = 1/10$$

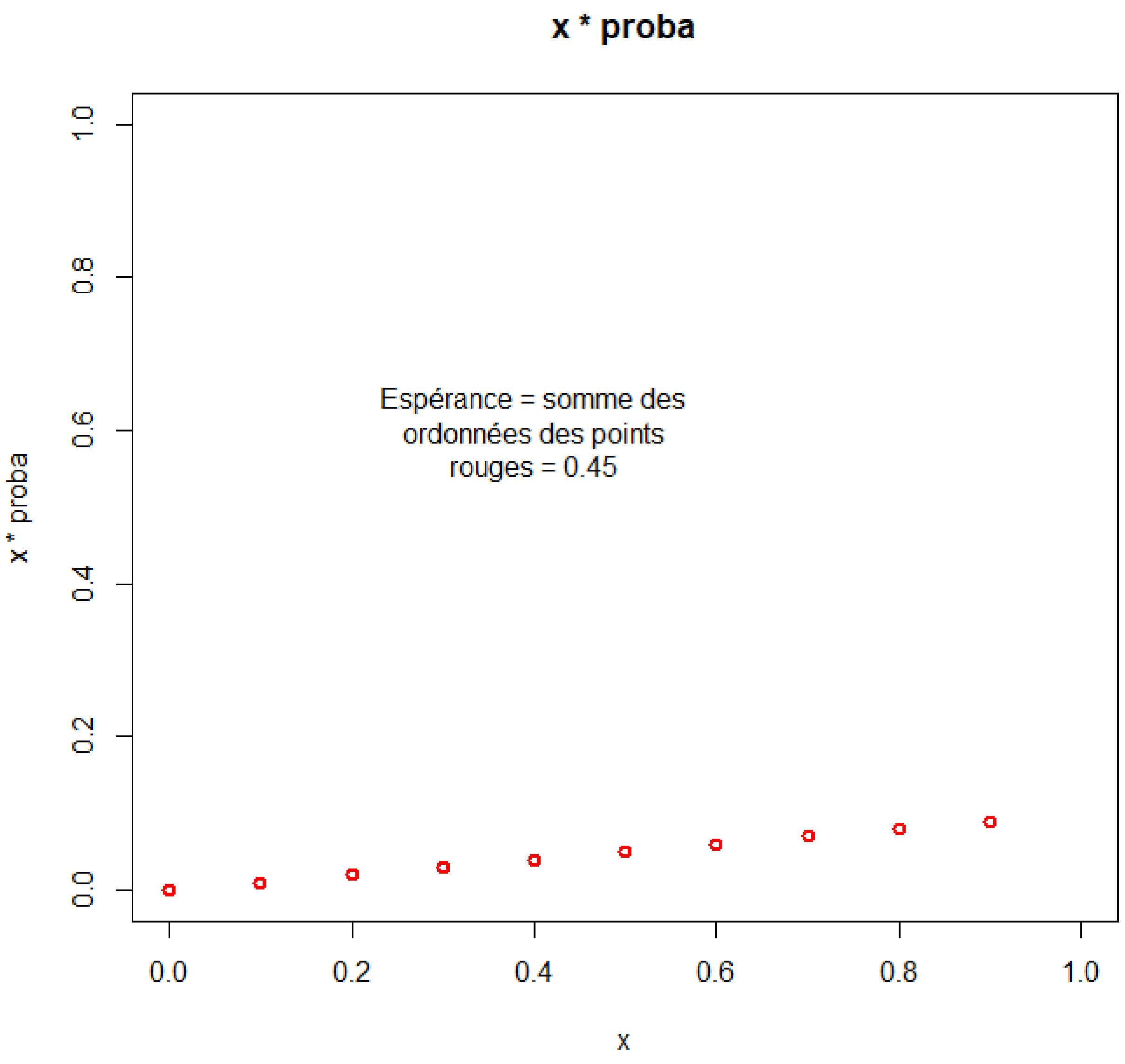
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{10} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{10}(0{,}1 + 0{,}2 + \cdots + 0{,}9) = 0{,}45$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 P(X = x_i) = \frac{1}{10}(0{,}1^2 + 0{,}2^2 + \cdots + 0{,}9^2) = 0{,}285$$

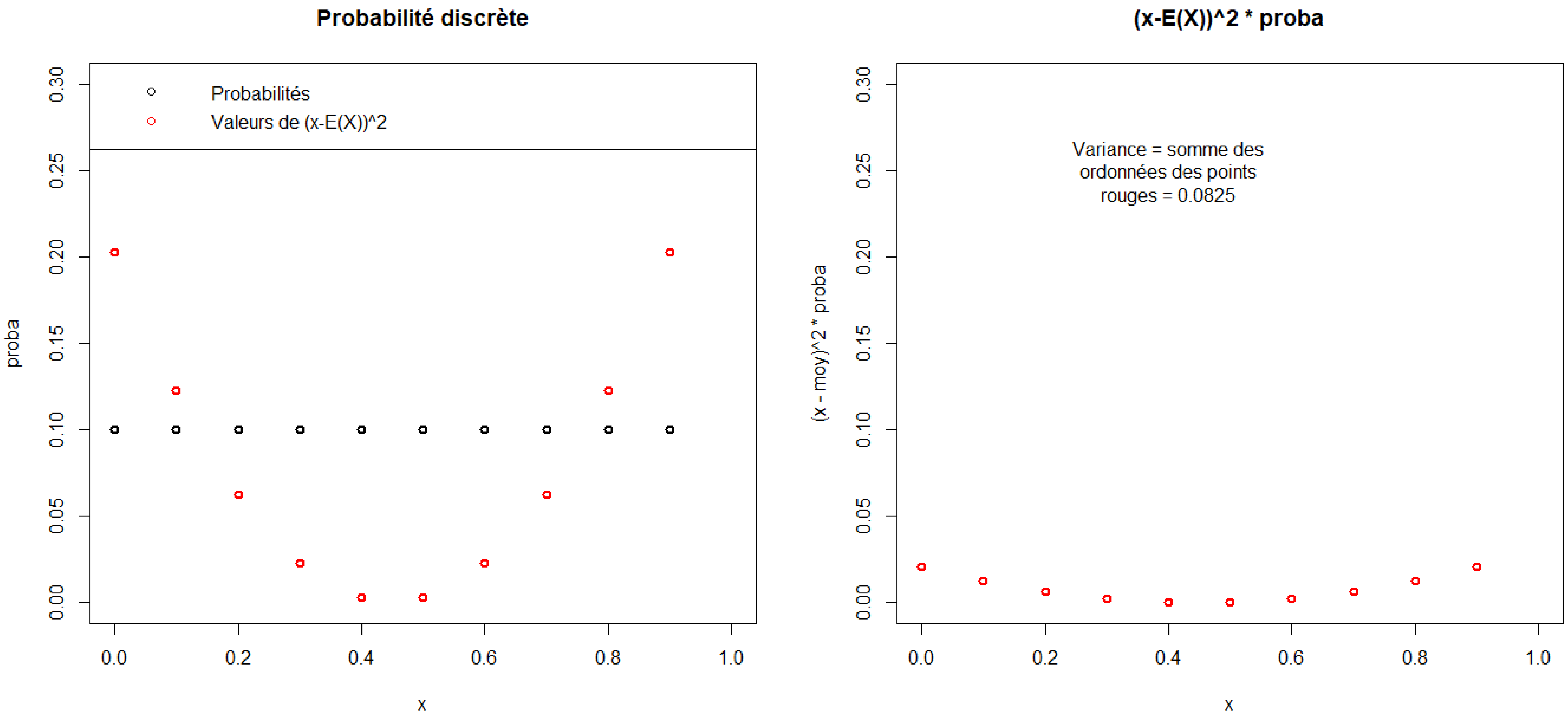
$$\mathrm{Var}(X) = 0{,}285 - 0{,}45^2 = 0{,}0825$$

Exemple loi uniforme discrète : espérance

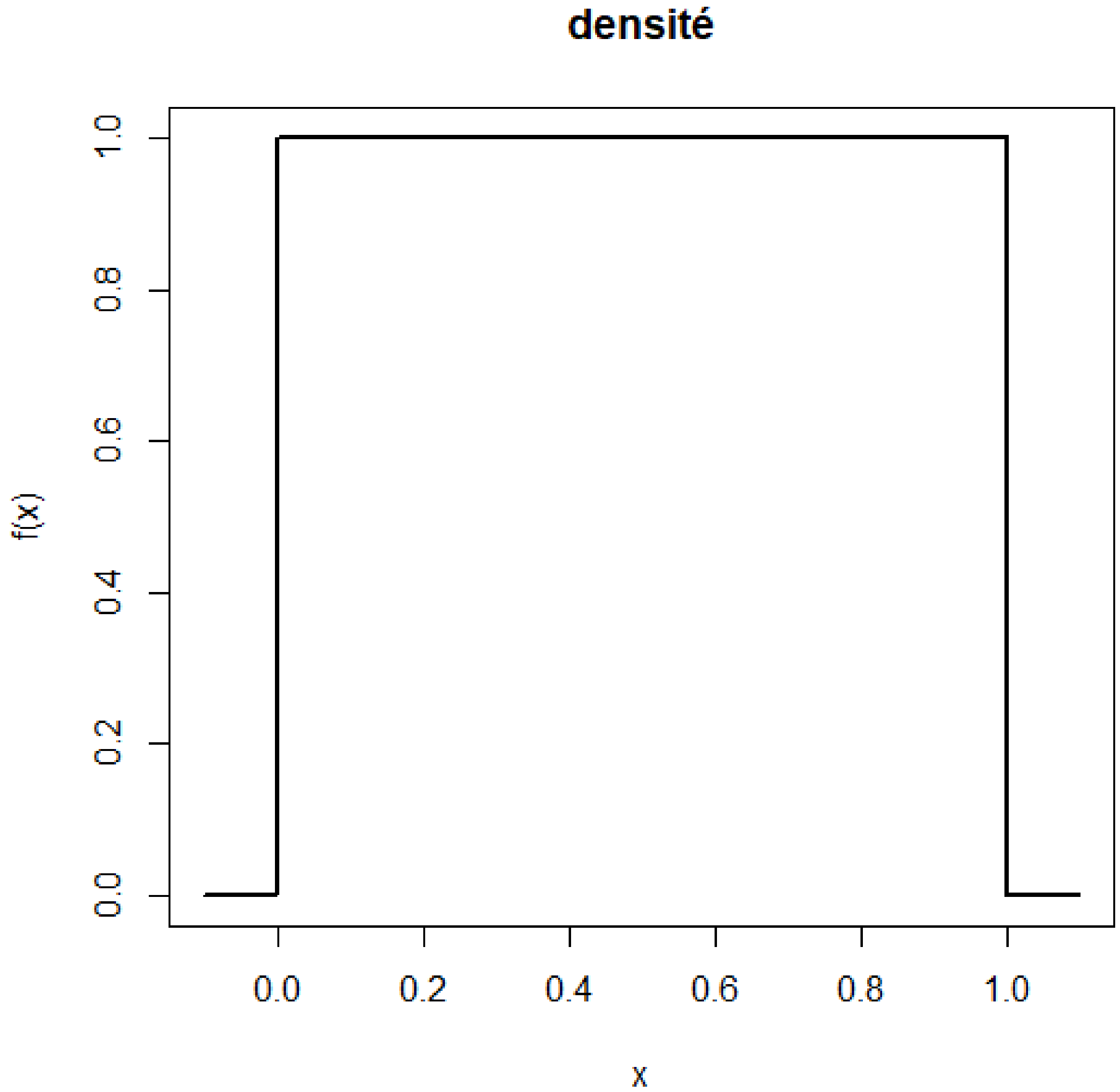




Exemple loi uniforme discrète : variance



Exemple loi uniforme sur [0;1]



Exemple loi uniforme sur [0;1]

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in [0;1] \\ 0, \qquad sinon \end{cases}$$

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

Exemple loi uniforme sur [0;1]

