**TD n°2 : Variables aléatoires**

*L1 - Licences Sciences pour la Santé*

**Eléments de correction**

**Exercice 1 :**

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle $X$ la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain en euros.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ et calculer $E(X)$.

***Correction :***

$X$ peut prendre les valeurs -5, 0.5 et 1.5 avec

$$P\left(X=-5\right)=1/6$$

$$P\left(X=0.5\right)=1/2$$

$$P\left(X=1.5\right)=1/3$$

Donc

$$E\left(X\right)=-5\*P\left(X=-5\right)+0.5\*P\left(X=0.5\right)+1.5\*P\left(X=1.5\right)$$

$$E\left(X\right)=-5\*\frac{1}{6}+0.5\*\frac{1}{2}+1.5\*\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$$

**Exercice 2 :** Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi de probabilité binomiale :

$$P\left(X=k\right)=\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)p^{k}\left(1-p\right)^{n-k} $$

Avec $n=5$ et $p=0.5$

Pour rappel, la loi binomiale donne la loi du nombre de succès lorsque l’on répète $n$ expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p$.

Quelle est la probabilité d’obtenir au moins 1 succès ?

*Nota Bene : On rappelle que pour tout nombre réel non nul* $r$*, on a* $r^{0}=1$*.*

*De plus, on donne :* $\left(\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right)=1$*,* $\left(\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right)=5$*,*$ \left(\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right)=10$*,* $\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)=10$*,* $\left(\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right)=5$ *et* $\left(\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right)=1$

***Correction :***

Si l’on note $A$ l’événement « $X\geq 1$ » alors son complémentaire est $A^{c}$= « $X=0$ ». On a donc

$$P\left(X\geq 1\right)=1-P\left(X=0\right)$$

Avec

$$P\left(X=0\right)=\left(\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right)\*\frac{1}{2}^{0}\*\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-0}=\frac{1}{32}$$

D’où

$$P\left(X\geq 1\right)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

**Exercice 3 :** Soit $X$ une variable aléatoire réelle ayant la loi discrète suivante :

$P\left(X=-1\right)=\frac{p}{2} $, $P\left(X=0\right)=1-p$ et $P\left(X=1\right)=\frac{p}{2}$

Avec $p\in ]0;1[$.

1. Quelle est la loi de $Y=X^{2}$ ?
2. Calculer $P\left(Y=X\right)$

***Correction :***

1. $X$ a pour valeurs -1, 0 ou 1. Ainsi, $Y$ a pour valeurs possibles 0 ou 1 et

$$P\left(Y=0\right)=P\left(X=0\right)=1-p$$

$$P\left(Y=1\right)=P\left(X=-1\right)+P(X=1)=p$$

Ainsi $Y$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$

1. On a

$$P\left(Y=X\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=1-p+\frac{p}{2}=1-\frac{p}{2}$$

**Exercice 4 :** Soient $X\_{1}$ et $X\_{2}$ deux variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $=\frac{1}{2}$ .

Soit $X=1\_{(X\_{1}=X\_{2})}$, c’est-à-dire que $X$ vaut 1 quand $X\_{1}=X\_{2}$, et 0 sinon.

Donner la loi de $X$ et $E(X)$.

***Correction :***

On a

$$P\left(X=1\right)=P\left(X\_{1}=X\_{2}\right)=P\left(X\_{1}=0,X\_{2}=0\right)+P\left(X\_{1}=1, X\_{2}=1\right)$$

$$P\left(X=1\right)=P\left(X\_{1}=0\right)\*P\left(X\_{2}=0\right)+P\left(X\_{1}=1\right)\*P\left(X\_{2}=1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Et

$$E\left(X\right)=\frac{1}{2}$$