

# Rappels de probabilités et lois usuelles

---

LICENCE SCIENCES POUR LA SANTÉ

Intervenant : Mathieu Fauvernier

# Comment on mesure des trucs ?

---

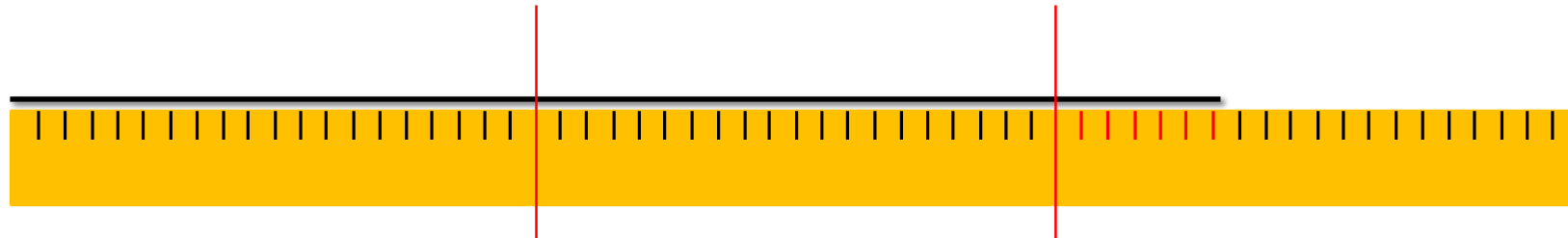
Comment mesurer la longueur du segment noir avec la règle orange ?



# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la longueur du segment noir avec la règle orange ?



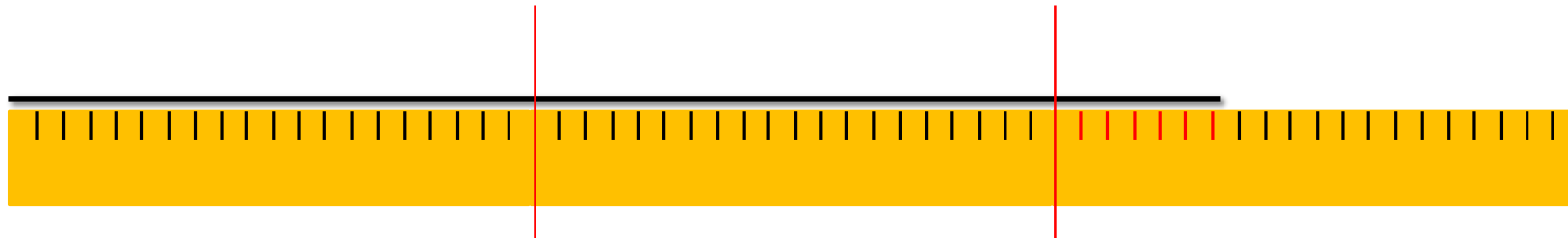
On va faire correspondre la longueur du segment avec un multiple de la longueur de la règle :  $l(\text{segment}) = 2 * l(\text{règle}) + \frac{6}{20} * l(\text{règle}) + \dots$

Les « ... » représentent la limite de notre précision

# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la longueur du segment noir avec la règle orange ?



A la fin on peut toujours trouver  $x$  tel que :  $l(\text{segment}) = x \cdot l(\text{règle})$

Même si  $x$  sera probablement non entier

# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la surface du rectangle noir avec le carré orange ?



# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la surface du rectangle noir avec le carré orange ?



# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la surface du rectangle noir avec le carré orange ?



# Comment on mesure des trucs ?

---

Comment mesurer la surface du rectangle noir avec le carré orange ?