La densité s’écrit

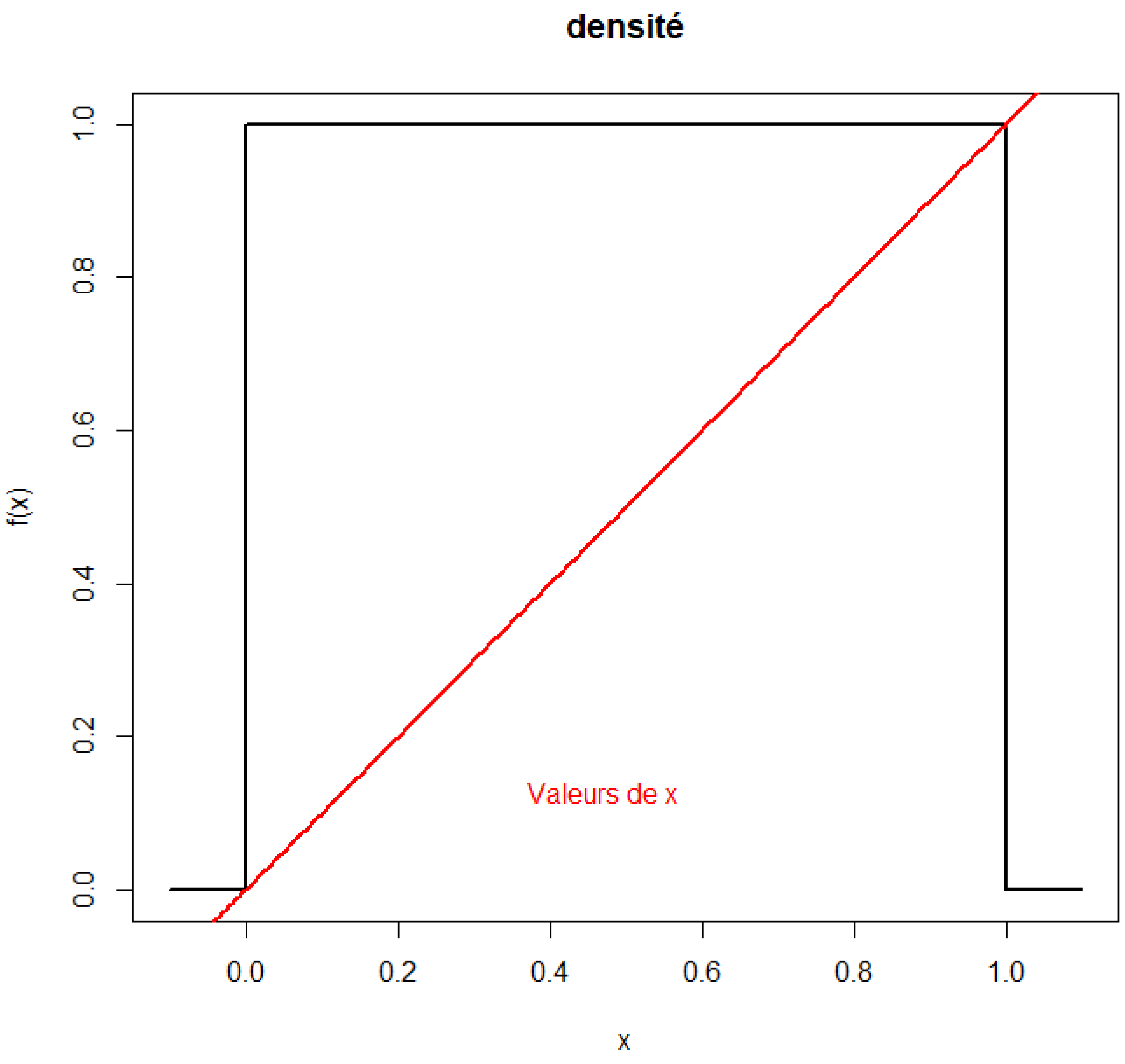
$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in [0; 1] \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

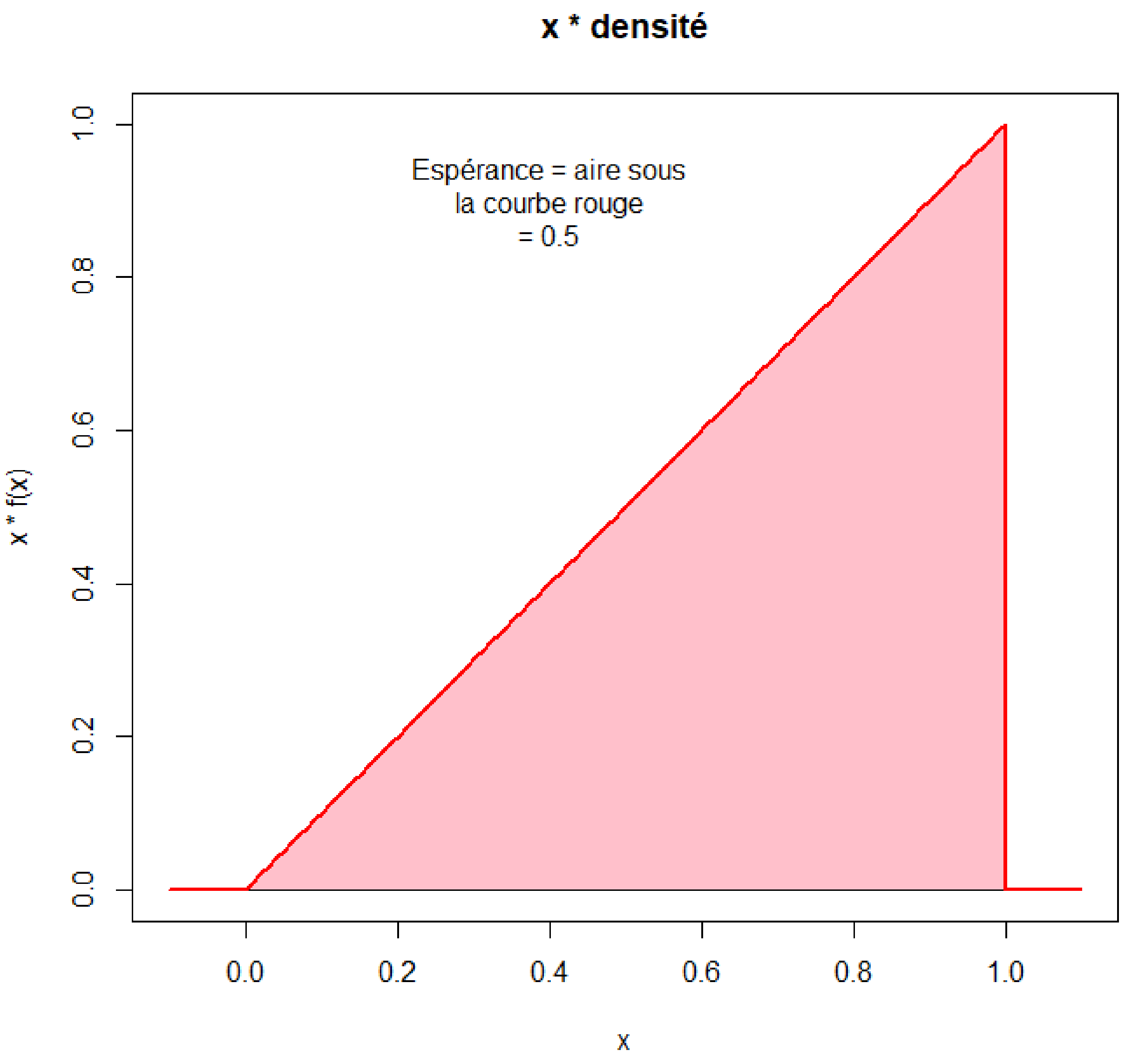
$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

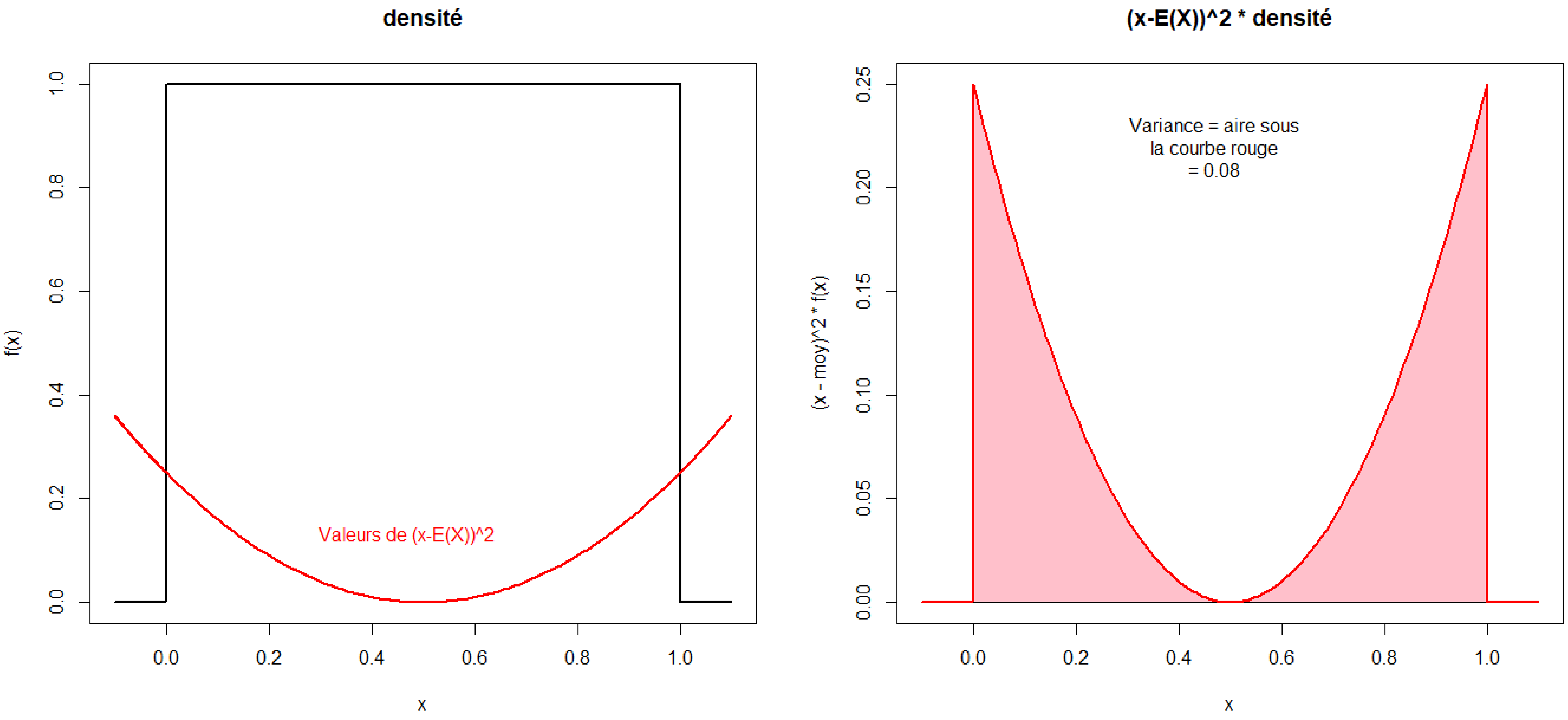
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Exemple loi uniforme : espérance

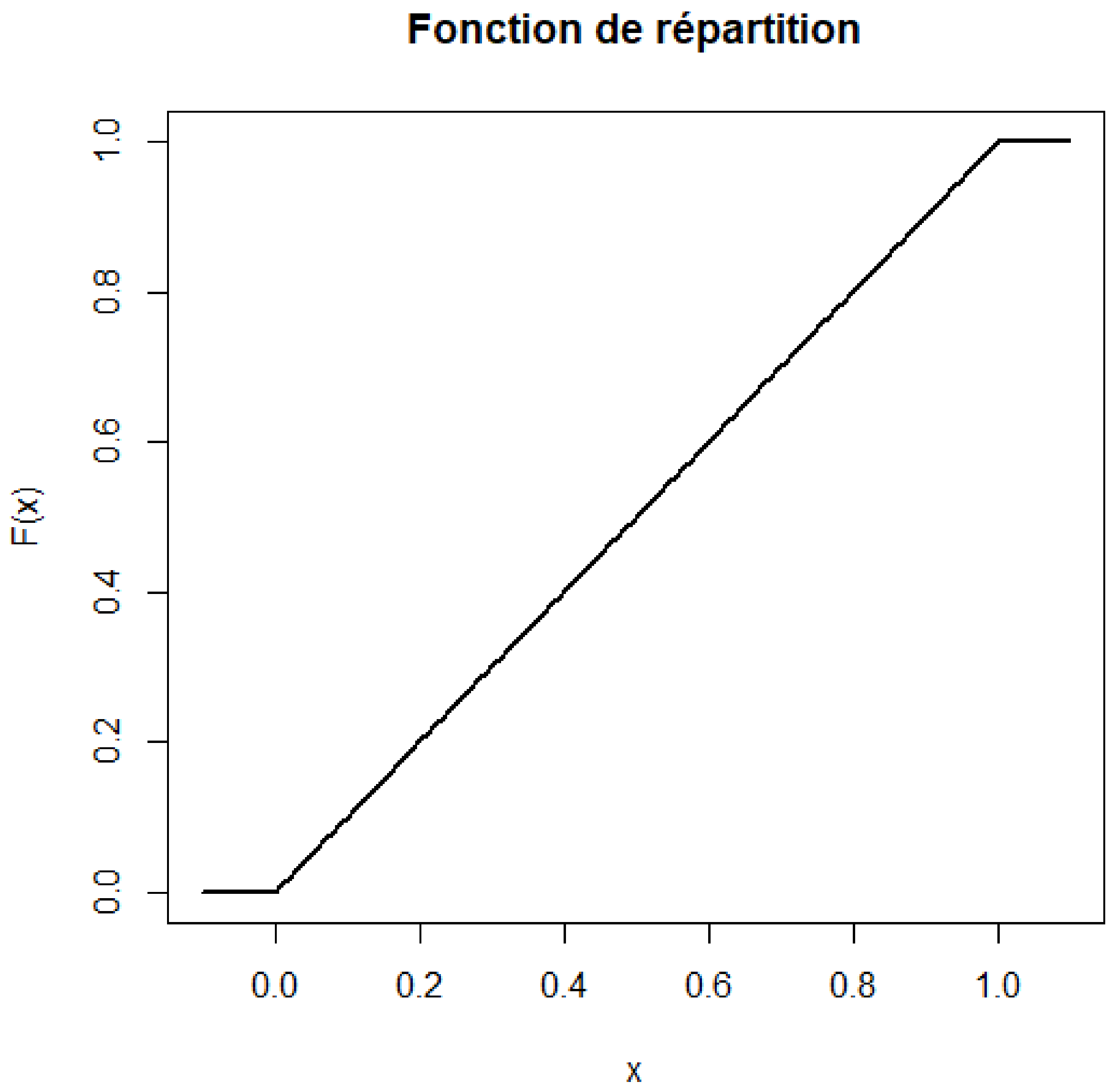




Exemple loi uniforme : variance



Exemple loi uniforme sur [0;1]



