Variables aléatoires - Espérance

Mathieu Fauvernier

Licence Siences pour la Santé

Motivation

On a vu précédemment que l'ensemble des résultats possible d'une expérience aléatoire se nomme univers (noté Ω)

De manière générale, l'**expérience aléatoire en elle-même nous intéresse peu**.

Motivation

On a vu précédemment que l'ensemble des résultats possible d'une expérience aléatoire se nomme univers (noté Ω)

De manière générale, l'**expérience aléatoire en elle-même nous intéresse peu**.

Exemple : si vous jouez à la roulette, la case aléatoire sur laquelle finira la bille n'a pas beaucoup d'intérêt, contrairement à votre gain (ou perte) potentiel

Motivation

On a vu précédemment que l'ensemble des résultats possible d'une expérience aléatoire se nomme univers (noté Ω)

De manière générale, l'**expérience aléatoire en elle-même nous intéresse peu**.

Exemple : si vous jouez à la roulette, la case aléatoire sur laquelle finira la bille n'a pas beaucoup d'intérêt, contrairement à votre gain (ou perte) potentiel
$\Rightarrow$ Très souvent, c'est une fonction de l'expérience aléatoire (appelée **variable aléatoire**) qui nous intéresse (pas l'expérience elle-même)

Exemple introductif

Supposons maintenant qu'on s'intéresse à la somme des dés suite au lancer de 2 dés indépendants.

La variable aléatoire d'intérêt est la fonction de $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Exemple introductif

Supposons maintenant qu'on s'intéresse à la somme des dés suite au lancer de 2 dés indépendants.

La variable aléatoire d'intérêt est la fonction de $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Pour décrire le comportement, ou plus précisément **la loi** de S, il suffit de connaître :

Exemple introductif

Supposons maintenant qu'on s'intéresse à la somme des dés suite au lancer de 2 dés indépendants.

La variable aléatoire d'intérêt est la fonction de $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Pour décrire le comportement, ou plus précisément **la loi** de S, il suffit de connaître :

- L'ensemble des valeurs possibles :

Exemple introductif

Supposons maintenant qu'on s'intéresse à la somme des dés suite au lancer de 2 dés indépendants.

La variable aléatoire d'intérêt est la fonction de $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Pour décrire le comportement, ou plus précisément **la loi** de S, il suffit de connaître :

- L'ensemble des valeurs possibles : $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Exemple introductif

Supposons maintenant qu'on s'intéresse à la somme des dés suite au lancer de 2 dés indépendants.

La variable aléatoire d'intérêt est la fonction de $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Pour décrire le comportement, ou plus précisément **la loi** de S, il suffit de connaître :

- L'ensemble des valeurs possibles : $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- La probabilité de chaque valeur ($\mathbb{P}(S = 2) = \frac{1}{36}, \mathbb{P}(S = 3) = \frac{2}{36}, \cdots, \mathbb{P}(S = 7) = \frac{6}{36}, \cdots, \mathbb{P}(S = 12) = \frac{1}{36}$)

Variables aléatoires discrètes

Dans ce cours on considérera des variables aléatoires réelles X sur un univers Ω comme des fonctions de Ω dans $E \subset \mathbb{R}$:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in E$$

Variables aléatoires discrètes

Dans ce cours on considérera des variables aléatoires réelles X sur un univers Ω comme des fonctions de Ω dans $E \subset \mathbb{R}$:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in E$$

En outre, les variables étudiées seront des **variables aléatoires discrètes**

Variables aléatoires discrètes

Dans ce cours on considérera des variables aléatoires réelles X sur un univers Ω comme des fonctions de Ω dans $E \subset \mathbb{R}$:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in E$$

En outre, les variables étudiées seront des **variables aléatoires discrètes**

C'est à dire des variables aléatoires pour lesquelles l'ensemble E des valeurs possible est

- fini (exemple $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- infini dénombrable (exemple $\mathbb{N}$)

Encore un peu de motivation

Plusieurs **expériences aléatoires** différentes peuvent donner la **même variable aléatoire**. Par exemple, pour jouer à Pile ou Face équilibré, on peut

1. Lancer une pièce équilibrée
2. Lancer un dé à 6 faces équilibré et regarder si le résultat est pair
3. Tirer une carte dans un jeu uniformément, et regarder si la couleur est rouge

Encore un peu de motivation

Plusieurs **expériences aléatoires** différentes peuvent donner la **même variable aléatoire**. Par exemple, pour jouer à Pile ou Face équilibré, on peut

1. Lancer une pièce équilibrée
2. Lancer un dé à 6 faces équilibré et regarder si le résultat est pair
3. Tirer une carte dans un jeu uniformément, et regarder si la couleur est rouge

Pour chacun de ces cas, l'espace de probabilité serait différent :

1. $\Omega = \{Pile, Face\}$.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. $\Omega = \{A\diamondsuit, A\clubsuit, A\heartsuit, A\spadesuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, \cdots, K\diamondsuit, K\clubsuit, K\heartsuit, K\spadesuit\}$.