Comme pour la longueur, la surface du rectangle sera multiple de la surface du carré (mais ce multiple « x » sera probablement non entier)

$$s(\text{rectangle noir}) = x * s(\text{carré orange})$$

# Comment on mesure des trucs ?

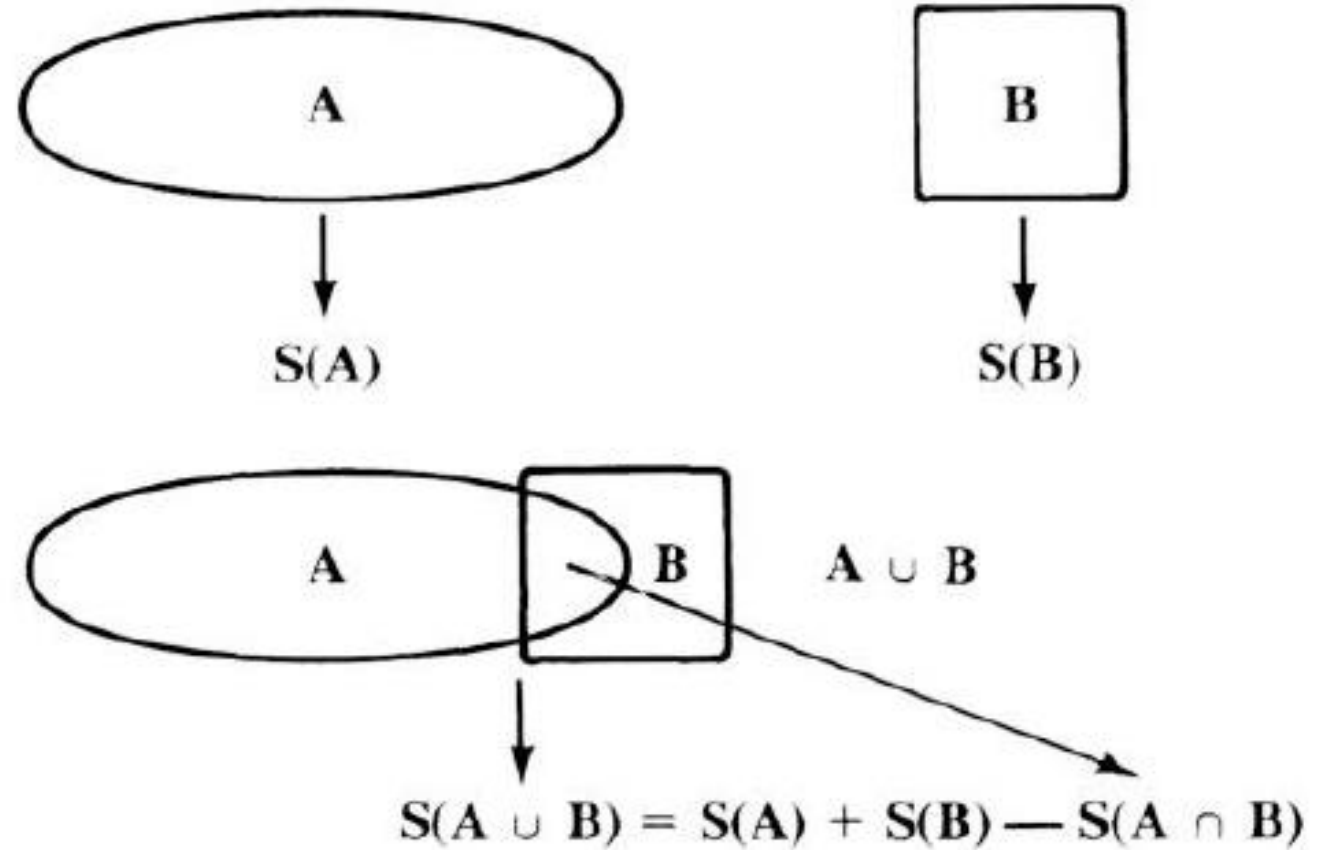
---

Quelques propriétés se dessinent :

1. La mesure est positive
2. Pour mesurer un objet il faut pouvoir mesurer toutes les sous-parties de cet objet (rappelez-vous, le multiple à trouver n'est pas entier)
3. Additivité : en prenant deux objets bout à bout, la mesure de l'ensemble est la somme des mesures