Exemple loi uniforme sur [0;1]

La fonction de répartition s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} x, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

Calculer $\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0{,}5)$

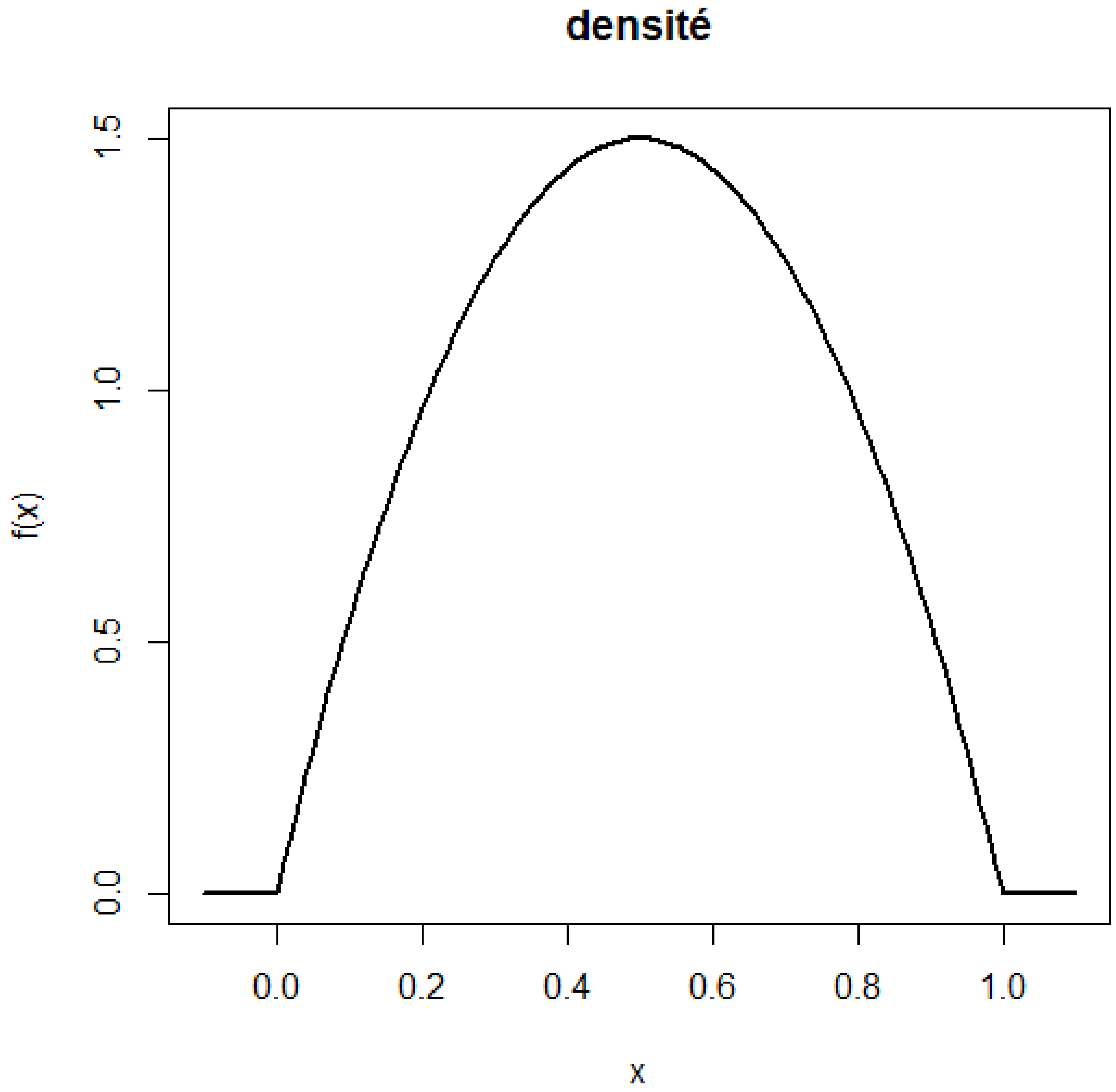
Exemple loi uniforme sur [0;1]

La fonction de répartition s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} x, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)dx = F(0{,}5) - F(0) = 0{,}5$$

Exemple loi symétrique sur [0;1]



Exemple loi symétrique sur [0;1]

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 6x^2, si\ x \in [0;1] \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

Vérifier que f est bien une densité

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

Exemple loi symétrique sur [0;1]

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 6x^2, si\ x \in [0;1] \\ 0, \qquad sinon \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 6x - 6x^2 dx = \int_0^1 6xdx - \int_0^1 6x^2 dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1$$

f est bien une densité

Exemple loi symétrique sur [0;1]

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 6x^2, si\ x \in [0;1] \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 6x^2 - 6x^3dx = \int_0^1 6x^2dx - \int_0^1 6x^3dx$$

$$\mathrm{E}(X) = 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Exemple loi symétrique sur [0;1]

La densité s'écrit

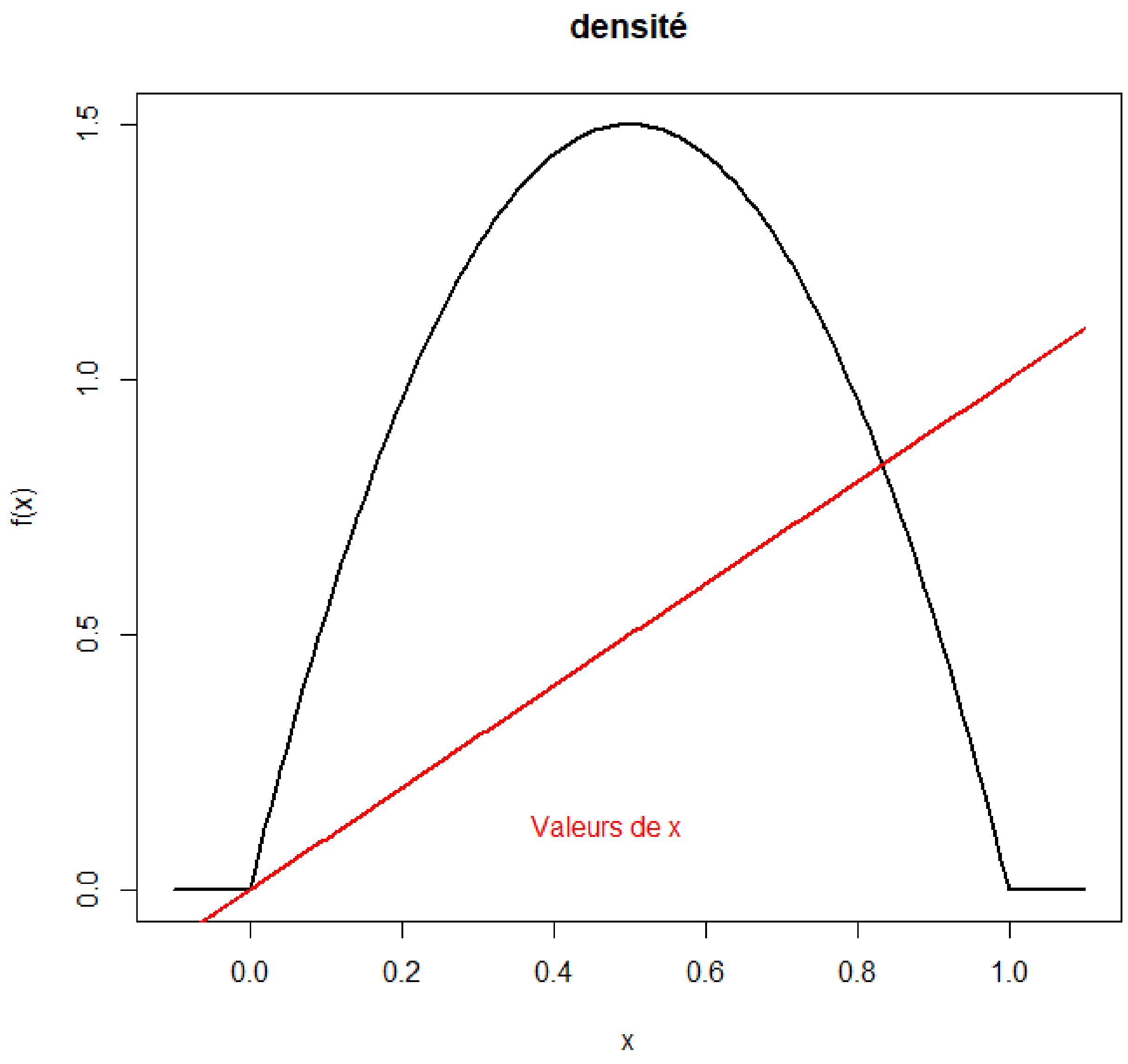
$$f(x) = \begin{cases} 6x - 6x^2, si\ x \in [0;1] \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

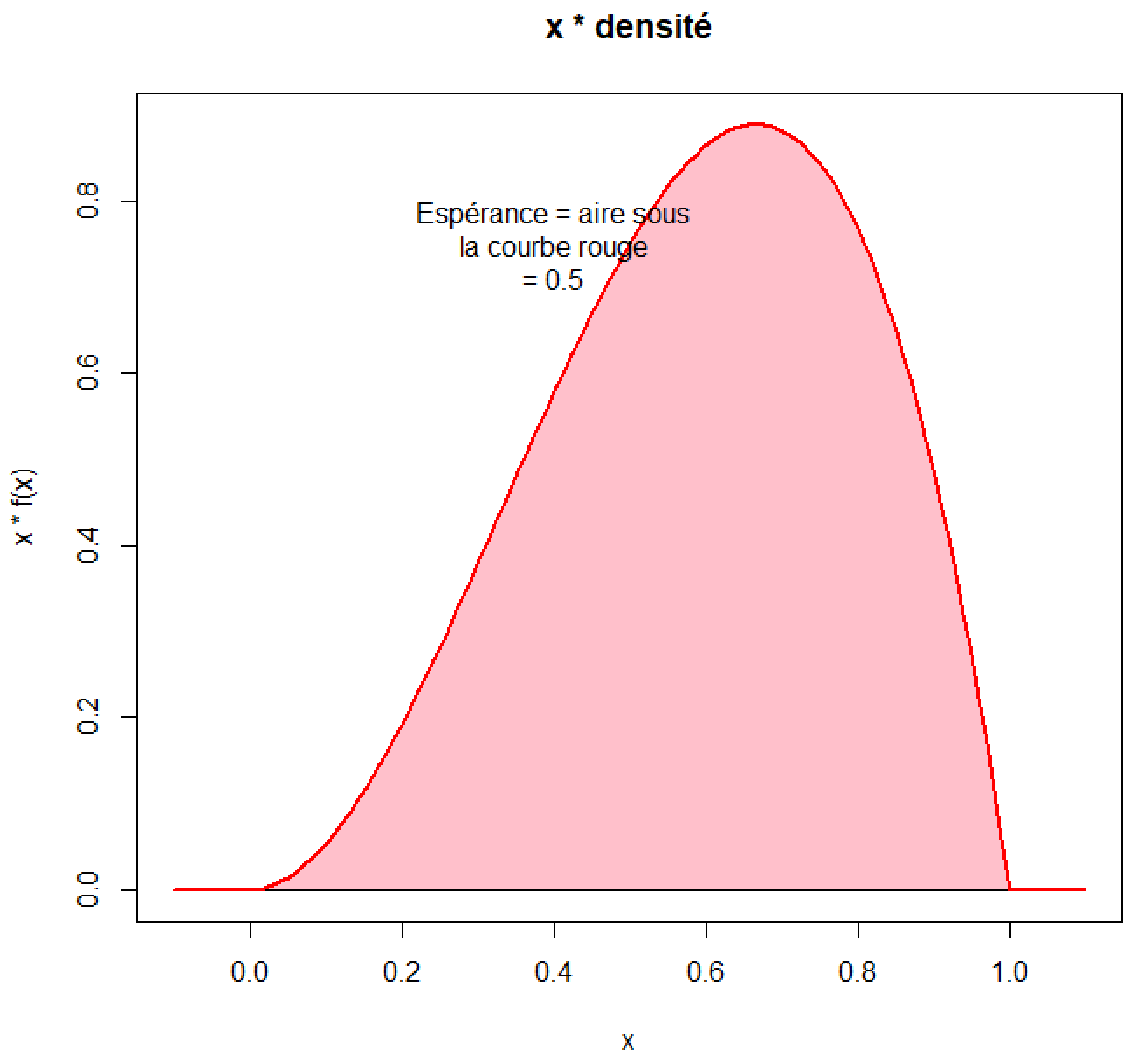
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 6x^3 - 6x^4 dx = \int_0^1 6x^3 dx - \int_0^1 6x^4 dx$$

