Exo 1

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exo 2

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.

Exo 3

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

- ou bien une seule marche, avec probabilité p;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1? Que vaut p_2? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.

Exo 4

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$