# Comment on mesure des trucs ?

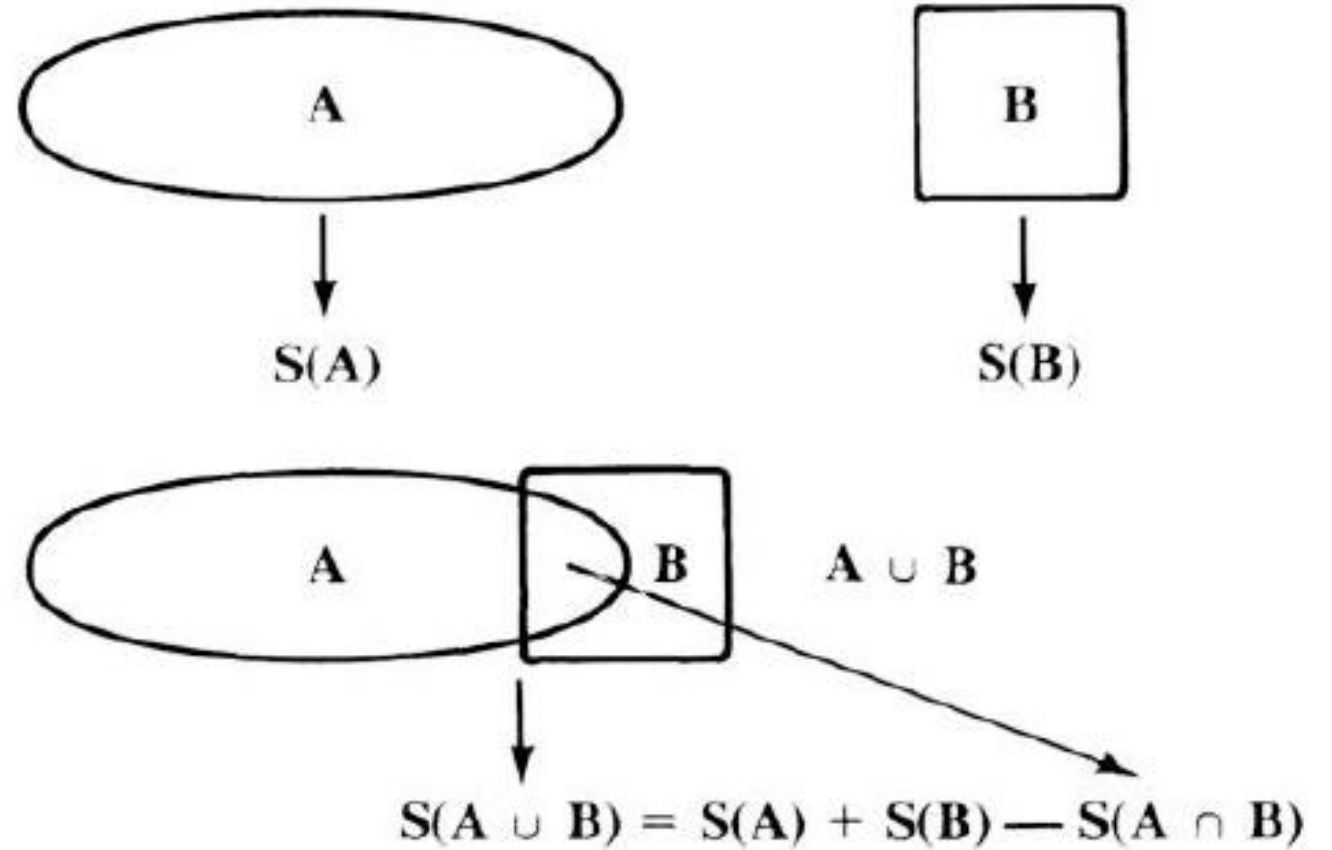
Concernant l'additivité,  
attention toutefois si les deux  
objets se recoupent (comme les  
surfaces ci-contre)



