
Corrigé de l'examen du vendredi 9 janvier 2026 - Durée : 2h

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit A une partie non vide minorée de $\mathbf{R}$ et m un minorant de A . On suppose qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers m . Montrer que $m = \inf A$.

Solution : Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers m . Considérons m' un autre minorant de A . Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on a $a_n \in A$ et donc $a_n \geq m'$. Comme $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers m , les inégalités précédentes entraînent que $m \geq m'$. Ainsi, m est le plus grand minorant de A , c'est-à-dire $m = \inf A$.

2. Montrer que toute suite de réels convergente est de Cauchy.

Solution : Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels qui converge vers un réel ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Considérons maintenant deux entiers $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors,

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < 2\varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 2. Des séries

Étudier la convergence absolue et la convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right) ;$

Solution : Petite coquille : le premier terme n'étant pas défini, il s'agit d'étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \left(e^{\frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right)$.

Comme $1/n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, les DL en 0 à l'ordre 2 de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ entraîne que

$$e^{\frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - 1 + o \left(\frac{1}{n^2} \right) = o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de termes positifs convergente, la série $\sum_{n \geq 2} \left(e^{\frac{1}{n}} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right)$ est absolument convergente et en particulier convergente.

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} ;$

Solution : Il s'agit d'une série à termes positifs.

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Par la règle de d'Alembert, on conclut que cette série est (absolument) convergente.

$$3. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(5n+3)};$$

Solution : La fonction $\ln$ étant croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et $\ln(3) > 0$, la suite $(\frac{1}{\ln(5n+3)})_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Par le critère des séries alternées, cette série alternée converge.

D'autre part,

$$\frac{\ln(5n+3)}{\ln n} = \frac{\ln(n) + \ln(5 + 3/n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(5 + 3/n)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\frac{1}{\ln(5n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}.$$

Or la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ est divergente, donc par comparaison entre série à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(5n+3)}$ n'est pas absolument convergente.

$$4. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Solution : Il s'agit d'une série alternée, mais elle ne converge pas. En effet, pour $n \geq 1$,

$$\left| (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right| = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}.$$

Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$, donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ et par continuité de l'exponentielle $e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0$. Le terme général de la série considérée ne convergeant pas vers 0, la série diverge « grossièrement ».

Exercice 3. Des intégrales impropres

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$.

Solution : Soit $a \in \mathbf{R}$. Comme $\cos$ est continue et à valeurs dans $[-1, 1]$, il suit que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^a}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $]0, 1]$. Faisons l'étude en 0 : le développement limité de $\cos$ en 0 à l'ordre 2 est

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

donc

$$\frac{1 - \cos t}{t^a} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t^a} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2t^{a-2}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{a-2}} dt$ converge si et seulement si $a - 2 < 1$. Par le (second) théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, il suit que $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ est convergente si et seulement si $a < 3$.

2. Montrer que pour tout réel $a > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge.

Solution : Soit $a > 1$. Rappelons (une dernière fois) que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^a}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Faisons l'étude en $+\infty$: on a pour tout $t > 0$,

$$0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^a} \leq \frac{2}{t^a}.$$

Comme $a > 1$ dans cette question, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge et donc par le (premier) théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge.

3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \frac{1}{2(k+1)}.$$

Solution : Comme pour tout $t > 0$, $\frac{1 - \cos t}{t} \geq 0$, et $\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi \geq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt.$$

De plus, pour tout $t \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $\cos t \leq 0$, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1}{t} dt.$$

Enfin, comme $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1}{t} dt \geq \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$$

et

$$\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2k} \geq \frac{1}{2(k+1)},$$

ce qui permet de conclure.

4. En déduire que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Solution : Soit $n \geq 0$. En utilisant la question précédente, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt = \sum_{k=0}^n \int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2(k+1)}.$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ divergeant vers $+\infty$, on a $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et on en déduit par l'inégalité précédente le résultat demandé.

5. Montrer que pour tout réel $a \leq 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ diverge.

Solution : Soit $a \leq 1$. Pour tout réel $t \geq 1$, $1 - \cos t \geq 0$ et $t^a \leq t$, donc $\frac{1 - \cos t}{t^a} \geq \frac{1 - \cos t}{t} \geq 0$.

Or d'après la question précédente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} dt$ diverge et par comparaison c'est également le cas de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$.

6. Conclure.

Solution : Dans la première question, on a montré que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a < 3$. Les questions 2 et 5 montrent que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

On peut ainsi conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a \in]1, 3[$.

Exercice 4. Un équivalent simple d'une suite de sommes partielles.

1. On s'intéresse à l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx.$$

(a) Cette intégrale est-elle convergente ?

Solution : Par croissances comparées $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est plus grande que 1 au voisinage de l'infini (c.à.d. pour x assez grand). Comme $\int_1^{+\infty} 1 dx$ diverge,

$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx$ diverge également.

