
Examen du vendredi 9 janvier 2026 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit A une partie non vide minorée de $\mathbf{R}$ et m un minorant de A . On suppose qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers m . Montrer que $m = \inf A$.
2. Montrer que toute suite de réels convergente est de Cauchy.

Exercice 2. Des séries

Étudier la convergence absolue et la convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right) ;$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} ;$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(5n+3)} ;$
4. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n .$

Exercice 3. Des intégrales impropres

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$.
2. Montrer que pour tout réel $a > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge.
3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \frac{1}{2(k+1)}.$$

4. En déduire que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

5. Montrer que pour tout réel $a \leq 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ diverge.
6. Conclure.

Exercice 4. Un équivalent simple d'une suite de sommes partielles.

1. On s'intéresse à l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx.$$

(a) Cette intégrale est-elle convergente ?

(b) Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$\int_1^x \frac{e^u}{u} du = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^u}{u^3} du. \quad (1)$$

(c) Montrer que $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto e^x/x^3$ est décroissante sur $]0, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$.

(d) En déduire que pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\int_1^3 \frac{e^u}{u^3} du \leq 2e \quad \text{et} \quad \int_3^x \frac{e^u}{u^3} du \leq \frac{e^x}{x^2}.$$

(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\frac{e^x}{x} - 2e \leq \int_1^x \frac{e^u}{u} du \leq \frac{e^x}{x} + \frac{3e^x}{x^2} + 2e.$$

(f) On considère l'application $\varphi: [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x}{e^x} \int_e^{e^x} \frac{dt}{\ln(t)}$.

À l'aide d'un changement de variable, montrer que φ a pour limite 1 en $+\infty$.

(g) Pour tout réel $y \geq e$, calculer $\varphi(\ln y)$ et en déduire que

$$\int_e^y \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{y}{\ln(y)}. \quad (2)$$

2. Pour $n \geq 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}.$$

(a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(k)}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 3$,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq S_n \leq \frac{1}{\ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}.$$

(c) Enfin, montrer que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}.$$