Partiel du 6 novembre 2024 - Durée : 2h
Correction

Exercice 1 Question de cours

1. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
2. $[x_k, \alpha_k] \subset [a, b]$ et f est C^1 sur $[a, b]$ donc sur $[x_k, \alpha_k]$. Soit $t \in [x_k, \alpha_k]$, on applique le théorème des accroissements finis sur cet intervalle, ainsi il existe $c_k \in]t, \alpha_k[$ tel que $f(\alpha_k) - f(t) = f'(c_k)(\alpha_k - t)$. On en déduit :

$$|f(t) - f(\alpha_k)| = |f'(c_k)| \times |t - \alpha_k| \leq M_1 |t - \alpha_k|.$$

On applique de la même manière le théorème des accroissements finis sur $[\alpha_k, x_{k+1}]$, on obtient, pour tout $t \in [\alpha_k, x_{k+1}]$,

$$|f(t) - f(\alpha_k)| \leq M_1 |t - \alpha_k|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_k}^{\alpha_k} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| &\leq \int_{x_k}^{\alpha_k} |f(t) - f(\alpha_k)|\, \mathrm{d}t \leq M_1 \int_{x_k}^{\alpha_k} |t - \alpha_k|\, \mathrm{d}t = M_1 \int_{x_k}^{\alpha_k} (\alpha_k - t)\, \mathrm{d}t \\
&\leq M_1 \left[\frac{-(\alpha_k - t)^2}{2} \right]_{x_k}^{\alpha_k} \\
&\leq \frac{M_1}{2} (\alpha_k - x_k)^2.
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que :

$$\left| \int_{\alpha_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{M_1}{2} (x_{k+1} - \alpha_k)^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{x_k}^{\alpha_k} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t + \int_{\alpha_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_{x_k}^{\alpha_k} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{\alpha_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{M_1}{2} \left[(\alpha_k - x_k)^2 + (x_{k+1} - \alpha_k)^2 \right].
\end{aligned}$$

Or pour tout $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $(a + b)^2 \geq a^2 + b^2$, donc :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\, \mathrm{d}t \right| &\leq \frac{M_1}{2} \left[(\alpha_k - x_k) + (x_{k+1} - \alpha_k) \right]^2 = \frac{M_1}{2} (x_{k+1} - x_k)^2 \\
&\leq \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}.
\end{aligned}$$

3. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on remarque que $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\alpha_k)\ \mathrm{d}t = f(\alpha_k)(x_{k+1}-x_k) = \frac{b-a}{n} f(\alpha_k)$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\alpha_k)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(\alpha_k)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2} = nM_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&\leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 `Uniforme continuité`

1. f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. f n'est pas uniformément continue sur I si :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

3. Soit $\delta > 0$, $\left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{\delta^2} = \dfrac{\delta^2}{4} + 1$, or $\dfrac{\delta^2}{4} \geq 0$, donc :

$$\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \geq 1.$$

4. On va vérifier que la négation écrite à la question 2 est vraie pour la fonction g.
   Choisissons $\varepsilon = 1$ et soit $\delta > 0$. On pose $x = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$ et $y = \dfrac{1}{\delta}$, alors $|x-y| = \dfrac{\delta}{2}$. On en déduit que $|x-y| < \delta$ et :

$$|g(x) - g(y)| = \frac{\delta^2}{4} + 1 \geq 1.$$

   Donc g n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
5. Notons $h \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$. Montrons que h est uniformément continue.
   Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \varepsilon > 0$. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $|x-y| < \delta$, alors :

$$|h(x) - h(y)| = |x-y| < \delta = \varepsilon.$$

   Donc h est uniformément continue.
   Or on a vu dans la question précédente que $g = h \times h$ n'est pas uniformément continue, par conséquent, le produit de deux fonctions uniformément continues n'est pas toujours uniformément continue.