# Comment on mesure des trucs ?

Concernant l'additivité, attention toutefois si les deux objets se recoupent (comme les surfaces ci-contre)

Pour obtenir la surface de l'union, il faut enlever la mesure de l'intersection sinon elle est comptée deux fois



# Ok super, et les probas ?

---

1. La probabilité est un nombre positif
2. Prenons l'exemple d'un dé à 6 faces.

Proba d'avoir un chiffre pair ? On va sommer les probas d'avoir chacun des chiffres pairs.

# Ok super, et les probas ?

---

1. La probabilité est un nombre positif
2. Prenons l'exemple d'un dé à 6 faces.

Proba d'avoir un chiffre pair ? On va sommer les probas d'avoir chacun des chiffres pairs.

Proba d'avoir un chiffre pair ou un multiple de trois ? On va procéder par somme également mais en enlevant la proba d'avoir un six (car il est à la fois pair et multiple de trois)

# Ok super, et les probas ?

---

1. La probabilité est un nombre positif
2. Prenons l'exemple d'un dé à 6 faces.

Proba d'avoir un chiffre pair ? On va sommer les probas d'avoir chacun des chiffres pairs.

Proba d'avoir un chiffre pair ou un multiple de trois ? On va procéder par somme également mais en enlevant la proba d'avoir un six (car il est à la fois pair et multiple de trois)

 **additivité**

**Moralité : La probabilité est une mesure (appliquée à des ensembles)**

# Expérience aléatoire

---

Expérience aléatoire : expérience dont le résultat est non prédictible à l'avance (même si elle est répétée dans des conditions identiques)

$\Omega$  = Ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire

Ex :  $\Omega = \{pile, face\}$ ,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ...

Événement aléatoire  $A$  = Sous-ensemble de  $\Omega$  (mathématiquement, un événement est un ensemble)

Ex :  $A = \{2, 4, 6\}$

# Opérations sur les événements

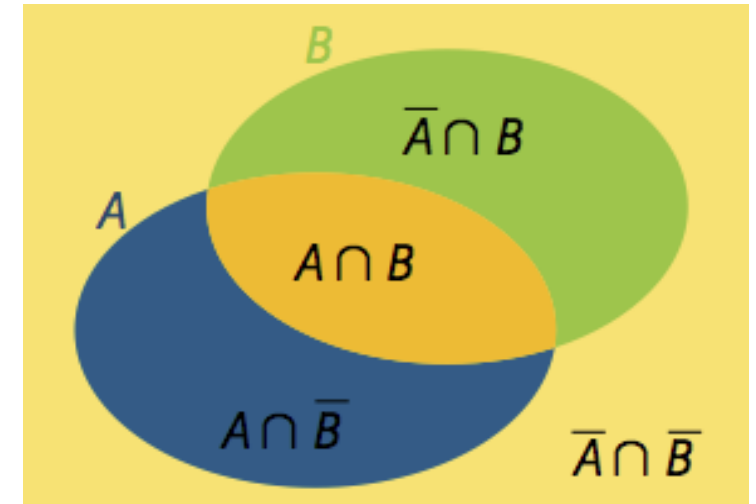
Complémentaire de l'événement  $A$  :  $A^C$  ou  $\bar{A}$

On note  $\Omega^C = \emptyset$  (ensemble vide, ou événement impossible)

Intersection des événements  $A$  et  $B$  :  $A \cap B$

Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont incompatibles

Union des événements  $A$  et  $B$  :  $A \cup B$



# Opérations sur les événements

---

- Ensemble des parties de  $\Omega$  (souvent noté  $\mathcal{A}$ )

Ex : Si  $\Omega = \{pile, face\}$ , alors  $\mathcal{A} = \{\emptyset, pile, face, \Omega\}$

Si  $\Omega = \{1,2,3\}$ , alors  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}$