$$\mathrm{E}(X^2) = 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

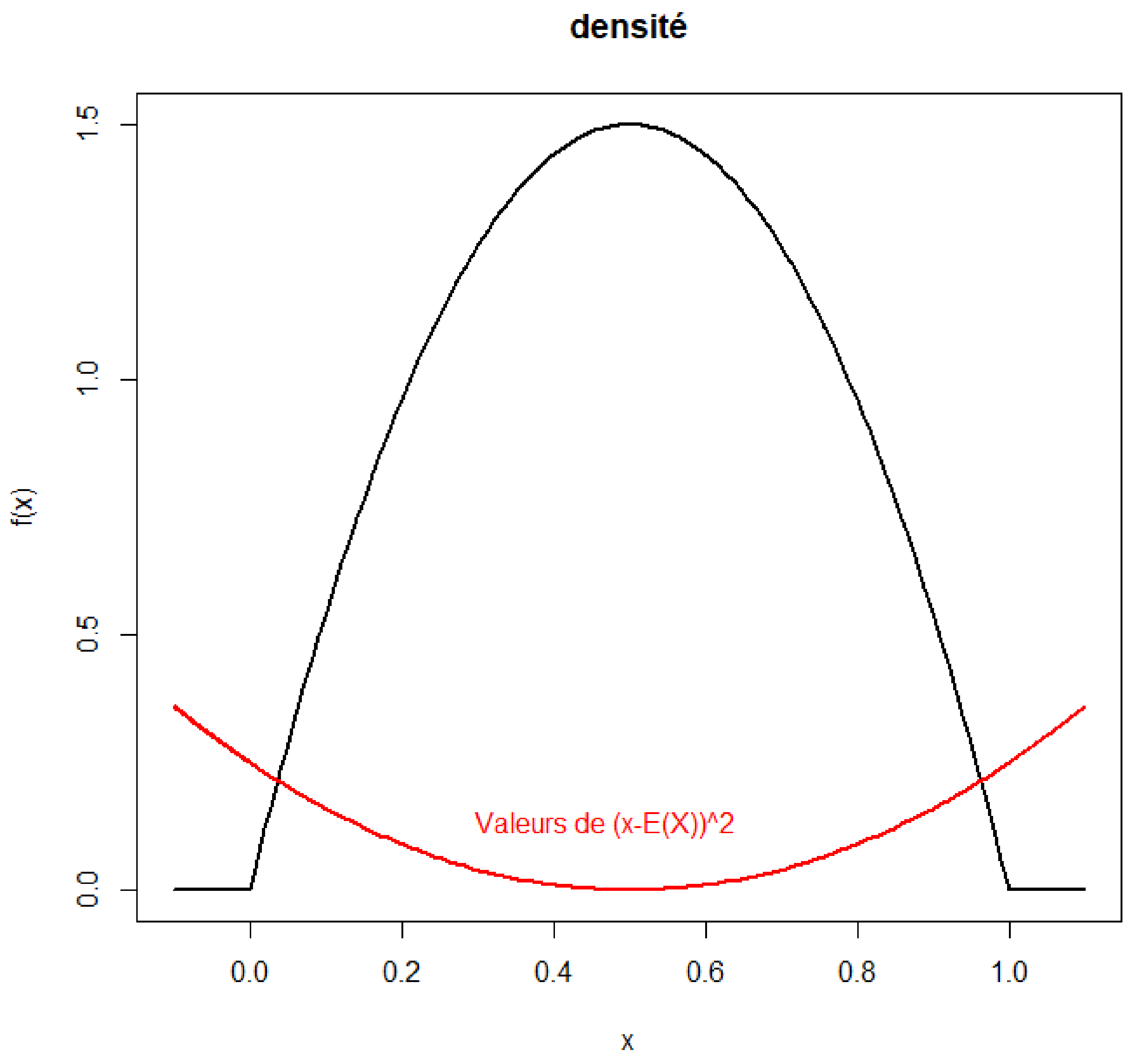
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6}{20} - \frac{5}{20} = \frac{1}{20}$$

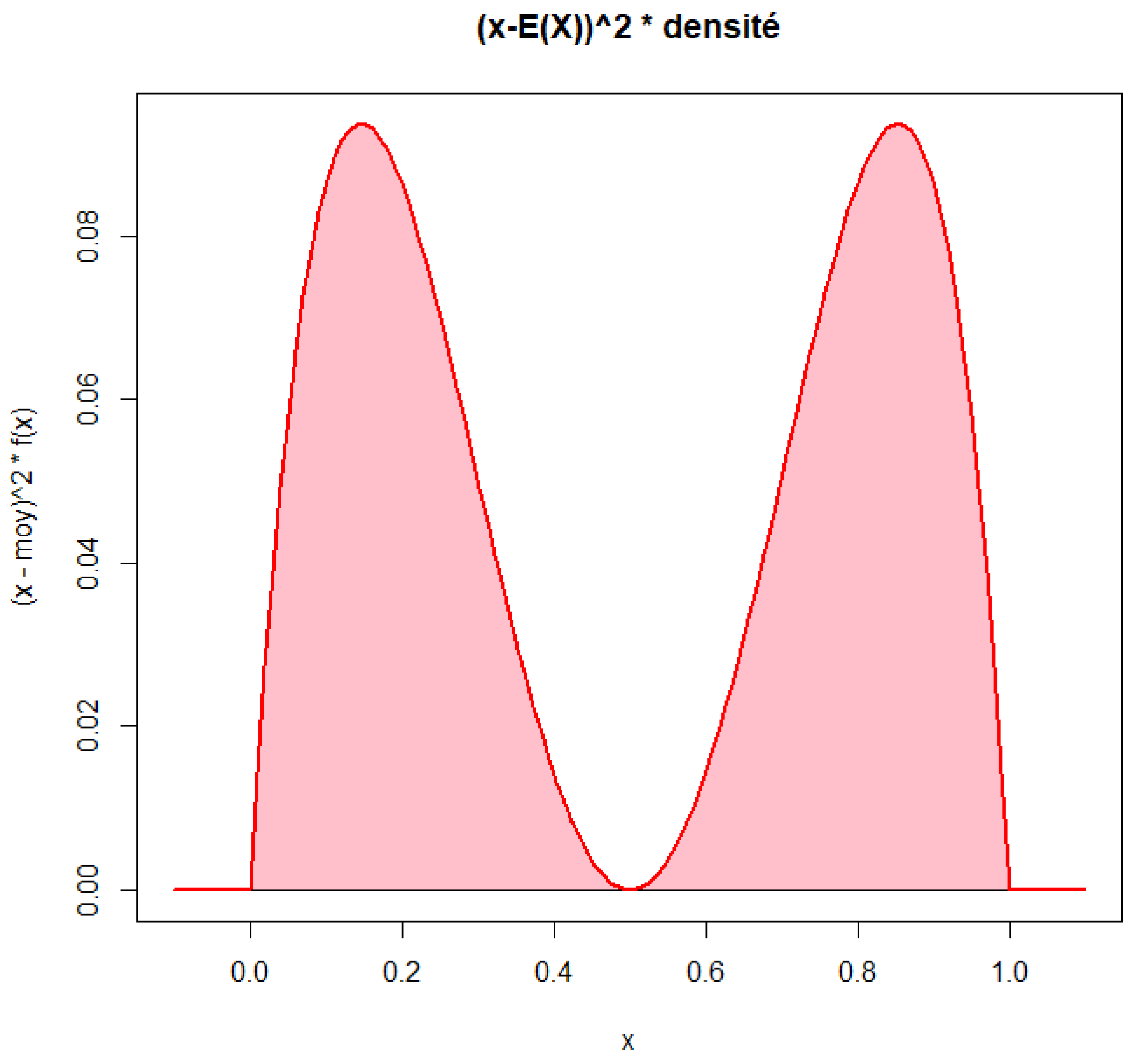
Exemple loi symétrique : espérance



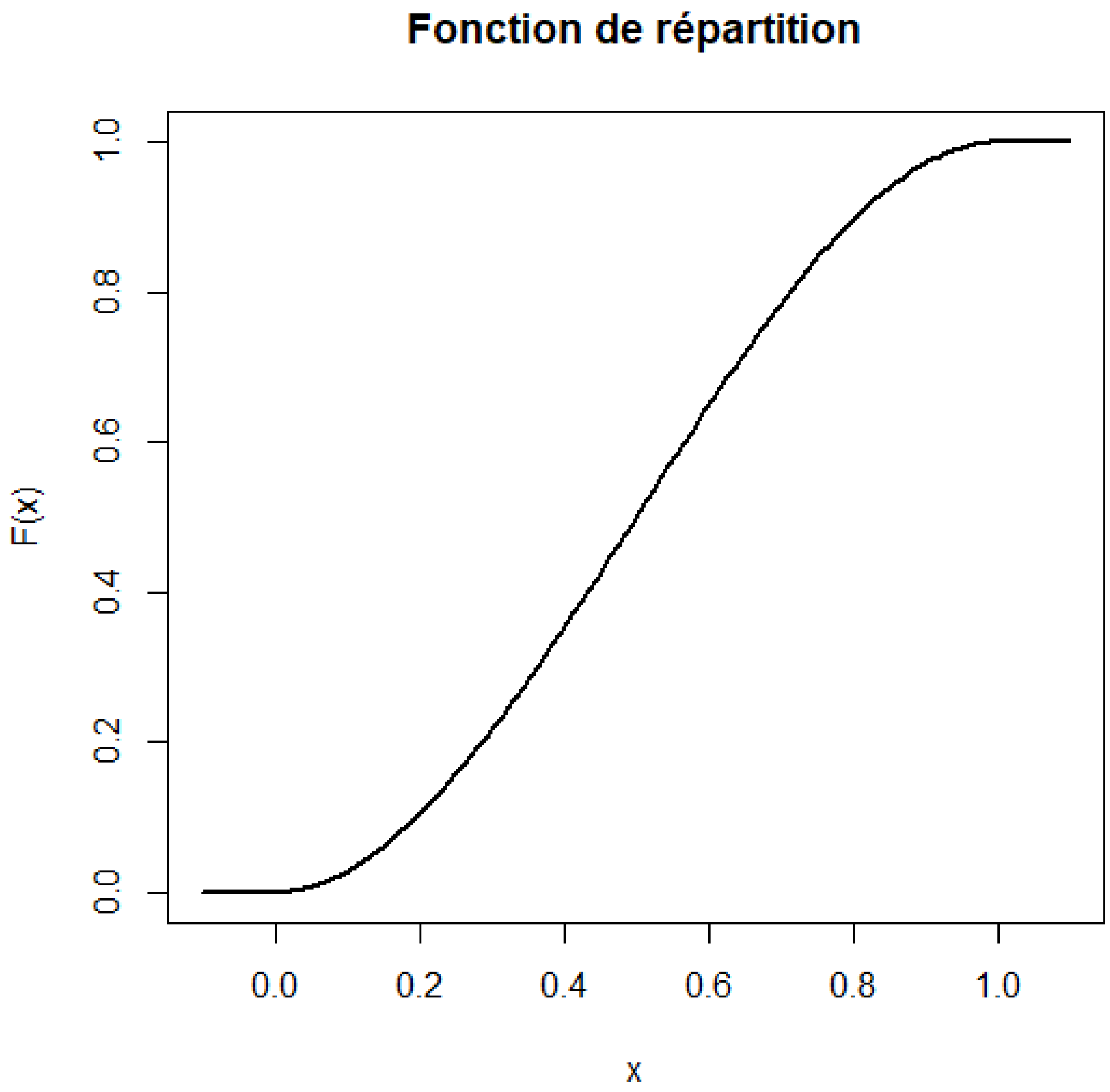


Exemple loi symétrique : variance





Exemple loi symétrique sur [0;1]



Exemple loi symétrique sur [0;1]

Comment s'écrit la fonction de répartition ?

