



# Exercices : espérance conditionnelle

Licence Sciences pour la Santé

Intervenant : Mathieu Fauvernier

# Problème 1

On administre un traitement à des patients.

- Le traitement est efficace (événement  $E$ ) avec probabilité  $p$
- Le traitement est inefficace (événement  $E^C$ ) avec probabilité  $1-p$

La présence d'effets secondaires est donnée par  $Y \in \{0,1\}$ .

- Si  $E$ , alors  $P(Y = 1) = 0,2$
- Si  $E^C$ , alors  $P(Y = 1) = 0,5$

1. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $E$  et sachant  $E^C$
2. Calculer  $P(E|Y = 1)$ . Interpréter.
3. Calculer  $E(Y)$

# Problème 1

1. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $E$  et sachant  $E^C$

- On a  $P(Y = 1|E) = 0,2$  et  $P(Y = 0|E) = 0,8$
- On a  $P(Y = 1|E^C) = 0,5$  et  $P(Y = 0|E^C) = 0,5$

# Problème 1

2. Calculer  $P(E|Y = 1)$ . Interpréter

$$P(E|Y = 1) = \frac{P(Y = 1|E)P(E)}{P(Y = 1)}$$

$$P(E|Y = 1) = \frac{P(Y = 1|E)P(E)}{P(Y = 1|E)P(E) + P(Y = 1|E^c)P(E^c)}$$

$$P(E|Y = 1) = \frac{0,2p}{0,2p + 0,5(1 - p)} = \frac{0,2p}{0,5 - 0,3p} = \frac{2p}{5 - 3p}$$

Il s'agit de la probabilité que le traitement soit efficace sachant que l'on observe des effets secondaires.

# Problème 1

## 3. Calculer $E(Y)$

$$\begin{aligned}E(Y|E) &= 0 * P(Y = 0|E) + 1 * P(Y = 1|E) = 0,2 \\E(Y|E^C) &= 0 * P(Y = 0|E^C) + 1 * P(Y = 1|E^C) = 0,5\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}E(Y) &= E(Y|E)P(E) + E(Y|E^C)P(E^C) = 0,2p + 0,5(1 - p) \\&= 0,5 - 0,3p\end{aligned}$$

# Problème 2

Un biomarqueur  $B$  est mesuré pour dépister une maladie  $D$  (présence ou absence). La loi jointe est donnée par

| $D \setminus B$     | $B = \text{Bas}$ | $B = \text{Intermédiaire}$ | $B = \text{Haut}$ |
|---------------------|------------------|----------------------------|-------------------|
| $D = \text{Malade}$ | 0.006            | 0.014                      | 0.030             |
| $D = \text{Sain}$   | 0.494            | 0.296                      | 0.160             |

1. Donner les lois marginales de  $B$  et  $D$
2. Pour chaque niveau du biomarqueur  $b \in \{\text{Bas}, \text{Intermédiaire}, \text{Haut}\}$  donner la loi conditionnelle de  $D$  sachant  $B = b$ .
3. Interpréter la probabilité  $P(D = \text{Malade} | B = \text{Haut})$

# Problème 2

Un biomarqueur B est mesuré pour dépister une maladie D (présence ou absence). La loi jointe est donnée par

| D \ B      | B = Bas | B = Intermédiaire | B = Haut |
|------------|---------|-------------------|----------|
| D = Malade | 0.006   | 0.014             | 0.030    |
| D = Sain   | 0.494   | 0.296             | 0.160    |

1. Donner les lois marginales de B et D

$$P(B = \text{Bas}) = 0,006 + 0,494 = 0,5$$

$$P(B = \text{Intermédiaire}) = 0,014 + 0,296 = 0,31$$

$$P(B = \text{Haut}) = 0,03 + 0,16 = 0,19$$

# Problème 2

Un biomarqueur B est mesuré pour dépister une maladie D (présence ou absence). La loi jointe est donnée par

| D \ B      | B = Bas | B = Intermédiaire | B = Haut |
|------------|---------|-------------------|----------|
| D = Malade | 0.006   | 0.014             | 0.030    |
| D = Sain   | 0.494   | 0.296             | 0.160    |

