TD n°2 : Variables aléatoires

L1 - Licences Sciences pour la Santé

Eléments de correction

Exercice 1 :

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain en euros.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(X)$.

Correction :

X peut prendre les valeurs -5, 0.5 et 1.5 avec

$$P(X = -5) = 1/6$$

$$P(X = 0.5) = 1/2$$

$$P(X = 1.5) = 1/3$$

Donc

$$E(X) = -5 * P(X = -5) + 0.5 * P(X = 0.5) + 1.5 * P(X = 1.5)$$

$$E(X) = -5 * \frac{1}{6} + 0.5 * \frac{1}{2} + 1.5 * \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de probabilité binomiale :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Avec $n = 5$ et $p = 0.5$

Pour rappel, la loi binomiale donne la loi du nombre de succès lorsque l'on répète n expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre p.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 succès ?

Nota Bene : On rappelle que pour tout nombre réel non nul r, on a $r^0 = 1$.

De plus, on donne : $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$ *et* $\binom{5}{5} = 1$

Correction :

Si l'on note A l'événement « $X \geq 1$ » alors son complémentaire est A^c= « $X = 0$ ». On a donc

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Avec

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} * \frac{1}{2}^0 * \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$$

D'où

$$P(X \geq 1) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

<u>Exercice 3 :</u> Soit X une variable aléatoire réelle ayant la loi discrète suivante :

$P(X = -1) = \frac{p}{2}$, $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = \frac{p}{2}$

Avec $p \in]0; 1[$.

1. Quelle est la loi de $Y = X^2$?
2. Calculer $P(Y = X)$

Correction :

1. X a pour valeurs -1, 0 ou 1. Ainsi, Y a pour valeurs possibles 0 ou 1 et

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = p$$

Ainsi Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p

2. On a

$$P(Y = X) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1 - p + \frac{p}{2} = 1 - \frac{p}{2}$$

<u>Exercice 4 :</u>

Soit X une variable aléatoire suivant une de Bernouilli de paramètre p

a) Calculer E(X) et Var(X).
b) Donner la loi de Y=1/(X+1) puis calculer E(Y) et Var(Y)

Correction :

a)

$$E(X) = 1 * P(X = 1) + 0 * P(X = 0) = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

$$Var(X) = 1 * P(X = 1) + 0 * P(X = 0) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

b)

X	**0**	**1**
Y	**1**	**0.5**
Probabilité	1-p	p

$$E(Y) = 1 * P(Y = 1) + 0.5 * P(Y = 0.5) = 1 * P(X = 0) + 0.5 * P(X = 1)$$

$$E(Y) = 1 * (1 - p) + 0.5 * p = 1 - \frac{p}{2}$$

$$Var(Y) = 1 * P(Y = 1) + 0.25 * P(Y = 0.5) - (1 - p/2)^2$$

$$Var(Y) = 1 * (1-p) + 0.25 * p - (1-p/2)^2$$

$$Var(Y) = 1 - \frac{3p}{4} - \left(1 - p + \frac{p^2}{4}\right) = \frac{p}{4} - \frac{p^2}{4} = \frac{p}{4}(1-p)$$

Exercice 5 : Soient X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $= \frac{1}{2}$.

Soit $X = 1_{(X_1 = X_2)}$, c'est-à-dire que X vaut 1 quand $X_1 = X_2$, et 0 sinon.

Donner la loi de X et $E(X)$.

Correction :

On a

$$P(X=1) = P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

$$P(X=1) = P(X_1 = 0) * P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1) * P(X_2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Et

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Exercice 6 :

On lance deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale à l'écart (en valeur absolue) entre les deux nombres sortis.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Déterminer l'espérance de X.

Correction :

Les possibilités pour la différence sont ici

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Chacune de ces issues a 1/36 de survenir mais certaines des issues se répètent.

Les valeurs possibles pour la différence sont : 0,1,2,3,4,5

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36
P(X=x)	1/6	5/18	2/9	1/6	1/9	1/18

Donc

$$E(X) = 0 * \frac{6}{36} + 1 * \frac{10}{36} + 2 * \frac{8}{36} + 3 * \frac{6}{36} + 4 * \frac{4}{36} + 5 * \frac{2}{36} = 70/36$$

Exercice 7 : On vous propose le jeu suivant: Vous lancez deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si vous obtenez un double six, vous gagnez 1 millions d'euros sinon vous perdez 10000 euros.

Que faîtes-vous?

Correction :

Si on note X la variable aléatoire donnant le gain on a que deux issues possibles : 1 000 000 et – 10 000. Et les probabilités sont

P(X=1 000 000)=1/36 et P(X = -10 000) = 35/36

L'espérance de gain est

$$E(X) = 1\,000\,000 * \frac{1}{36} - 10\,000 * \frac{35}{36} = 18055.56$$

Donc on aurait envie de jouer car l'expérience est positive. Evidemment il faut pouvoir se permettre de perdre 10 000 euros !

Exercice 8 : Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par:

x	0	20	5	15
P(X=x)	0,5	0,1	0,2	0,2

Donner E(X), Var(X) et l'écart-type $\sigma(X)$

Correction :

$$E(X) = 0 * 0.5 + 20 * 0.1 + 5 * 0.2 + 15 * 0.2 = 6$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0 * 0.5 + 400 * 0.1 + 25 * 0.2 + 225 * 0.2 - 36 = 54$$

Et l'écart-type vaut donc $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \approx 7.35$