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \ldots, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

Exemple loi symétrique sur [0;1]

Comment s'écrit la fonction de répartition ?

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \ldots, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

On doit trouver la primitive de la densité qui vaut 0 quand x=0 et 1 quand x=1

Exemple loi symétrique sur [0;1]

La fonction de répartition s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

Calculer $\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0{,}5)$

Exemple loi symétrique sur [0;1]

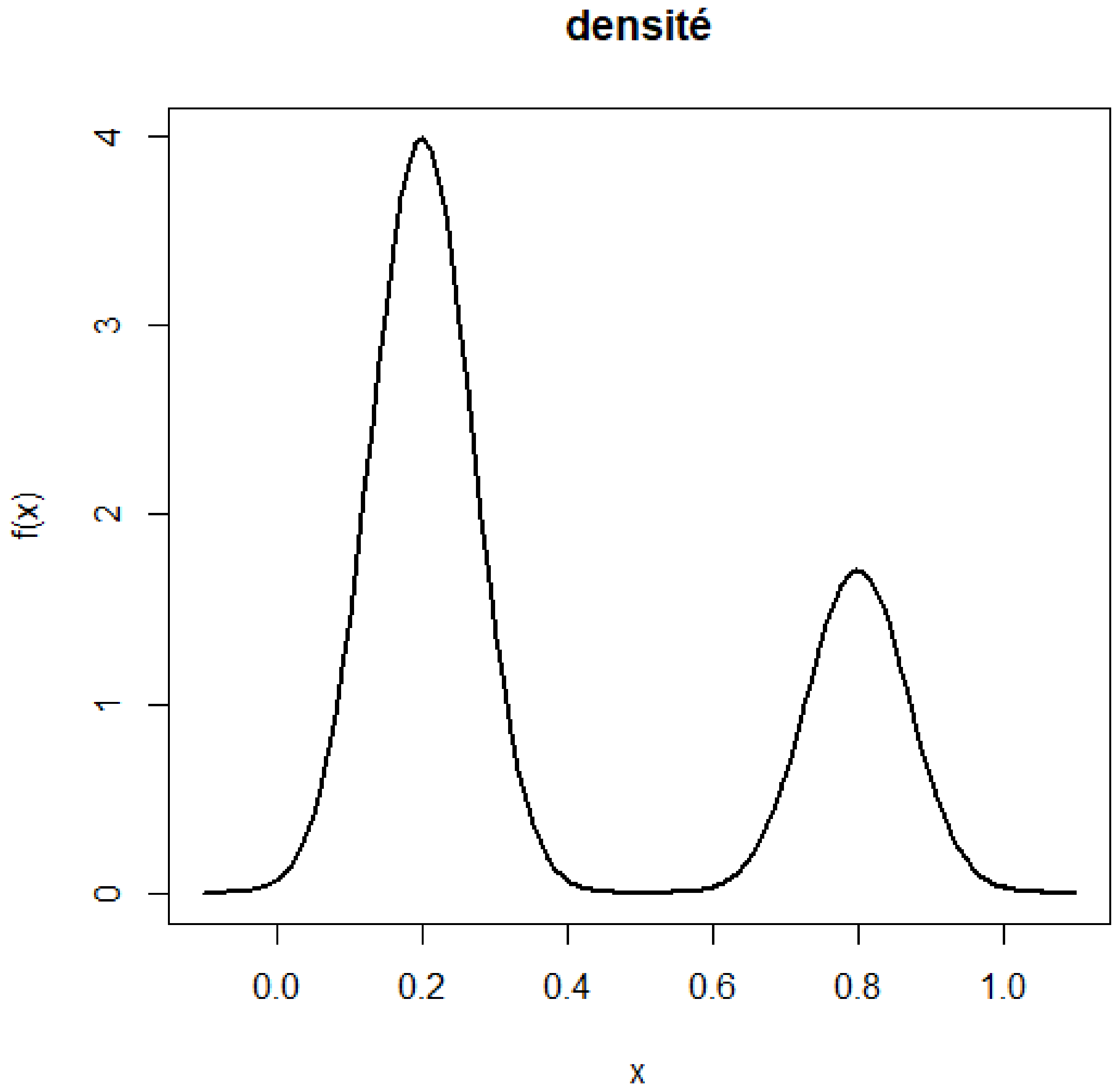
La fonction de répartition s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3, si\ x \in [0;1] \\ 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0{,}5) = \int_0^{0,5} f(x)dx = F(0{,}5) - F(0)$$

$$= 3 * 0{,}5^2 - 2 * 0{,}5^3 = 0{,}5^2(3 - 2 * 0{,}5) = 2 * 0{,}25 = 0{,}5$$

Exemple loi bimodale sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur [0;1])



Exemple loi bimodale

La densité s'écrit

$$f(x) = \frac{0{,}7}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0{,}2)^2}{2*0{,}07^2}} + \frac{0{,}3}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0{,}8)^2}{2*0{,}07^2}}$$

Il s'agit d'un mélange de deux lois normales

Vérifier que f est bien une densité

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

Exemple loi bimodale

La densité s'écrit

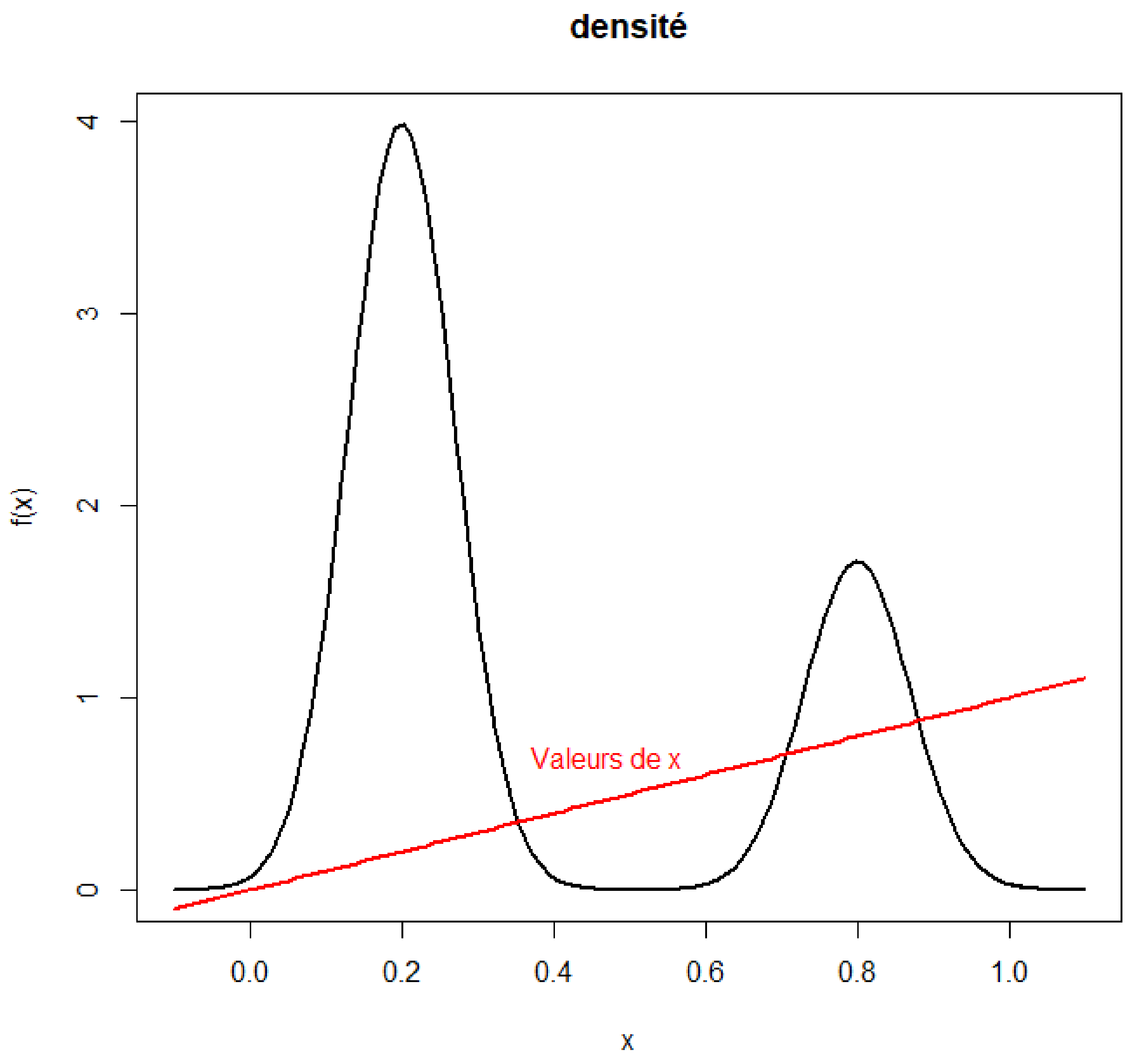
$$f(x) = \frac{0,7}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,2)^2}{2*0,07^2}} + \frac{0,3}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,8)^2}{2*0,07^2}}$$

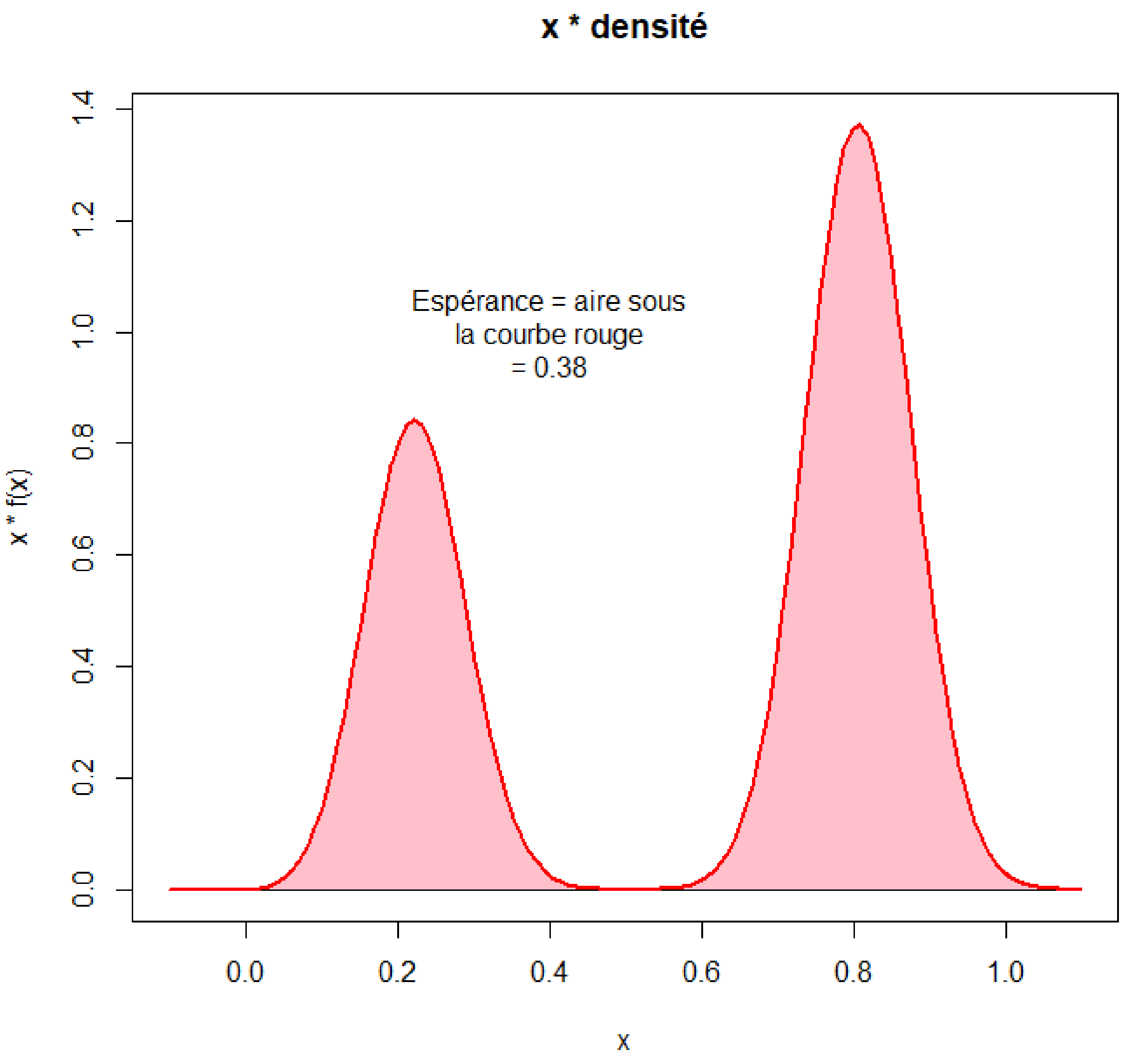
Il s'agit d'un mélange de deux lois normales

