

Couples de variables discrètes : lois jointe, marginale et conditionnelle

Licence Sciences pour la Santé

Intervenant : Mathieu Fauvernier

Question introductive

X et Y suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$

Que vaut la probabilité suivante ?

$$P(X = 0, Y = 0)$$

Question introductive

X et Y suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$

Que vaut la probabilité suivante ?

$$P(X = 0, Y = 0)$$

IMPOSSIBLE DE REPONDRE ! On ne connaît pas la dépendance entre X et Y (on pourrait très bien avoir $X=Y$ ou $X=1-Y$ ou autre)

Couple de variables aléatoires et loi jointe

Soit un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y)

La loi jointe du couple permet de caractériser la probabilité que X et Y prennent **conjointement** un couple de valeurs

$$P(X = x, Y = y)$$

La loi jointe est aussi appelée loi conjointe

Loi jointe et indépendance

De manière générale la loi jointe a une expression très complexe.

On fait donc souvent l'hypothèse d'indépendance, qui implique

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$$

Loi jointe et indépendance

De manière générale la loi jointe a une expression très complexe.

On fait donc souvent l'hypothèse d'indépendance, qui implique

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$$

Note : $P(X = x, Y = y)$ peut s'écrire

$$P(X = x \text{ et } Y = y) \text{ ou } P(X = x \cap Y = y)$$

Exemple de loi jointe

On lance deux dés. Quelle est la loi du couple de dés ?

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Attention ici on suppose que les dés sont indépendants !

Loi marginale

Lorsque l'on on un couple de variables (X, Y) , la loi de X est appelée première loi marginale et la loi de Y est la seconde loi marginale.

Il est possible de retrouver une loi marginale à partir de la loi jointe.

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Exemple de loi marginale

On lance deux dés. Quelle est la loi du dé 1 ?

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6	Somme des probas du dé 2
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36=1/6

Exemple de loi marginale - 2

D'après la loi du couple suivant, donner la loi marginale de X

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Exemple de loi marginale - 2

On a

$$P(X = -3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = -2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Rappels sur les probabilités conditionnelles

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et A et B deux événements aléatoires tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Loi conditionnelle

Lorsque l'on on un couple de variables (X, Y) , la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par les probabilités suivantes

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Attention il faut $P(Y = y) \neq 0$

Exemple de loi conditionnelle

D'après la loi du couple suivant, donner la loi de X sachant $Y=5$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Exemple de loi conditionnelle

$$\text{On a } P(Y = 5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$P(X = -3|Y = 5) = \frac{\frac{1}{8}}{P(Y = 5)}$$

$$P(X = -2|Y = 5) = \frac{\frac{1}{8}}{P(Y = 5)}$$

$$P(X = -1|Y = 5) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 5) = \frac{\frac{1}{6}}{P(Y = 5)}$$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$E(X|Y = y) = \sum_x x * P(X = x|Y = y)$$

Attention il faut $P(Y = y) \neq 0$

Exemple d'espérance conditionnelle

D'après la loi du couple suivant, donner l'espérance de X sachant $Y=5$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Exemple d'espérance conditionnelle

On avait $P(Y = 5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$$P(X = -3|Y = 5) = \frac{\frac{1}{8}}{P(Y = 5)}$$

$$P(X = -2|Y = 5) = \frac{\frac{1}{8}}{P(Y = 5)}$$

$$P(X = -1|Y = 5) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 5) = \frac{\frac{1}{6}}{P(Y = 5)}$$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Exemple d'espérance conditionnelle

Donc

$$E(X|Y = 5) = \frac{1}{P(Y = 5)} \left(-3 * \frac{1}{8} - 2 * \frac{1}{8} \right)$$

$$E(X|Y = 5) = \frac{12}{5} \left(-\frac{5}{8} \right) = -\frac{3}{2}$$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Loi de l'espérance totale

L'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$E(X|Y = y) = \sum_x x * P(X = x|Y = y)$$

Et on a

$$E(X) = ?$$

Loi de l'espérance totale

L'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$E(X|Y = y) = \sum_x x * P(X = x|Y = y)$$

Et on a

$$E(X) = \sum_y E(X|Y = y) * P(Y = y)$$

Loi de l'espérance totale

L'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$E(X|Y = y) = \sum_x x * P(X = x|Y = y)$$

Et on a

$$E(X) = \sum_y E(X|Y = y) * P(Y = y)$$

Exemple : calcul de la moyenne générale à partir des moyennes par matières et des coefficients de chaque matière

Espérance d'une fonction d'un couple

Soit une fonction g , alors on a

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) * P(X = x, Y = y)$$

Exemple d'espérance d'une fonction d'un couple

D'après la loi du couple suivant, donner $E(XY)$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

Exemple d'espérance d'une fonction d'un couple

$$\begin{aligned}
 E(XY) = & -3 * 5 * \frac{1}{8} - 2 * 5 * \frac{1}{8} - 1 * 5 * 0 + 0 * 5 * \frac{1}{6} - \\
 & 3 * 6 * \frac{1}{24} - 2 * 6 * \frac{1}{8} - 1 * 6 * \frac{1}{6} + 0 * 6 * \frac{1}{12} - \\
 & 3 * 7 * \frac{1}{12} - 2 * 7 * 0 - 1 * 7 * \frac{1}{12} + 0 * 7 * 0
 \end{aligned}$$

		Y		
		5	6	7
X	-3	1/8	1/24	1/12
	-2	1/8	1/8	0
	-1	0	1/6	1/12
	0	1/6	1/12	0

loi conditionnelle : quel intérêt ?

Dans la vraie vie, lorsque l'on souhaite prendre une décision :

- Il existe plusieurs possibilités (par définition) -> les probas sont utiles
- On a des connaissances préalables à la prise de décision -> conditionnement

Exercice : probabilités pré- et post-test

Soit une maladie M de prévalence $P(M)$

Un individu effectue un test de dépistage. Supposons le test positif (événement T), quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice : probabilités pré- et post-test

Soit une maladie M de prévalence $P(M)$

Un individu effectue un test de dépistage. Supposons le test positif (événement T), quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

On cherche à calculer $P(M|T)$

Exercice : probabilités pré- et post-test

Soit une maladie M de prévalence $P(M)$

Un individu effectue un test de dépistage. Supposons le test positif (événement T), quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

On cherche à calculer $P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$

Avec $P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})$

Exercice : probabilités pré- et post-test

$P(M)$: probabilité pré-test

$P(M|T)$: probabilité post-test

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

Si $P(M) = 0,1$; $P(T|M) = 0,99$; $P(T|\bar{M}) = 0,01$

Alors

$$P(M|T) \approx 0,92$$

Exercice : probabilités pré- et post-test

$P(M)$: probabilité pré-test

$P(M|T)$: probabilité post-test

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

Si $P(M) = 0,001$; $P(T|M) = 0,99$; $P(T|\bar{M}) = 0,01$

Alors

$$P(M|T) \approx 0,09$$

Exercice : probabilités pré- et post-test

La probabilité post-test est une mise à jour de la probabilité pré-test