



Rappels et exercices sur espérance et variance pour les lois discrètes

Licence Sciences pour la Santé

Intervenant : Mathieu Fauvernier

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- L'espérance d'une v.a.r correspond à sa valeur moyenne

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Soit une fonction h , comment définir $E[h(X)]$?

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Exemple : soit X la variable aléatoire telle que les valeurs possibles et probabilités associées sont données ci-dessous

x	-2,5	0	1	2
$P(X=x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

- Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Exemple : soit X la variable aléatoire telle que les valeurs possibles et probabilités associées sont données ci-dessous

x	-2,5	0	1	2
$P(X=x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

- $E(X) = -2,5 * 0,2 + 0 * 0,4 + 1 * 0,3 + 2 * 0,1 = 0$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Exemple : soit X la variable aléatoire telle que les valeurs possibles et probabilités associées sont données ci-dessous

x	-2,5	0	1	2
x^2	6,25	0	1	4
$P(X=x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

- $E(X^2) = ?$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Exemple : soit X la variable aléatoire telle que les valeurs possibles et probabilités associées sont données ci-dessous

x	-2,5	0	1	2
x^2	6,25	0	1	4
$P(X=x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

- $E(X^2) = 6,25 * 0,2 + 0 * 0,4 + 1 * 0,3 + 4 * 0,1 = 1,95$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

- Soit une fonction h , comment définir $E[h(X)]$?

$$E[h(X)] = \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)P(X = x_i)$$

Variance d'une variable aléatoire

La variance d'une v.a.r mesure la dispersion autour de la moyenne

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

L'écart-type correspond à la racine carrée de la variance

$$\sigma[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Variance d'une variable aléatoire

La variance d'une variable aléatoire mesure la dispersion autour de la moyenne

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

Problème 1

- Naissances multiples

x	1	2	3	4	5+
$P(X=x)$	96%	3%	0,9%	0,07%	0,03%

Le ministère des Solidarités et de la Santé estime le coût annuel moyen d'un enfant à 9 000 €.

Quelle est la loi du coût moyen, son espérance et sa variance ?

Problème 1

- Naissances multiples

x	1	2	3	4	5+
coût	9k	18k	27k	36k	45k
P(X=x)	96%	3%	0,9%	0,07%	0,03%

$$E(\text{Coût}) = E(9000 * X) = 9000 * E(X) = 9461,7 \text{ avec}$$

$$E(X) = 1 * 0,96 + 2 * 0,03 + 3 * 0,009 + 4 * 0,0007 + 5 * 0,0003 \\ = 1,0513$$

Problème 1

- Naissances multiples

x	1	2	3	4	5+
coût	9k	18k	27k	36k	45k
P(X=x)	96%	3%	0,9%	0,07%	0,03%

$$Var(Cout) = Var(9000 * X) = 9000^2 * Var(X) = 6031933 \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1 - 1,05)^2 * 0,96 + (2 - 1,05)^2 * 0,03 + (3 - 1,05)^2 * 0,0009 \\ &+ (4 - 1,05)^2 * 0,00007 + (5 - 1,05)^2 * 0,00003 \approx 0,0745 \end{aligned}$$

Problème 1

- Naissances multiples

x	1	2	3	4	5+
coût	9k	18k	27k	36k	45k
P(X=x)	96%	3%	0,9%	0,07%	0,03%

$$Var(Cout) = Var(9000 * X) = 9000^2 * Var(X) = 6031933 \text{ avec}$$

L'unité de la variance est en euros² donc pas super interprétable !

$$\text{Ecart-type} = \sqrt{6031933} = 2456 \text{ euros}$$

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

- Pour un âge donné a , la pression est donnée par (en mmHg) :
$$Pre(a) = 0,01 * a^2 + 0,05 * a + 107$$

Calculer $E(\text{Age})$, $\text{Var}(\text{Age})$, ainsi que $E(\text{Pre})$ et $\text{Var}(\text{Pre})$

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

$$E(Age) = 20 * 0,05 + 30 * 0,1 + 40 * 0,2 + 50 * 0,3 + 60 * 0,35 = 48$$

$$\begin{aligned} & \text{Var}(Age) \\ &= (20 - 48)^2 * 0,05 + (30 - 48)^2 * 0,1 + (40 - 48)^2 * 0,2 \\ &+ (50 - 48)^2 * 0,3 + (60 - 48)^2 * 0,35 = 136 \end{aligned}$$

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

Sachant que $E(Age) = 48$, et que

$$Pre(a) = 0,01 * a^2 + 0,05 * a + 107$$

A-t-on $E(Pre) = Pre(48) = 132,44$?