Vérifier que f est bien une densité -> bon ok c'était une blague

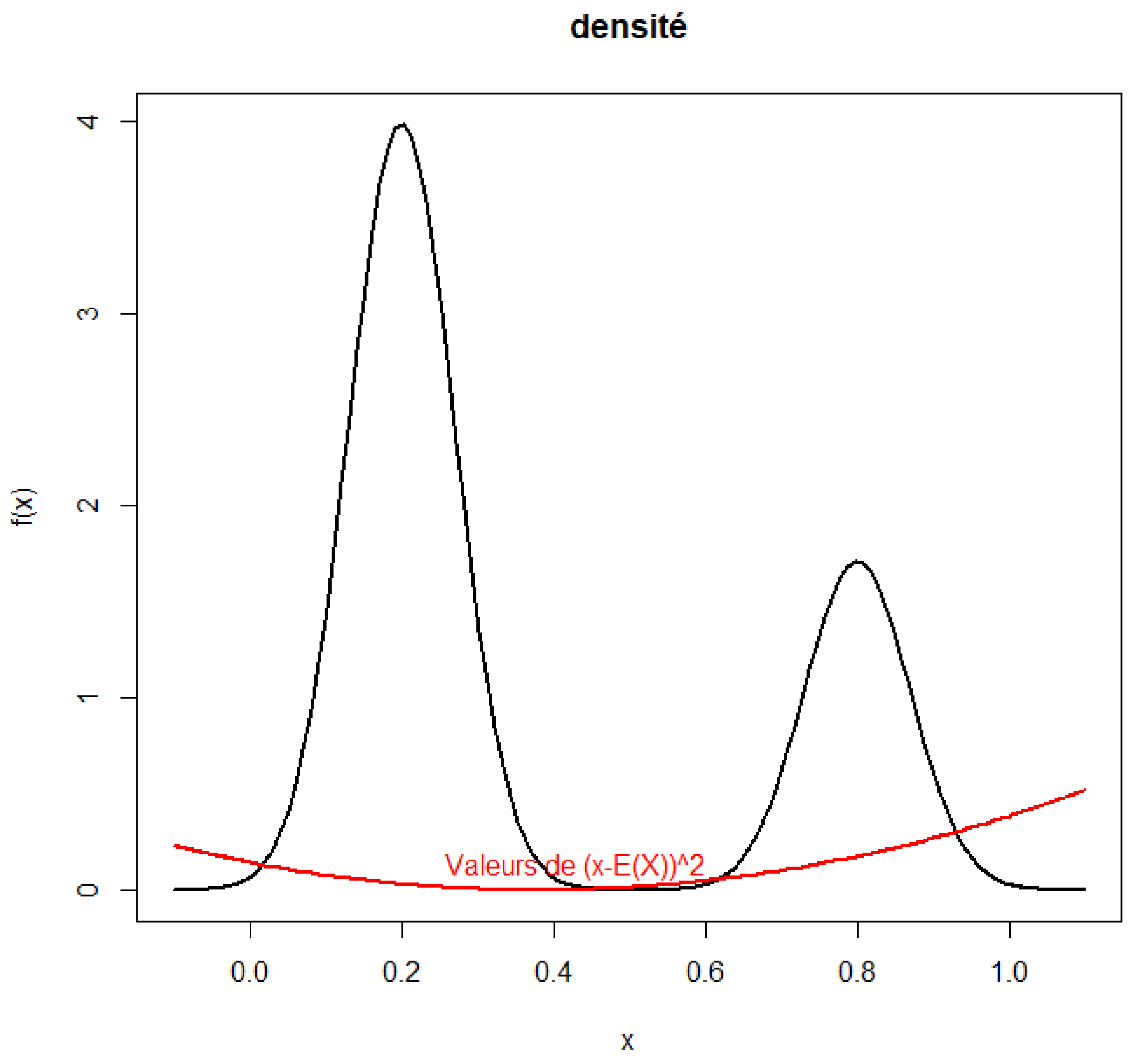
Calculer $\mathbf{E(X)}$ et $\mathbf{Var(X)}$