Exercice 3 `Calcul d'une intégrale`

1. On calcule cette intégrale en faisant deux intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} u^2 e^u \ \mathrm{d}u &= \left[u^2 e^u\right]_0^{\ln 2} - 2\int_0^{\ln 2} u e^u \ \mathrm{d}u \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\left(\left[u e^u\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^u \ \mathrm{d}u\right) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\left(2\ln 2 - (2-1)\right) = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 \\ &= 2(\ln 2 - 1)^2.\end{aligned}$$

2. On fait un changement de variable en posant $u = \ln t$, alors $du = \dfrac{1}{t}dt = \dfrac{1}{e^u}dt$, ainsi :

$$\int_1^2 (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} u^2 e^u \ \mathrm{d}u = 2\ln 2(\ln 2 - 2) + 2.$$

Exercice 4 `Borne supérieure`

1. $f(0) = 0$ et $b > 0$, ainsi $0 \in A$ et donc A est non vide.
   De plus, par définition de A, pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$, ce qui signifie que b est un majorant de A et donc A est non vide et majoré.
   Par conséquent, A admet une borne supérieure.
2. a est la borne supérieure de A, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a. Comme f est continue, on en déduit que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
   Mais, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in A$, ainsi, par définition de A, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = 0$, d'où, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Par unicité de la limite, on a donc $f(a) = 0$.
3. a est la borne supérieure de A, c'est donc le plus petit des majorants de A, de plus, on a vu que b est un majorant de A, d'où $a \leq b$.
   Mais $f(a) = 0$ et $f(b) \neq 0$, ainsi $a \neq b$ et finalement, $a < b$.
4. Soit $x \in]a, b]$, supposons par l'absurde que $f(x) = 0$, alors, par définition de A, $x \in A$ ce qui contredit la définition de a qui est un majorant de A.
   On en déduit que $f(x) \neq 0$.

Exercice 5 `Étude d'une suite`

1. Soit $n \geq 2$, f_n est un polynôme donc f_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_n'(x) > 0$.
   On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, comme elle est aussi continue sur $\mathbf{R}_+$, f_n est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$.
2. $0 \in [-1, +\infty[$ et $f_n \colon \mathbf{R}_+ \to [-1, +\infty[$ est une bijection, donc il existe un unique $u_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Soit $n \geq 2$, on remarque que $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$, ainsi $0 \in]-1, 1[$. Comme f_n est continue le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f_n s'annule sur $]0, 1[\subset \mathbf{R}_+$ et on a montré qu'il y a un unique réel sur $\mathbf{R}_+$ où f_n s'annule, donc $u_n \in]0, 1[$.

4. Soit $n \geq 2$, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1} - 1$.
   Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} - 1 = 0$, d'où :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}).$$

   Comme $0 < u_{n+1} < 1$, on en déduit que $f_n(u_{n+1}) > 0$.

5. Soit $n \geq 2$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n+1}) > 0$, ainsi $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$.

6. La question précédente montre que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante et, d'après la question 3, elle est aussi majorée. Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ converge.

7. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   On a vu (question 3) que, pour tout $n \geq 2$, $0 < u_n < 1$, donc $0 \leq \ell \leq 1$.
   Proposons deux méthodes pour conclure.
   Méthode 1. $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et converge vers ℓ donc, pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq \ell$. Comme, pour tout $n \geq 2$, f_n est strictement croissante, on a aussi, pour tout $n \geq 2$, $f_n(u_n) \leq f_n(\ell)$.
   Or, pour tout $n \geq 2$, $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \ell^n + \ell - 1$.
   Si on suppose par l'absurde que $\ell \in [0, 1[$, alors $\ell^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient : $0 \leq \ell - 1$, ce qui contredit $\ell < 1$.
   Donc $\ell = 1$.
   Méthode 2. Supposons par l'absurde que $\ell \in [0, 1[$, alors $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln \ell < 0$ si $\ell \neq 0$ et $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ si $\ell = 0$. Ainsi $n \ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. On en déduit que :

$$u_n^n = e^{n \ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Or, pour tout $n \geq 2$, $u_n^n + u_n - 1 = 0$, d'où, par passage à la limite dans cette égalité, $\ell - 1 = 0$ ce qui est absurde.
   Finalement, on a montré que $\ell = 1$.