- Si  $\Omega$  a  $N$  éléments, alors  $\mathcal{A}$  en compte  $2^N$
- On dit que  $(\Omega, \mathcal{A})$  est un espace probabilisable

# Probabilité

---

Probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  = application  $P$  de  $\mathcal{A}$  dans  $[0; 1]$  telle que

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une famille d'événements de  $\mathcal{A}$  2 à 2 incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se nomme un espace de probabilité

# Probabilité : propriétés

---

1.  $P(\emptyset) = 0$

2.  $P(A^c) = 1 - P(A)$

3. Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$

4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Probabilité conditionnelle

---

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $A$  et  $B$  deux événements aléatoires tels que  $P(B) \neq 0$ .

On appelle probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  la quantité

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

# Probabilité conditionnelle : exemple

---

Après un lancer de dé, quelle est la probabilité d'obtenir un 6 (A) sachant qu'on a eu un nombre pair (B) ?

# Probabilité conditionnelle : exemple

---

Après un lancer de dé, quelle est la probabilité d'obtenir un 6 (A) sachant qu'on a eu un nombre pair (B) ?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

# Probabilité conditionnelle : propriétés

---

1.  $P(\Omega|B) = 1$

2.  $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

3.  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

4.  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

# Formule des probabilités totales

---

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements formant une partition de  $\Omega$ , c'est-à-dire avec  $\bigcup A_i = \Omega$  et  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ .

Supposons de plus que  $P(A_i) \neq 0$  pour tout  $i$ .

Alors,

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)$$

# Formule des probabilités totales

---

Exemple avec  $(A_i)_{i \in I} = (B, B^c)$ .

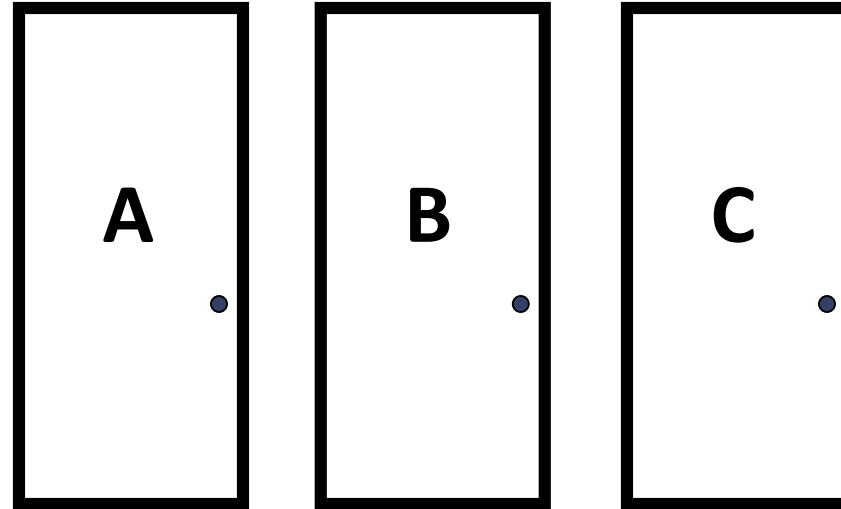
Alors,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