Encore un peu de motivation

1. Lancer une pièce équilibrée

$$\Omega = \{Pile, Face\} \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega = Pile}$$

Encore un peu de motivation

1. Lancer une pièce équilibrée

$$\Omega = \{Pile, Face\} \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega = Pile}$$

2. Lancer un dé à 6 faces équilibré et regarder si le résultat est pair

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega \in \{2,4,6\}}$$

Encore un peu de motivation

1. Lancer une pièce équilibrée

$$\Omega = \{Pile, Face\} \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega = Pile}$$

2. Lancer un dé à 6 faces équilibré et regarder si le résultat est pair

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega \in \{2,4,6\}}$$

3. Tirer une carte dans un jeu uniformément, et regarder si la couleur est rouge

$$\Omega = \{A\diamondsuit, A\clubsuit, A\heartsuit, A\spadesuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, \cdots, K\diamondsuit, K\clubsuit, K\heartsuit, K\spadesuit\}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{52} \qquad X : \omega \mapsto \mathbb{1}_{\omega \in \{A\diamondsuit, A\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\heartsuit, \cdots, K\diamondsuit, K\heartsuit\}}$$

Une variable aléatoire X définie une **loi de probabilité** $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}\Big).$$

Remarque : à partir de maintenant, on utilisera les notations

$$\mathbb{P}(X \in A) \text{ et } \mathbb{P}(X = x)$$

Lois discrètes usuelles : loi uniforme

X est une variable aléatoire de **loi uniforme discrète** sur $\{1, \cdots, n\}$ (noté $X \sim \mathcal{U}\Big(\{1, \cdots, n\}\Big)$ si X est à valeurs dans $\{1, \cdots, n\}$, et si

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \mathbb{P}\Big(X = k\Big) = \frac{1}{n}.$$

Lois discrètes usuelles : loi uniforme

X est une variable aléatoire de **loi uniforme discrète** sur $\{1, \cdots, n\}$ (noté $X \sim \mathcal{U}\Big(\{1, \cdots, n\}\Big)$ si X est à valeurs dans $\{1, \cdots, n\}$, et si

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \mathbb{P}\Big(X = k\Big) = \frac{1}{n}.$$

Exemples : Valeur d'un dé, numéro de case (roulette), $\cdots$

Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli

X est une variable aléatoire de **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ (noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou $X \sim \mathcal{B}er(p)$) si X peut prendre les valeurs 0 et 1, et que

$$\mathbb{P}\Big(X = 1\Big) = p \ ; \ \ \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) = 1 - p.$$

Lois discrètes usuelles : loi de Bernoulli

X est une variable aléatoire de **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ (noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou $X \sim \mathcal{B}er(p)$) si X peut prendre les valeurs 0 et 1, et que

$$\mathbb{P}\Big(X = 1\Big) = p \ ; \ \ \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) = 1 - p.$$

Exemples : Pile ou face, présence ou absence de maladie, statut fumeur ou non, vainqueur présidentielle , $\cdots$

X est une variable aléatoire de **loi Binomiale** de paramètres N et p (noté $X \sim \mathcal{B}(N,p)$ ou $X \sim \mathcal{B}in(N,p)$) si X peut prendre les valeurs $\{0,\cdots,N\}$, et

$$\forall k \in \{0,\cdots,N\}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Lois discrètes usuelles : loi binomiale

X est une variable aléatoire de **loi Binomiale** de paramètres N et p (noté $X \sim \mathcal{B}(N, p)$ ou $X \sim \mathcal{B}in(N, p)$) si X peut prendre les valeurs $\{0, \cdots, N\}$, et

$$\forall k \in \{0, \cdots, N\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Exemples : Cette loi est utilisée dès que l'on modélise le nombre de "succès" à plusieurs "épreuves de Bernoulli indépendantes", par exemple lorsqu'on compte le nombre d'individus présentant un certain caractère dans une population homogène

X est une variable aléatoire de **loi de Poisson** de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

X est une variable aléatoire de **loi de Poisson** de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Exemples : Cette loi apparaît naturellement comme limite de la loi Binomiale, quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini. Cela permet de modéliser le nombre d'événements ponctuels arrivant durant une certaine durée, ou dans une certaine zone spatiale.

