TD n°3 : Lois jointe, marginale, conditionnelle

L1 - Licences Sciences pour la Santé

Eléments de correction

Exercice 1 : Soient X et Y deux variables dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X\Y	**0**	**1**
0	0,2	0,1
1	0,3	0,4

a) Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité
b) Déterminer la loi marginale de X
c) Déterminer la loi marginale de Y

Correction :

a) La somme des probabilités est bien égale à 1
b) On a $X \in \{0,1\}$ et
$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$
$$P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$$
c) On a $Y \in \{0,1\}$ et
$$P(Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$
$$P(Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

Exercice 2 : Dans une population on observe deux facteurs de risque :

- X : tabagisme (oui=1, non=0)
- Y : exposition professionnelle à des substances toxiques (oui=1, non=0)

On sait que

$$P(X=1) = 0.3, \quad P(Y=1) = 0.4, \quad P(X=1, Y=1) = 0.15$$

a) Donner la loi jointe de (X, Y)
b) X et Y sont-ils indépendants ?
c) Calculer $P(Y=1|X=1)$
d) Calculer $P(X=1|Y=0)$

Correction :

a) On note $p_{11} = P(X=1, Y=1)$, et

$$p_{10} = P(X=1, Y=0) = P(X=1) - p_{11} = 0.3 - 0.15 = 0.15$$

$$p_{01} = P(X=0, Y=1) = P(Y=1) - p_{11} = 0.4 - 0.15 = 0.25$$

$$p_{00} = 1 - (p_{11} + p_{10} + p_{01}) = 1 - (0.15 + 0.15 + 0.25) = 0.45$$

X\Y	**0**	**1**
0	0,45	0,25
1	0,15	0,15

b) On a $P(X = 1)P(Y = 1) = 0.3 * 0.4 = 0.12 \neq p_{11}$ donc pas d'indépendance
c) $P(Y = 1|X = 1) = \frac{p_{11}}{P(X=1)} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$

Chez les fumeurs, 50% sont exposés

d) $P(X = 1|Y = 0) = \frac{p_{10}}{P(Y=0)} = \frac{0.15}{0.6} = 0.25$

Chez les non exposés, 25% fument

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

d) Donner la loi du couple (U, V).
e) U et V sont-elles indépendantes ?

Correction : $U \in \{0,1,2\}$ et $V \in \{-1,0,1\}$

Tableau croisé des probabilités

U\V	**-1**	**0**	**1**
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$(1-p)p$	0	$(1-p)p$
2	0	p^2	0

Pour remplir le tableau, on doit savoir quelles valeurs de U et V sont possibles **simultanément.** On peut construire le tableau ci-dessous

X\Y	**0**	**1**
0	U=0 V=0	U=1 V=-1
1	U=1 V=1	U=2 V=0

Cela nous permet de constater que plusieurs couples de valeurs sont impossibles. Pour les autres on calcule

$$P(U = 0, V = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0) * P(Y = 0) = (1 - p)^2$$

$$P(U = 1, V = -1) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) * P(Y = 1) = (1 - p)p$$

$$P(U = 1, V = 1) = P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) * P(Y = 0) = (1 - p)p$$

$$P(U = 2, V = 0) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) * P(Y = 1) = p^2$$

On remarque que $P(U = 0, V = -1) = 0$, or $P(U = 0) * P(V = -1) = (1 - p)^2(1 - p)p \neq 0$

Donc U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 : Soient X et Y les résultats de deux dés indépendants.

a) Donner $P(X = 2, Y = 6)$
b) Donner $P(X > 3 \mid Y = 2)$

c) Soit $Z = X + Y$. Donner $P(X = 4|Z = 8)$

Correction :

a) $P(X = 2, Y = 6) = P(X = 2) * P(Y = 6) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
b) $P(X > 3 \mid Y = 2) = \frac{P(X>3,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{P(X>3)*P(Y=2)}{P(Y=2)} = P(X \in \{4,5,6\}) = \frac{1}{2}$
c) $P(X = 4|Z = 8) = \frac{P(X=4,Z=8)}{P(Z=8)} = \frac{1}{5}$

Car $P(Z = 8) = P(X + Y = 8) = P(X = 2, Y = 6) + P(X = 3, Y = 5) + P(X = 4, Y = 4) + P(X = 5, Y = 3) + P(X = 6, Y = 2) = \frac{5}{36}$

Et $P(X = 4, Z = 8) = P(X = 4, Y = 4) = \frac{1}{36}$

Exercice 5 : Soit une variable X à valeurs dans {0,1,2,3} avec la loi

$$P(X = 0) = 0.1, \qquad P(X = 1) = 0.2, \qquad P(X = 2) = 0.3, \qquad P(X = 3) = 0.4$$

Soient les événements $A = \{X\ est\ pair\}$, et $B = \{X \geq 2\}$.

a) Calculer $E(X|A)$
b) Calculer $E(X|B)$
c) Calculer $E(X|A \cap B)$

Correction :

a) $E(X|A) = 0 * P(X = 0|A) + 1 * P(X = 1|A) + 2 * P(X = 2|A) + 3 * P(X = 3|A) = 2 * P(X = 2|A) = 1,5$

Avec $P(X = 2|A) = \frac{P(X=2)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4}$

b) $E(X|B) = 0 * P(X = 0|B) + 1 * P(X = 1|B) + 2 * P(X = 2|B) + 3 * P(X = 3|B) = 2 * P(X = 2|B) + 3 * P(X = 3|B) = \frac{2*0.3+3*0.4}{0.7} = \frac{1.8}{0.7} = \frac{18}{7}$

Avec $P(X = 2|B) = \frac{P(X=2)}{P(X\geq 2)} = \frac{0.3}{0.7}$

Et $P(X = 3|B) = \frac{P(X=3)}{P(X\geq 2)} = \frac{0.4}{0.7}$

c) On a $A \cap B = \{X = 2\}$, donc

$$E(X|A \cap B) = E(X|X = 2) = 2$$

Exercice 6 : Dans une étude clinique, on observe :

- X : bras de traitement (traité = 1, témoin=0)
- Y : Nombre d'améliorations cliniques (0, 1, 2)

X\Y	0	1	2
0	0,25	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,25

a) Calculer $E(Y|X = 0)$ et $E(Y|X = 1)$
b) Interpréter la différence $E(Y|X = 1)$ - $E(Y|X = 0)$

Correction :

a) On a $P(Y = 0|X = 0) = \frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$

$$P(Y = 1|X = 0) = \frac{0.15}{0.25 + 0.15 + 0.10} = 0.3$$

$$P(Y = 2|X = 0) = \frac{0.10}{0.25 + 0.15 + 0.10} = 0.2$$

Donc

$$E(Y|X = 0) = 0 * 0.5 + 1 * 0.3 + 2 * 0.2 = 0.7$$

On a $P(Y = 0|X = 1) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1$

$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$P(Y = 2|X = 1) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

Donc

$$E(Y|X = 1) = 0 * 0.1 + 1 * 0.4 + 2 * 0.5 = 1.4$$

b) $E(Y|X = 1) - E(Y|X = 0) = 1.4 - 0.7 = 0.7$

Les patients traités ont 0,7 améliorations supplémentaires comparativement aux témoins.