# Illustration : problème de Monty Hall

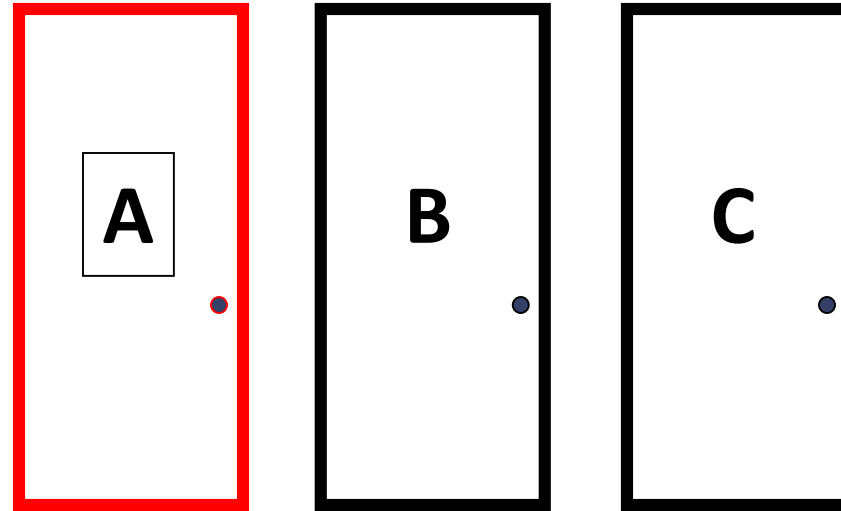
Derrière l'une de ces portes se cache une voiture

Derrière les deux autres se trouve une chèvre



Vous devez en choisir une



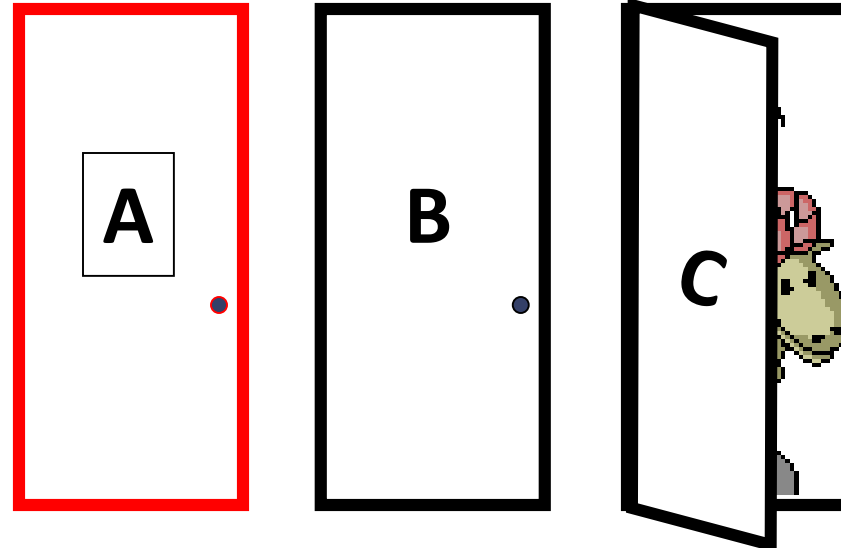


Imaginons que vous choisissiez la porte A

Vous avez choisi A

Jean-Pierre, (qui sait où se trouve la voiture) ouvre la porte C et découvre une chèvre

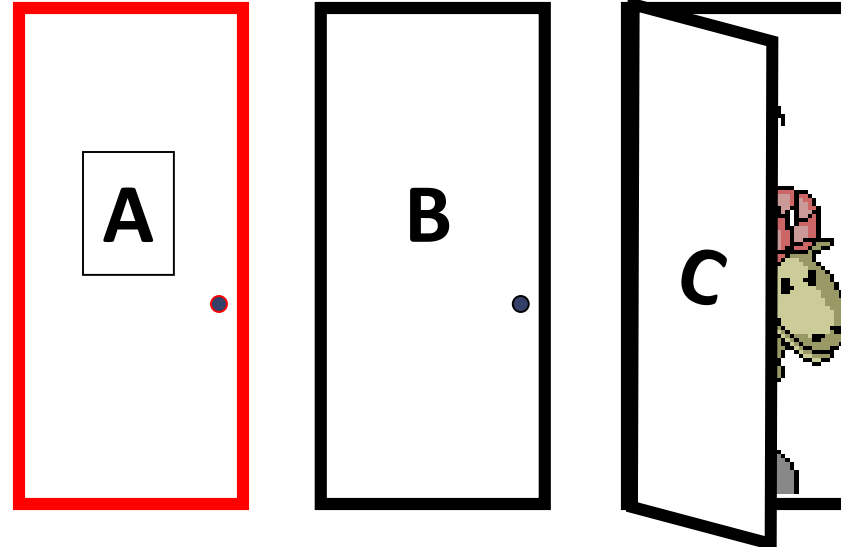
La voiture est donc derrière A ou B



A ce stade, Jean-Pierre vous propose de changer de porte

Que faites-vous ?