Lois discrètes usuelles : loi géométrique

X est une variable aléatoire de **loi géométrique** de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^{\star}$[1], et vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

X est une variable aléatoire de **loi géométrique** de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^{\star 1}$, et vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Exemples : Nombre de tentatives avant de réussir une expérience, réalisée dans les mêmes conditions. Cette loi représente l'instant du premier succès à une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Variables identiquement distribuées

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y ont même loi si

- elles ont le même ensemble de valeurs $k_i, i \geq 0$ possibles
- $\mathbb{P}(X = k_i) = \mathbb{P}(Y = k_i), \forall i \geq 0.$

On dit aussi que X et Y sont **identiquement distribuées**.

Variables identiquement distribuées

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y ont même loi si

- elles ont le même ensemble de valeurs $k_i, i \geq 0$ possibles
- $\mathbb{P}(X = k_i) = \mathbb{P}(Y = k_i), \forall i \geq 0$.

On dit aussi que X et Y sont **identiquement distribuées**.

Deux variables identiquement distribuées ne sont pas forcément égales !

Considérer $X \sim \mathcal{B}(1/2)$ et $Y = 1 - X$

Variable aléatoire : indépendance

Comme pour les événements, des variables aléatoires peuvent être **indépendantes**

Variable aléatoire : indépendance

Comme pour les événements, des variables aléatoires peuvent être **indépendantes**

Lorsque les X_i sont discrètes, il suffit de vérifier

$$\mathbb{P}\Big(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 = x_1\Big) \cdots \mathbb{P}\Big(X_n = x_n\Big)$$

Espérance

La notion d'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire correspond à la notion intuitive de "moyenne sur le hasard".

Espérance

La notion d'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire correspond à la notion intuitive de “moyenne sur le hasard”.

Attention à la confusion entre

- Moyenne d'un échantillon : on fait la moyenne **après** une expérience sur les résultats de l'expérience. Par exemple, je lance 4 fois un dé à 6 faces, et j'obtiens $3, 4, 2, 3$, alors la moyenne de ces résultats est de $\frac{3+4+2+3}{4} = 3$

Espérance

La notion d'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire correspond à la notion intuitive de "moyenne sur le hasard".

Attention à la confusion entre

- Moyenne d'un échantillon : on fait la moyenne **après** une expérience sur les résultats de l'expérience. Par exemple, je lance 4 fois un dé à 6 faces, et j'obtiens $3, 4, 2, 3$, alors la moyenne de ces résultats est de $\frac{3+4+2+3}{4} = 3$
- Espérance d'une variable aléatoire X : on peut la calculer **avant** une expérience. Par exemple, pour un dé à 6 faces, l'espérance correspond au résultat moyen que l'on peut espérer avec ce dé, en prenant en compte la probabilité d'obtenir chaque face :

$$E[X] = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} = 3.5$$

Espérance

Soit X une v.a.r discrète, pouvant prendre les valeurs $x_i, i \geq 0$. On définit l'**espérance** de X, et on note $\mathbb{E}[X]$, la quantité :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Espérance

Soit X une v.a.r discrète, pouvant prendre les valeurs $x_i, i \geq 0$. On définit l'**espérance** de X, et on note $\mathbb{E}[X]$, la quantité :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Propriétés importantes :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[a] = a.$
2. Linéarité : $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$

Exercice 1

Loi de Bernoulli est telle que $X \sim \mathcal{B}er(p)$

$$\mathbb{P}\Big(X = 1\Big) = p \ ; \ \ \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) = 1 - p.$$

Donner $E[X]$

Exercice 1

Loi de Bernoulli est telle que $X \sim \mathcal{B}er(p)$

$$\mathbb{P}\Big(X = 1\Big) = p \ ; \ \ \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) = 1 - p.$$

Donner $E[X]$

$$E[X] = 1 * \mathbb{P}\Big(X = 1\Big) + 0 * \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) = p$$

Exercice 2

Chaque jour, il est nécessaire de changer les filtres de patients sous dialyse

Pour chaque patient, le nombre de changements par jour est une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	p/2	0.3	0.2	0.1	0.4 - p/2

L'hôpital compte 30 patients dialysés, combien de filtres doit-on changer par jour en moyenne ?