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
Pre	112	117,5	125	134,5	146
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

$$E(Pre)$$

$$\begin{aligned} &= 112 * 0,05 + 117,5 * 0,1 + 125 * 0,2 + 134,5 * 0,3 + 146 * 0,35 \\ &= 133,8 \neq Pre(48) \end{aligned}$$

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
Pre	112	117,5	125	134,5	146
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

$Var(Pre)$

$$= (112 - 133,8)^2 * 0,05 + (117,5 - 133,8)^2 * 0,1 + (125 - 133,8)^2 * 0,2 + (134,5 - 133,8)^2 * 0,3 + (146 - 133,8)^2 * 0,35 = 118,06$$

Problème 2

- On s'intéresse à la pression artérielle systolique prédite à partir de l'âge. On dispose d'un groupe de patientes dont la distribution d'âge est la suivante (on donne les âges médians de 5 classes d'âges)

age	20	30	40	50	60
Pre	112	117,5	125	134,5	146
P(Age=age)	5%	10%	20%	30%	35%

$$Var(Pre) = 118,06$$

$$Ecart_type(Pre) = 10,87$$

Problème 3

Des patients subissent une opération chirurgicale nécessitant l'administration préalable d'un réactif. La distribution des durées d'opérations est donnée ci-dessous

durée	1	2	3	4	5
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

Sachant que la quantité de réactif présente dans l'organisme en fonction du temps est

$$R(t) = -t^2 + 6 * t$$

Calculer $E(R(Durée))$ et $Var(R(Durée))$

Problème 3

Des patients subissent une opération chirurgicale nécessitant l'administration préalable d'un réactif. La distribution des durées d'opérations est donnée ci-dessous

durée	1	2	3	4	5
R(durée)	5	8	9	8	5
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

$$E(R(Durée)) = 5 * 0,1 + 8 * 0,4 + 9 * 0,3 + 8 * 0,15 + 5 * 0,05 \\ = 7,85$$

Problème 3

Des patients subissent une opération chirurgicale nécessitant l'administration préalable d'un réactif. La distribution des durées d'opérations est donnée ci-dessous

durée	1	2	3	4	5
R(durée)	5	8	9	8	5
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

$$\begin{aligned} &Var(R(Durée)) \\ &= (5 - 7,85)^2 * 0,1 + (8 - 7,85)^2 * 0,4 + (9 - 7,85)^2 * 0,3 \\ &+ (8 - 7,85)^2 * 0,15 + (5 - 7,85)^2 * 0,05 = 1,6275 \end{aligned}$$

Problème 3

Des patients subissent une opération chirurgicale nécessitant l'administration préalable d'un réactif. La distribution des durées d'opérations est donnée ci-dessous

durée	1	2	3	4	5
R(durée)	5	8	9	8	5
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

Sachant que l'on doit garder les patients en salles de réveil tant qu'il reste du réactif dans leur organisme. Combien de temps, en moyenne, un patient attendra-t-il en salle de réveil ?

Problème 3

durée	1	2	3	4	5
R(durée)	5	8	9	8	5
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

La quantité de réactif présente dans l'organisme en fonction du temps est

$$R(t) = -t^2 + 6 * t$$

Cette quantité est nulle lorsque $R(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$ ou $t = 0$

Problème 3

Durée	1	2	3	4	5
Temps d'attente	5	4	3	2	1
P(Durée=durée)	10%	40%	30%	15%	5%

$$E(\text{Temps attente}) = 5 * 0,1 + 4 * 0,4 + 3 * 0,3 + 2 * 0,15 + 1 * 0,05 \\ = 0,5 + 1,6 + 0,9 + 0,3 + 0,05 = 3,35$$