1. Donner les lois marginales de B et D

$$P(D = \textit{Malade}) = 0,006 + 0,014 + 0,03 = 0,05$$

$$P(D = \textit{Sain}) = 0,494 + 0,296 + 0,160 = 0,95$$

# Problème 2

Un biomarqueur B est mesuré pour dépister une maladie D (présence ou absence). La loi jointe est donnée par

| D \ B      | B = Bas | B = Intermédiaire | B = Haut |
|------------|---------|-------------------|----------|
| D = Malade | 0.006   | 0.014             | 0.030    |
| D = Sain   | 0.494   | 0.296             | 0.160    |

2. Pour chaque niveau du biomarqueur  $b \in \{\text{Bas}, \text{Intermédiaire}, \text{Haut}\}$  donner la loi conditionnelle de D sachant  $B = b$ .

$$P(D = \text{Malade} | B = \text{Haut}) = \frac{P(D = \text{malade et } B = \text{Haut})}{P(B = \text{Haut})} = \frac{0,03}{0,19} \approx 0,16$$

# Problème 2

Un biomarqueur B est mesuré pour dépister une maladie D (présence ou absence). La loi jointe est donnée par

| D \ B      | B = Bas | B = Intermédiaire | B = Haut |
|------------|---------|-------------------|----------|
| D = Malade | 0.006   | 0.014             | 0.030    |
| D = Sain   | 0.494   | 0.296             | 0.160    |

3. Interpréter la probabilité  $P(D = \textit{Malade} | B = \textit{Haut})$

$$P(D = \textit{Malade} | B = \textit{Haut}) \approx 0,16$$

Il s'agit de la valeur prédictive positive associée au test diagnostique défini par la valeur haute du biomarqueur.

# Problème 3

Essai clinique randomisé sur 1000 patients. On note T le groupe (T=1 traitement actif, T=0 placebo) et R l'issue binaire après 6 mois (R=1 récupération complète, R=0 non récupération).

| T \ R              | R = 1 (récup.) | R = 0 (échec) |
|--------------------|----------------|---------------|
| T = Traitement (1) | 0.42           | 0.08          |
| T = Placebo (0)    | 0.30           | 0.20          |

Calculer l'Absolute Risk Reduction (ARR) défini par

$$ARR = P(R = 1 | T = 1) - P(R = 1 | T = 0)$$

et en déduire le Number Needed to Treat (NNT) =  $1/ARR$ .

Interpréter (arrondir NNT à l'entier supérieur)

# Problème 3

Essai clinique randomisé sur 1000 patients. On note T le groupe (T=1 traitement actif, T=0 placebo) et R l'issue binaire après 6 mois (R=1 récupération complète, R=0 non récupération).

| T \ R              | R = 1 (récup.) | R = 0 (échec) |
|--------------------|----------------|---------------|
| T = Traitement (1) | 0.42           | 0.08          |
| T = Placebo (0)    | 0.30           | 0.20          |

$$P(R = 1 \mid T = 1) = \frac{P(R = 1 \text{ et } T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{0,42}{0,5} = 0,84$$

$$P(R = 1 \mid T = 0) = \frac{P(R = 1 \text{ et } T = 0)}{P(T = 0)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

# Problème 3

Essai clinique randomisé sur 1000 patients. On note T le groupe (T=1 traitement actif, T=0 placebo) et R l'issue binaire après 6 mois (R=1 récupération complète, R=0 non récupération).

| T \ R              | R = 1 (récup.) | R = 0 (échec) |
|--------------------|----------------|---------------|
| T = Traitement (1) | 0.42           | 0.08          |
| T = Placebo (0)    | 0.30           | 0.20          |

$$AAR = P(R = 1 | T = 1) - P(R = 1 | T = 0) = 0,84 - 0,6 = 0,24$$

$$NNT = \frac{1}{AAR} = \frac{1}{0,24} \approx 4,17$$

En soignant 5 patients avec le traitement actif, on engendre une récupération supplémentaire en moyenne (ou on évite un échec)