Exercice 2

Chaque jour, il est nécessaire de changer les filtres de patients sous dialyse

Pour chaque patient, le nombre de changements par jour est une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	p/2	0.3	0.2	0.1	0.4 - p/2

L'hôpital compte 30 patients dialysés, combien de filtres doit-on changer par jour en moyenne ?

On cherche $E[30 * X] = 30 * E[X]$ avec

$$E[X] = 0 * \mathbb{P}\Big(X = 0\Big) + 1 * \mathbb{P}\Big(X = 1\Big) + \cdots + 4 * \mathbb{P}\Big(X = 4\Big)$$

$$E[X] = 1 * 0.3 + 2 * 0.2 + 3 * 0.1 + 4 * (0.4 - p/2) = 2.6 - 2p$$

Exercice 3

Chaque nuit, n marins complètement ivres rentrent au navire. Chaque marin choisit aléatoirement et uniformément une des r cabines (il ignore ceux déjà présents et s'endort quoi qu'il arrive).

Chaque nuit, combien de cabines sont inoccupées en moyenne ?

Exercice 3

Chaque nuit, n marins complètement ivres rentrent au navire. Chaque marin choisit aléatoirement et uniformément une des r cabines (il ignore ceux déjà présents et s'endort quoi qu'il arrive).

Chaque nuit, combien de cabines sont inoccupées en moyenne ?

Vous utiliserez les variables aléatoires suivantes

$$X_i = 1 \qquad \text{si la cabine i est vide, et 0 sinon}$$

$$S = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

Exercice 3

Chaque nuit, n marins complètement ivres rentrent au navire. Chaque marin choisit aléatoirement et uniformément une des r cabines (il ignore ceux déjà présents et s'endort quoi qu'il arrive).

Chaque nuit, combien de cabines sont inoccupées en moyenne ?

Vous utiliserez les variables aléatoires suivantes

$$X_i = 1 \qquad \text{si la cabine i est vide, et 0 sinon}$$

$$S = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

On cherche donc $E[S]$

Exercice 3

Chaque nuit, n marins complètement ivres rentrent au navire. Chaque marin choisit aléatoirement et uniformément une des r cabines (il ignore ceux déjà présents et s'endort quoi qu'il arrive).

Chaque nuit, combien de cabines sont inoccupées en moyenne ?

Vous utiliserez les variables aléatoires suivantes

$$X_i = 1 \qquad \text{si la cabine i est vide, et 0 sinon}$$

$$S = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

On cherche donc $E[S]$

$$E[S] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = r * E[X_1]$$

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

$$E[X_1] = 0 * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$$

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

$$E[X_1] = 0 * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$$

Que vaut $P(X_1 = 1)$?

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas et} \cdots \text{et Marin n n'y est pas})$$

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

$$E[X_1] = 0 * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$$

Que vaut $P(X_1 = 1)$?

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas et} \cdots \text{et Marin n n'y est pas})$$

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas}) * \cdots * P(\text{Marin n n'y est pas})$$

Mais que vaut $P(\text{Marin 1 n'y est pas})$?

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

$$E[X_1] = 0 * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$$

Que vaut $P(X_1 = 1)$?

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas et} \cdots \text{et Marin n n'y est pas})$$

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas}) * \cdots * P(\text{Marin n n'y est pas})$$

Mais que vaut $P(\text{Marin 1 n'y est pas})$?

$$P(\text{Marin 1 n'y est pas}) = 1 - 1/r$$

Donc

Exercice 3

Que vaut $E[X_1]$?

$$E[X_1] = 0 * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1)$$

Que vaut $P(X_1 = 1)$?

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas et} \cdots \text{et Marin n n'y est pas})$$

$$P(X_1 = 1) = P(\text{Marin 1 n'y est pas}) * \cdots * P(\text{Marin n n'y est pas})$$

Mais que vaut $P(\text{Marin 1 n'y est pas})$?

$$P(\text{Marin 1 n'y est pas}) = 1 - 1/r$$

Donc

$$P(X_1 = 1) = (1 - 1/r)^n$$

Exercice 3

Au final, la réponse au problème est

$$E[S] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = r * E[X_1] = r * (1 - 1/r)^n$$

Exercice 3

Au final, la réponse au problème est

$$E[S] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = r * E[X_1] = r * (1 - 1/r)^n$$

S'il y a 5 marins et 5 cabines, cela donne $E[S] \approx 1.64$
S'il y a 10 marins et 10 cabines, cela donne $E[S] \approx 3.49$
S'il y a 10 marins et 7 cabines, cela donne $E[S] \approx 1.50$