Gardez-vous la A ou changez-vous pour la B ?



Résolution via les probabilités totales. Soient les événements

G = gagner la voiture

B = choisir la bonne porte lors du choix initial

$$P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|B^c)P(B^c)$$

Résolution via les probabilités totales. Soient les événements

G = gagner la voiture

B = choisir la bonne porte lors du choix initial

$$P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|B^c)P(B^c)$$

Stratégie garder la porte initiale :

$$P(G) = 1 * 1/3 + 0 * 2/3 = 1/3$$

Résolution via les probabilités totales. Soient les événements

G = gagner la voiture

B = choisir la bonne porte lors du choix initial

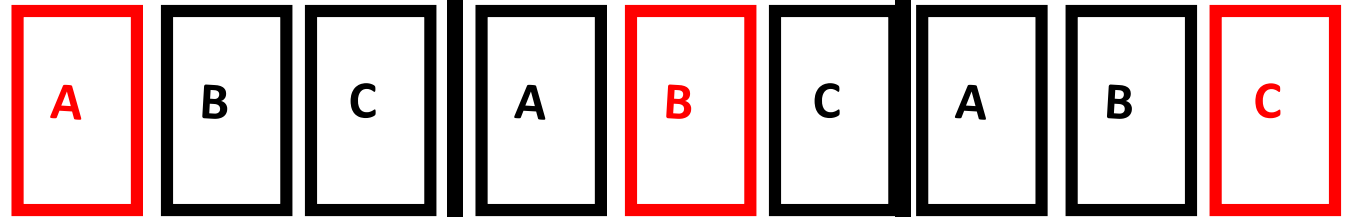
$$P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|B^C)P(B^C)$$

Stratégie garder la porte initiale :

$$P(G) = 1 * 1/3 + 0 * 2/3 = 1/3$$

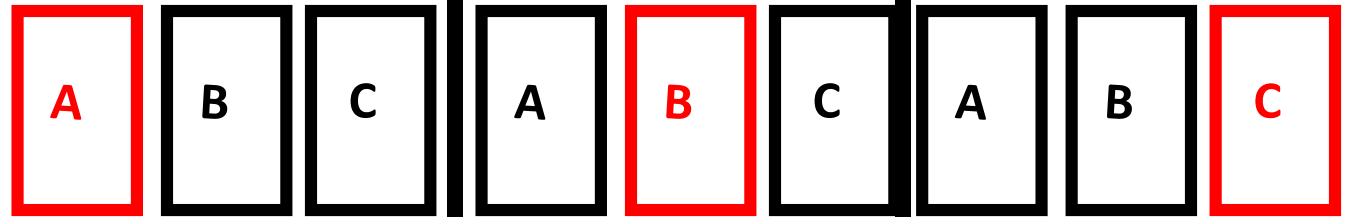
Stratégie changer de porte :

$$P(G) = 0 * 1/3 + 1 * 2/3 = 2/3$$

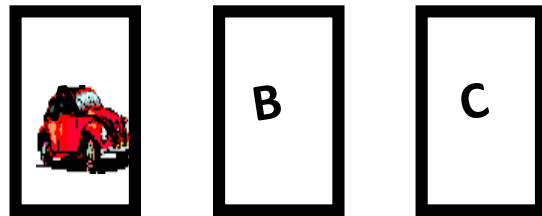


Si l'on change de porte

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                     |       |       |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|
|  | B                                                                                 | C                                                                                   | perdu | gagné | gagné |
| A                                                                                 |  | C                                                                                   | gagné | perdu | gagné |
| A                                                                                 | B                                                                                 |  | gagné | gagné | perdu |