(b) Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$\int_1^x \frac{e^u}{u} du = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^u}{u^3} du. \quad (1)$$

Solution : Effectuons deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^u}{u} du &= \left[\frac{e^u}{u} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-e^u}{u^2} du \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^u}{u^2} du \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{e^u}{u^2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-2e^u}{u^3} du \\ &= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^u}{u^3} du. \end{aligned}$$

(c) Montrer que $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto e^x/x^3$ est décroissante sur $]0, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$.

Solution : Cette fonction est dérivable et, pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6} = \frac{(x - 3)e^x}{x^4}.$$

Ainsi, f' est négative sur $]0, 3]$ et positive sur $[3, +\infty[$, ce qui permet de conclure.

(d) En déduire que pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\int_1^3 \frac{e^u}{u^3} du \leq 2e \quad \text{et} \quad \int_3^x \frac{e^u}{u^3} du \leq \frac{e^x}{x^2}.$$

Solution : Comme f est décroissante sur $[1, 3]$, on a

$$\int_1^3 \frac{e^u}{u^3} du \leq \int_1^3 \frac{e^1}{1^3} du \leq 2e.$$

Soit $x \in [3, +\infty[$. Par croissance de f sur $[3, x]$, on obtient

$$\int_3^x \frac{e^u}{u^3} du \leq \int_3^x \frac{e^x}{x^3} du \leq (x-3) \frac{e^x}{x^3} \leq x \frac{e^x}{x^3} \leq \frac{e^x}{x^2}.$$

(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout $x \in [3, +\infty[$,

$$\frac{e^x}{x} - 2e \leq \int_1^x \frac{e^u}{u} du \leq \frac{e^x}{x} + \frac{3e^x}{x^2} + 2e.$$

Solution : Soit $x \in [3, +\infty[$. On a $\frac{e^x}{x^2} \geq 0$ et $\int_1^x \frac{e^u}{u^3} du \geq 0$ car la fonction $u \mapsto \frac{e^u}{u^3}$ est positive sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, par l'équation (1), on en déduit que

$$\int_1^x \frac{e^u}{u} du \geq \frac{e^x}{x} - 2e.$$

Pour l'autre inégalité, notons qu'à l'aide de la question précédente,

$$2 \int_1^x \frac{e^u}{u^3} du = 2 \int_1^3 \frac{e^u}{u^3} du + 2 \int_3^x \frac{e^u}{u^3} du \leq 4e + \frac{2e^x}{x^2}.$$

À nouveau, en utilisant l'équation (1), on obtient que

$$\int_1^x \frac{e^u}{u} du \leq \frac{e^x}{x} + \frac{3e^x}{x^2} + 2e.$$

(f) On considère l'application $\varphi: [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{x}{e^x} \int_e^{e^x} \frac{dt}{\ln(t)}$.

À l'aide d'un changement de variable, montrer que φ a pour limite 1 en $+\infty$.

Solution : Soit $x \in [1, +\infty[$. En posant $u = \ln t$, on a $t = e^u$ et $dt = e^u du$, d'où

$$\int_e^{e^x} \frac{dt}{\ln(t)} = \int_1^x \frac{e^u}{u} du \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{x}{e^x} \int_1^x \frac{e^u}{u} du.$$

La question précédente donne les inégalités

$$1 - 2e \frac{x}{e^x} \leq \varphi(x) \leq 1 + \frac{3}{x} + 2e \frac{x}{e^x}.$$

Or, $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{3}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

(g) Pour tout réel $y \geq e$, calculer $\varphi(\ln y)$ et en déduire que

$$\int_e^y \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{y}{\ln(y)}. \quad (2)$$

Solution : Soit $y \geq e$. On a

$$\varphi(\ln y) = \frac{\ln y}{e^{\ln y}} \int_e^{e^{\ln y}} \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{\ln y}{y} \int_e^y \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Comme $\ln y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, par la question précédente $\varphi(\ln y) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, ce qui permet de conclure en utilisant l'égalité ci-dessus.

2. Pour $n \geq 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}.$$

(a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(k)}.$$

Solution : La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ étant décroissante sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(k+1)} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(k)} \\ \frac{1}{\ln(k+1)} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(k)}. \end{aligned}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 3$,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq S_n \leq \frac{1}{\ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Solution : Soit $n \geq 3$. On a d'une part,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)} = S_n$$

et d'autre part,

$$S_n = \frac{1}{\ln 2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\ln(k)} = \frac{1}{\ln 2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln(k+1)} \leq \frac{1}{\ln 2} + \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{1}{\ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}.$$

(c) Enfin, montrer que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}.$$

Solution : Par 1., on a $\int_e^n \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$ et comme $\int_2^n \frac{dt}{\ln(t)} = \int_2^e \frac{dt}{\ln(t)} + \int_e^n \frac{dt}{\ln(t)}$ et $\frac{n}{\ln n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $\int_2^n \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$, puis que $\int_2^{n+1} \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{\ln(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$ et $\frac{1}{\ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$.

Les inégalités de la question précédente permettent alors de conclure.