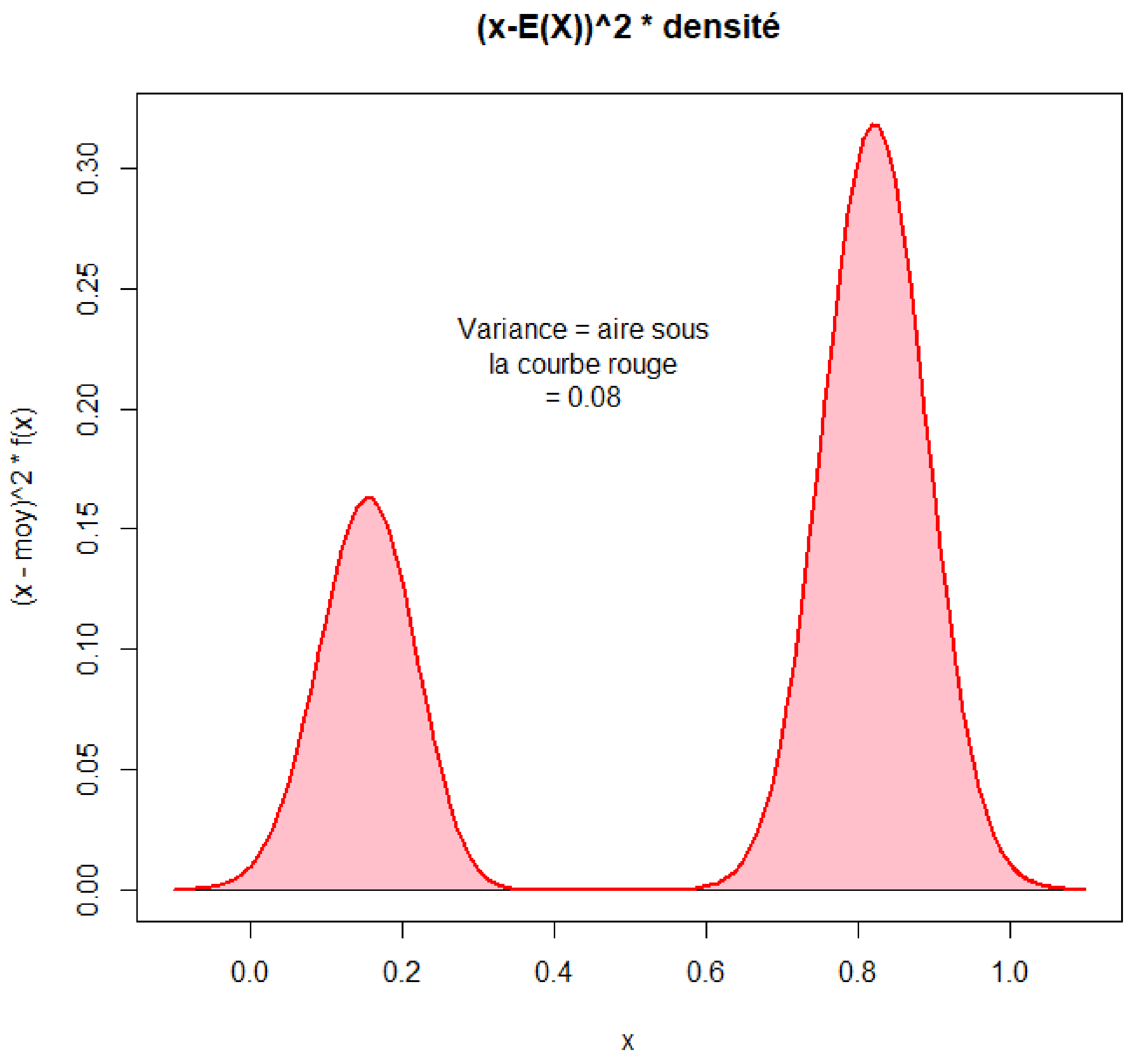
Exemple loi bimodale : espérance



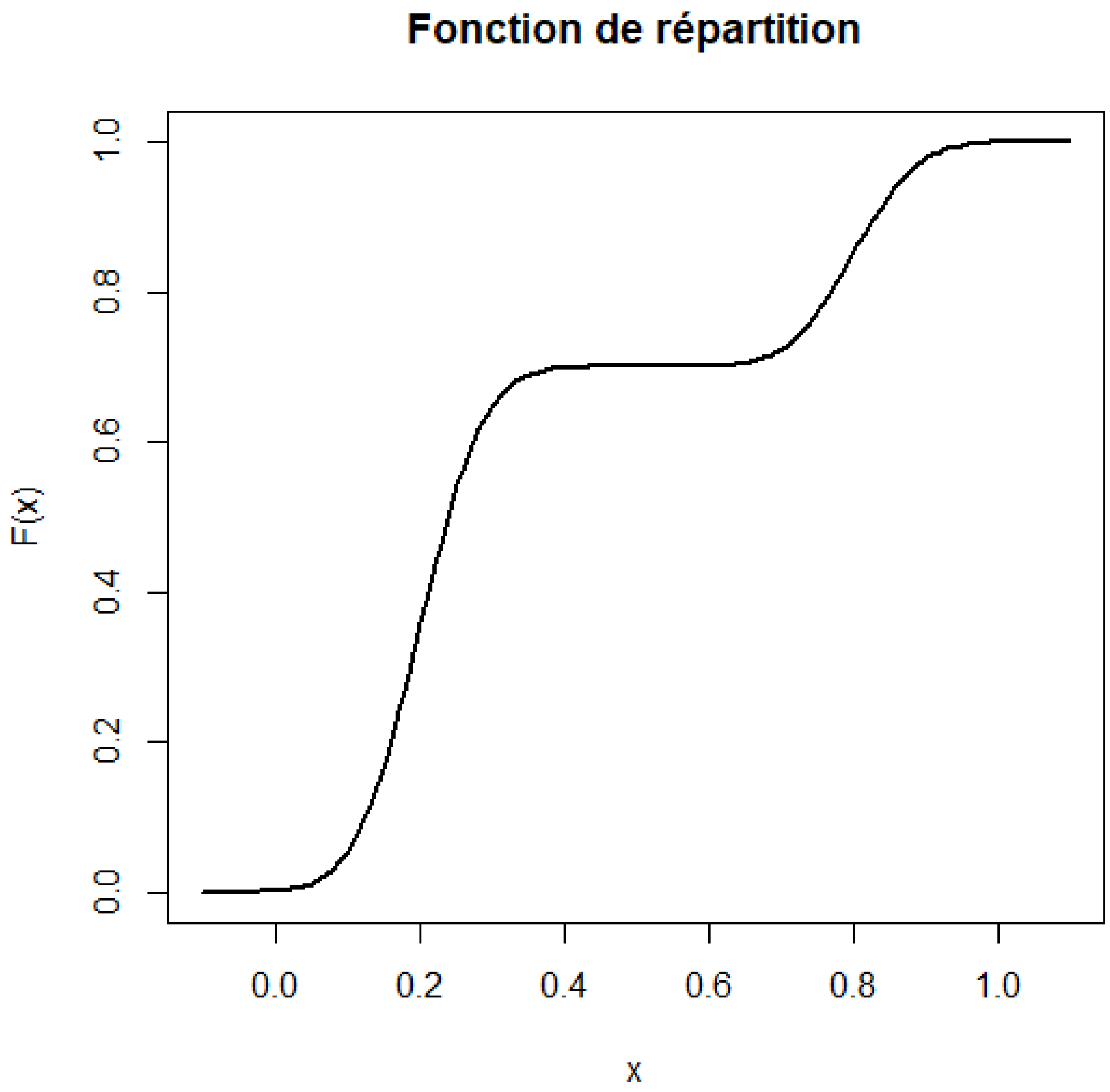


Exemple loi bimodale : variance

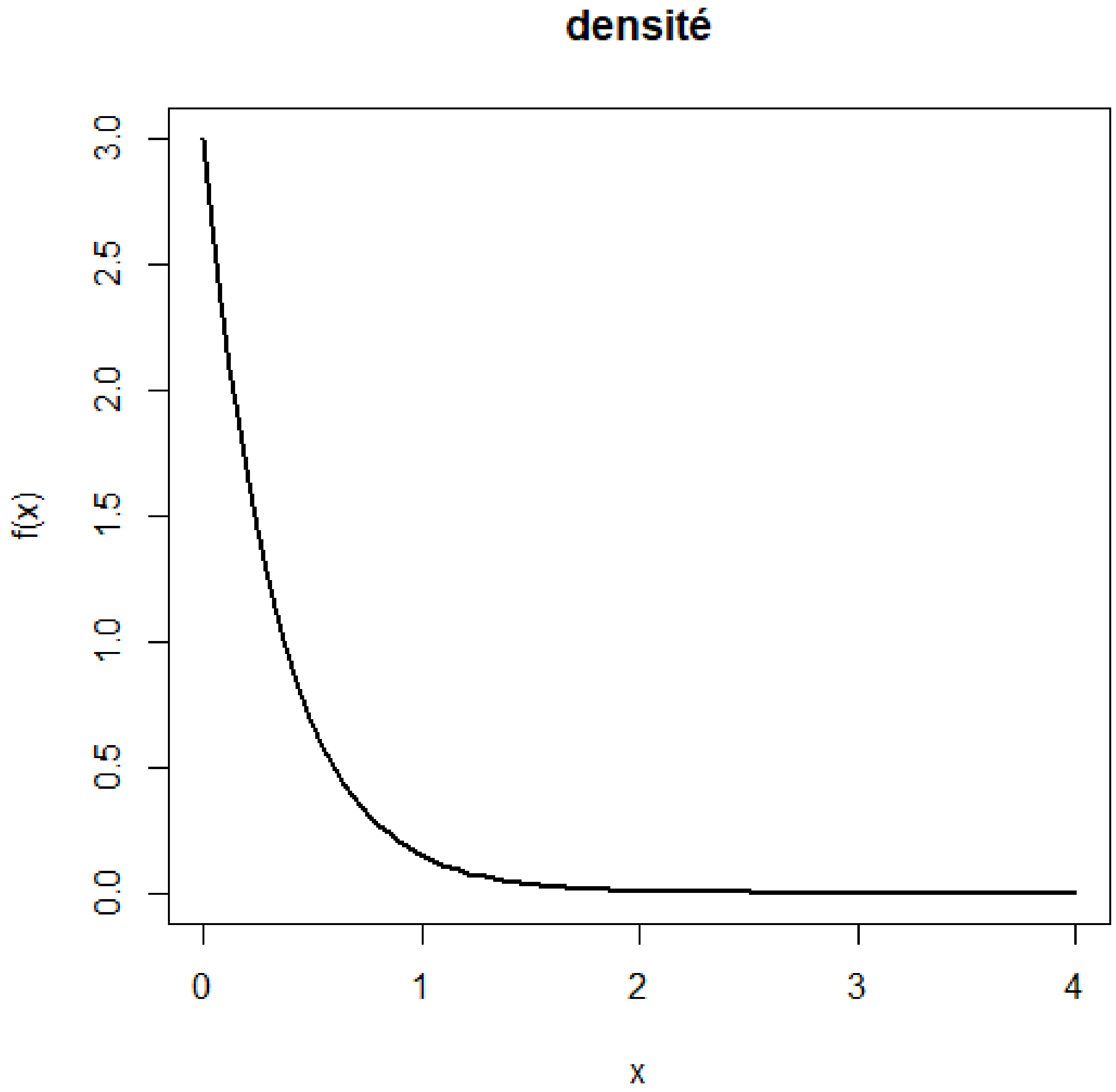




Exemple loi bimodale



Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$



Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, si\ x \geq 0 \\ 0, \quad\quad sinon \end{cases}$$

Vérifier que f est bien une densité

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, si\ x \geq 0 \\ 0, \quad\quad sinon \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = [-e^{-3x}]_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

f est bien une densité

Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, si\ x \geq 0 \\ 0, \quad\quad sinon \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x * 3e^{-3x} dx$$

$$= [-xe^{-3x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$$

$$\mathrm{E}(X) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

La densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, si\ x \geq 0 \\ 0, \qquad sinon \end{cases}$$

Intégration par parties

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x * 3e^{-3x}dx$$

$$= [-xe^{-3x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$$

$$\int \boldsymbol{uv'} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{u'v}$$

$$\mathrm{E}(X) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemple loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$

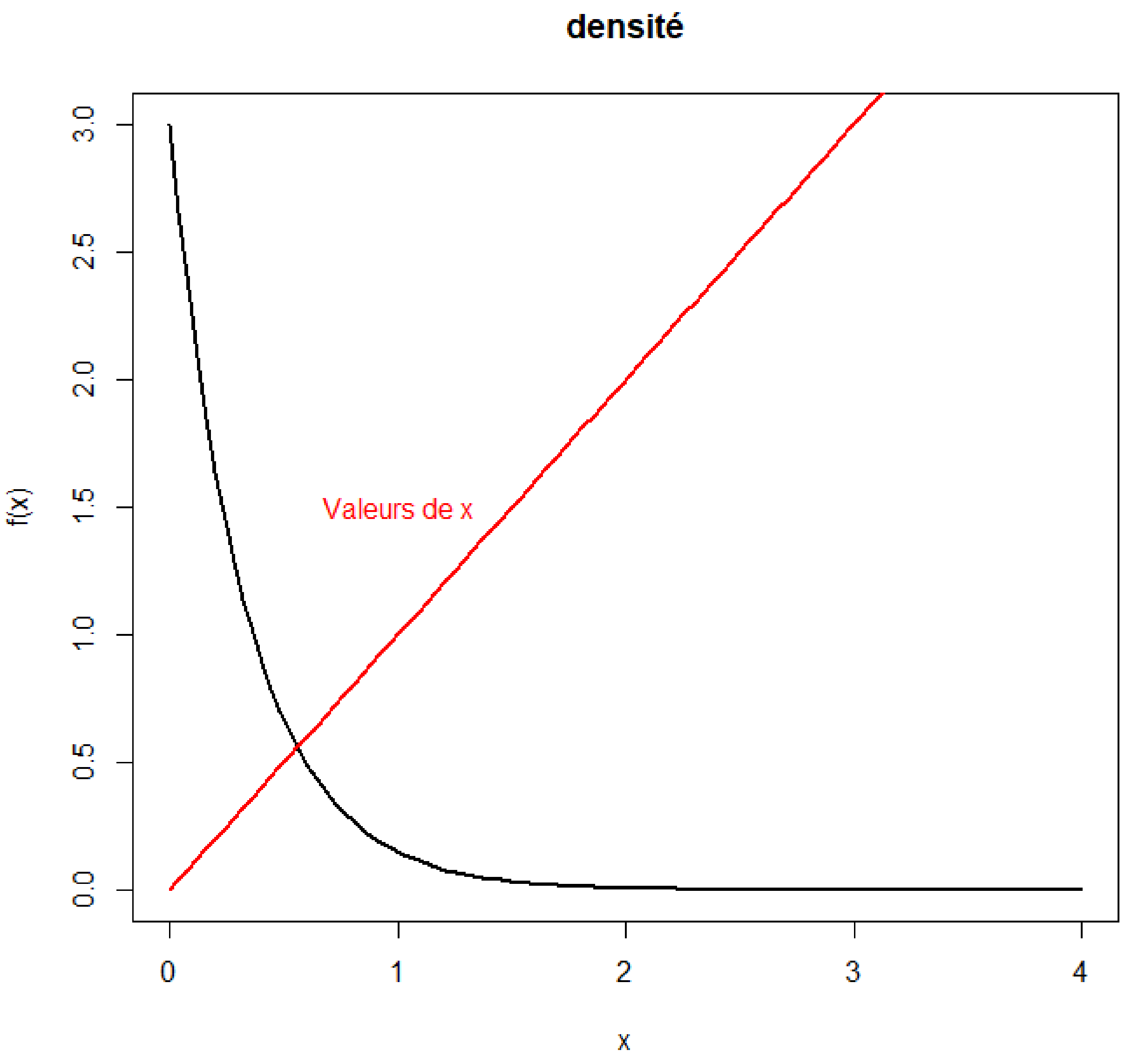
La densité s'écrit

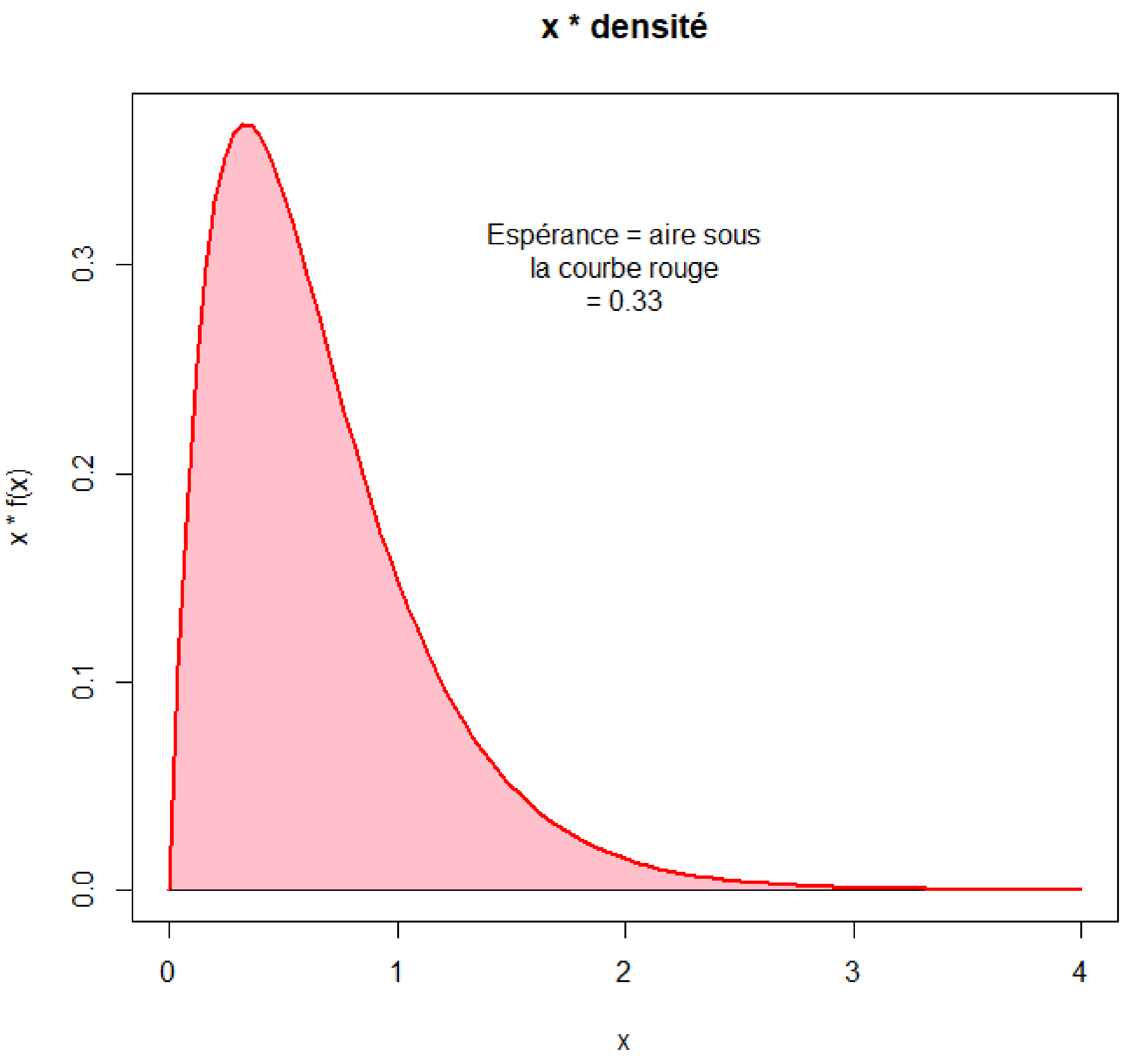
$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, si\ x \geq 0 \\ 0, \qquad sinon \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 * 3e^{-3x}\, dx$$