Si l'on change de porte



perdu

gagné

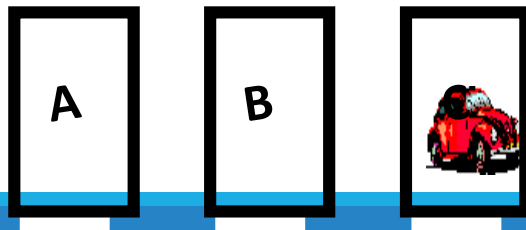
gagné



gagné

perdu

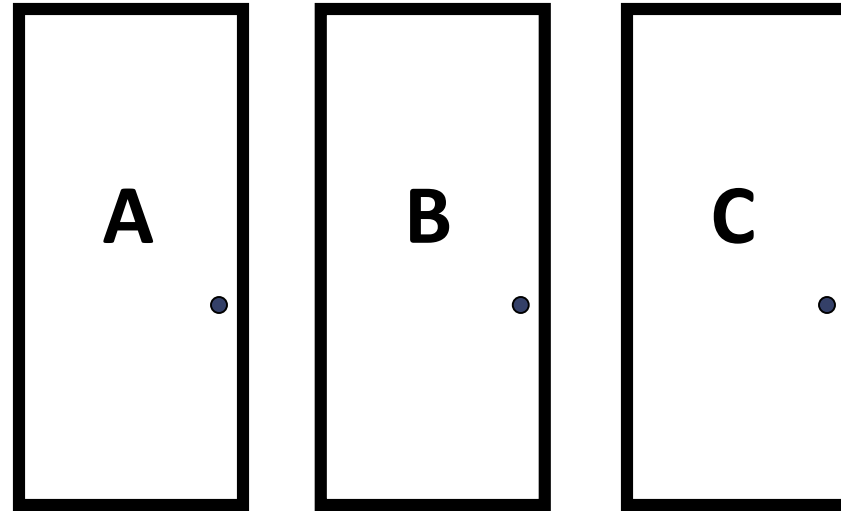
gagné



gagné

gagné

perdu



Le problème résumé en deux phrases :

- 2 fois sur 3 on choisit une chèvre au départ
- Dans ce cas on gagne en changeant de porte

# Formule de Bayes

---

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements formant une partition de  $\Omega$ , c'est-à-dire avec  $\bigcup A_i = \Omega$  et  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ .

Supposons de plus que  $P(A_i) \neq 0$  pour tout  $i$ .

Alors,

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{j \in I} P(A|A_j)P(A_j)}$$

# Formule de Bayes

---

Exemple avec  $(A_i)_{i \in I} = (B, B^c)$ .

Alors,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

On remarque que

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

# Indépendance

---

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $A$  et  $B$  deux événements aléatoires.

On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

On en déduit notamment que

$$P(A|B) = P(A)$$

# Variables aléatoires

---

$X$  est une variable aléatoire réelle si c'est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$X: \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

# Variables aléatoires

---

$X$  est une variable aléatoire réelle si c'est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$X: \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Cette notion est capitale afin de généraliser l'étude des probabilités non seulement aux événements aléatoires mais aussi aux fonctions d'événements aléatoires.

Ex :  $\Omega = \{pile, face\}$  et  $X = 1$  euro si pile et 0 euros si face.

# Lois de probabilité

---

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $X$  une variable aléatoire réelle (v.a.r) sur  $\Omega$ .

On appelle loi de probabilité de  $X$ , notée  $P_X$ , l'application qui à toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  associe

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$$

# Lois de probabilité

---

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité et  $X$  une variable aléatoire réelle (v.a.r) sur  $\Omega$ .

On appelle loi de probabilité de  $X$ , notée  $P_X$ , l'application qui à toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  associe

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = P(X \in A)$$

Dans la suite, on notera  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P(X = x)$