
Partiel du 4 novembre 2025 - Durée : 2h

La rédaction est importante, nous en tiendrons compte dans la correction.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 Question de cours

1. Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.
2. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue.
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tel que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
Montrer que la suite $(f(v_n) - f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

Exercice 2 Borne supérieure

On considère l'ensemble X suivant :

$$X = \left\{ \frac{\cos n}{n^2 + 1} + \frac{1}{n + 1} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

1. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbf{R}$.
2. Montrer que X admet un maximum et le déterminer.
3. Déterminer la borne inférieure de X dans $\mathbf{R}$.

Exercice 3 Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^e \cos\left(\frac{\ln x}{n}\right) dx$$

- .
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq e - 1.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t dt.$$

3. Calculer I_1 . (On pourra effectuer deux intégrations par parties.)
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est monotone et en déduire qu'elle est convergente.
5. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Exercice 4 Points fixes

On considère une fonction $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

1. On suppose dans cette partie que f est continue et croissante.

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in [0, 1]$ et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

(b) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f .

2. Pour cette question, on suppose uniquement que f est continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

3. Pour cette partie, on suppose uniquement que f est croissante.

On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de la manière suivante :

— $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$;

— Pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\text{— } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n \text{ si } \frac{u_n + v_n}{2} \leq f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right),$$

$$\text{— } u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ sinon.}$$

On admettra que ces deux suites vérifient alors les propriétés suivantes :

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq f(u_n) \leq f(v_n) \leq v_n \leq 1$;

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$.

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ .

(b) Montrer que ℓ est un point fixe de f .

4. Donner un exemple de fonction $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui n'admet pas de point fixe.