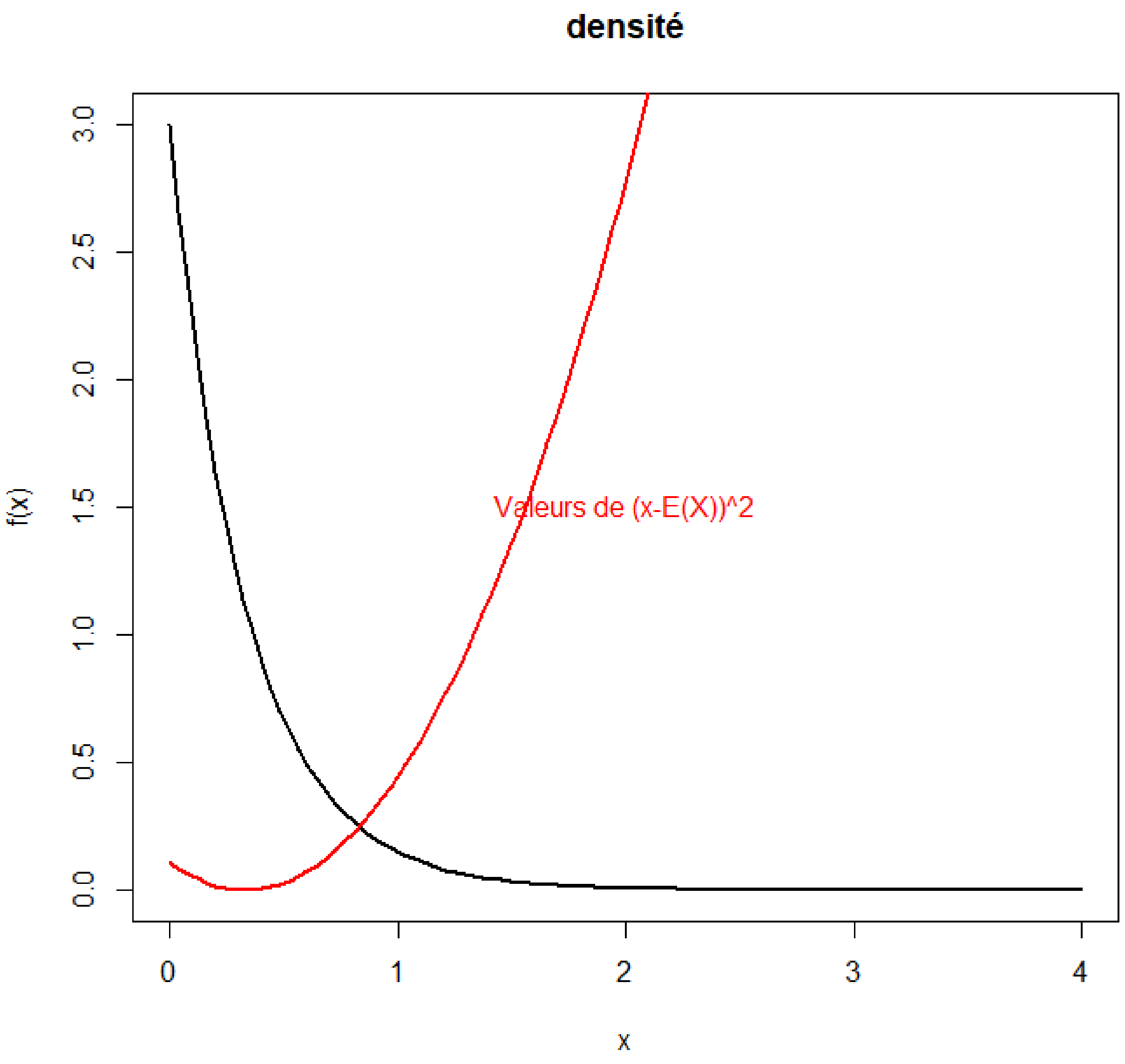
Double Intégration par parties

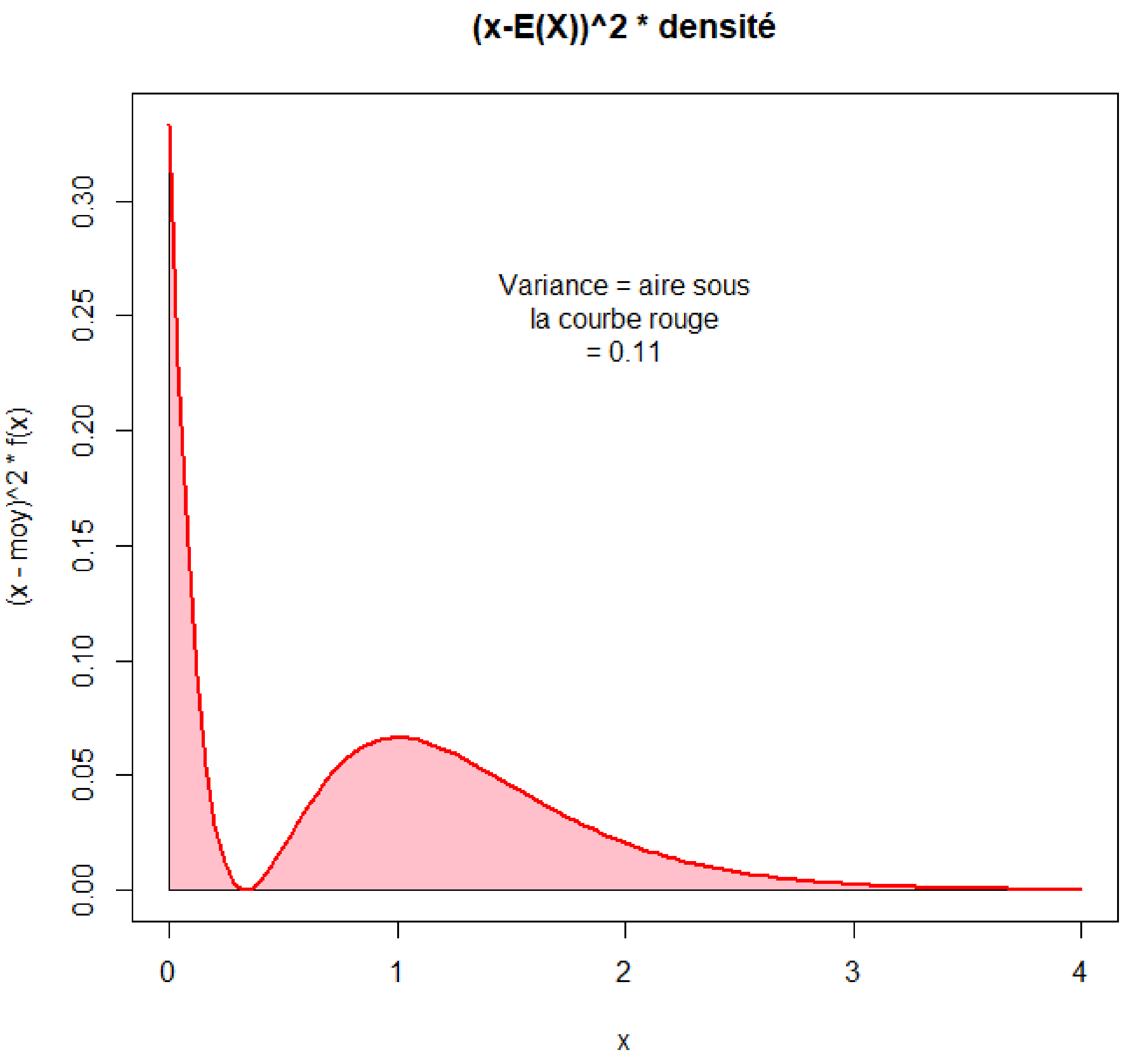
Exemple loi exponentielle : espérance



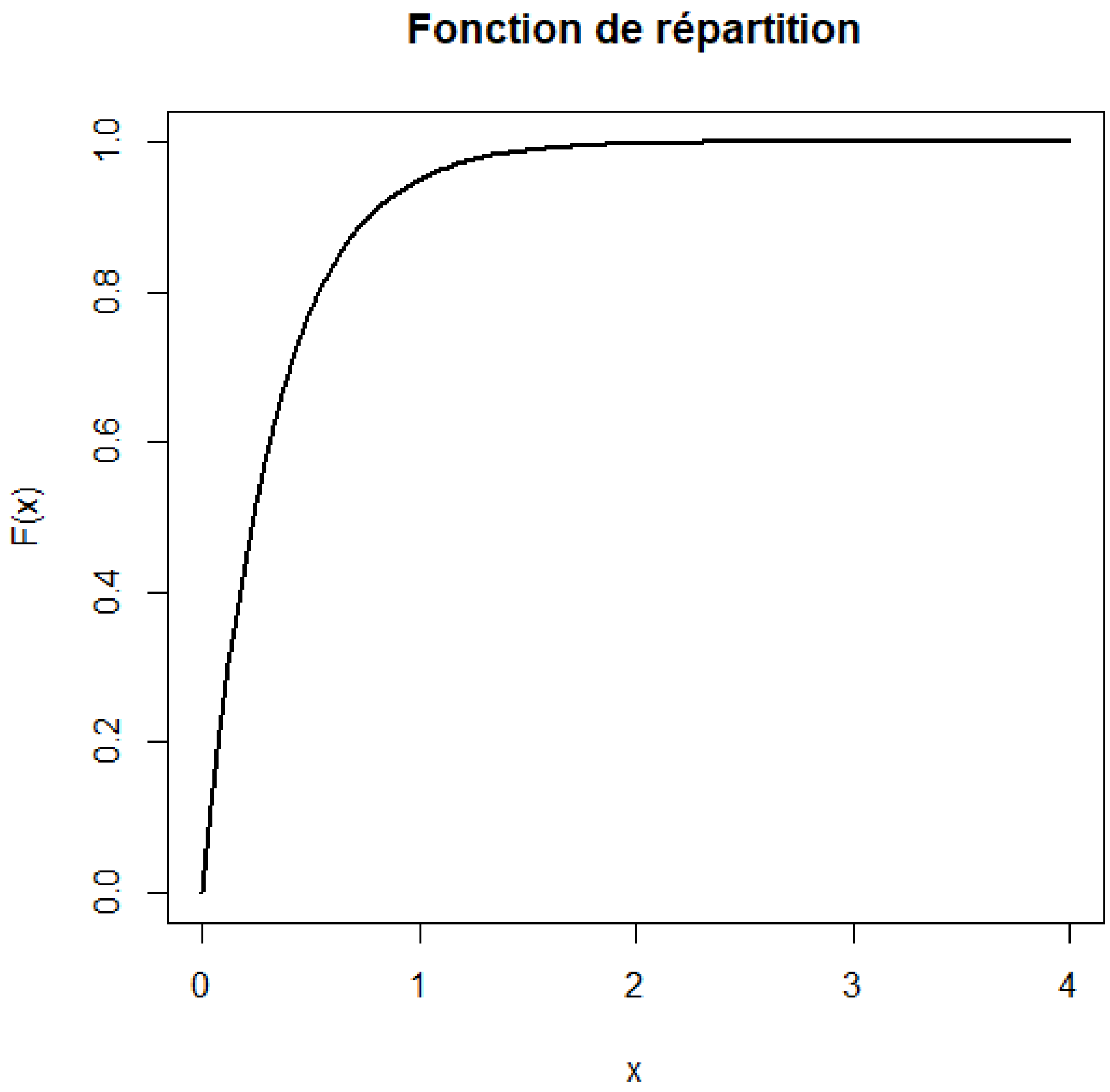


Exemple loi exponentielle : variance





Exemple loi exponentielle



Exemple loi exponentielle

Comment s'écrit la fonction de répartition ?

$$\mathrm{F}(x) = \cdots$$

Exemple loi exponentielle

Comment s'écrit la fonction de répartition ?

$$\mathrm{F}(x) = \cdots$$

On doit trouver la primitive de la densité qui vaut 0 quand x=0 et 1 quand x tend vers l'infini

Exemple loi exponentielle

La fonction de répartition s’écrit

$$\mathrm{F}(x) = 1 - e^{-3x}$$

Calculer $\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0,5)$

Exemple loi exponentielle

La fonction de répartition s'écrit

$$\mathrm{F}(x) = 1 - e^{-3x}$$

$$\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)dx = F(0{,}5) - F(0) = 1 - e^{-1{,}5}$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soit une variable aléatoire X d'espérance $E[X]$ et de variance $\mathrm{Var}(X)$.

Soit une variable aléatoire Y d'espérance $E[Y]$ et de variance $\mathrm{Var}(\mathrm{Y})$

Soient a et b deux réels.

Donner

- $E[aX]$
- $E[aX + \mathrm{bY}]$
- $Var[aX]$
- $Var[aX + \mathrm{bY}]$

Propriétés de l’espérance et de la variance

Soit une variable aléatoire X d’espérance $E[X]$ et de variance $\mathrm{Var}(X)$.

Soit une variable aléatoire Y d’espérance $E[Y]$ et de variance $\mathrm{Var}(\mathrm{Y})$

Soient a et b deux réels.

Donner

- $E[aX] = aE(X)$
- $E[aX + \mathrm{bY}] = aE(X) + bE(Y)$
- $Var[aX] = a^2Var(X)$
- $Var[aX + \mathrm{bY}] = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + ab * Cov(X,Y)$

Avec $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$