
Corrigé du partiel du 4 novembre 2025 - Durée : 2h

Exercice 1 Question de cours

1. Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Une fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue.

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tel que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

Montrer que la suite $(f(v_n) - f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Comme $(v_n - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |v_n - u_n| < \delta. \quad (2)$$

Soit $n \geq n_0$. Alors par (2), on a $|v_n - u_n| < \delta$ et donc par (1), $|f(v_n) - f(u_n)| < \varepsilon$.

On a donc vérifier que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |f(v_n) - f(u_n)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que $(f(v_n) - f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

Exercice 2 Borne supérieure

On considère l'ensemble X suivant :

$$X = \left\{ \frac{\cos n}{n^2 + 1} + \frac{1}{n + 1} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

1. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbf{R}$.

Notons que X est non vide car il contient en particulier l'élément $\frac{\cos 0}{0^2 + 1} + \frac{1}{0 + 1}$ qui vaut 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors,

$$\left| \frac{\cos n}{n^2 + 1} + \frac{1}{n + 1} \right| \leq \frac{|\cos n|}{n^2 + 1} + \frac{1}{n + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n + 1} \leq 1 + 1 \leq 2.$$

Ainsi X est borné (c'est-à-dire majoré et minoré) et X est non vide, donc X admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbf{R}$.

2. Montrer que X admet un maximum et le déterminer.

D'après la question précédente, X est majoré par 2 et 2 est un élément de X , donc X admet un maximum qui est 2.

3. Déterminer la borne inférieure de X dans $\mathbf{R}$.

Commençons par remarquer que la suite $\left(\frac{\cos n}{n^2+1} + \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de X (par définition de X) qui converge vers 0.

En effet, on a vérifié précédemment que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left| \frac{\cos n}{n^2+1} + \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n+1}\right) = 0$, il suit que la suite $\left(\frac{\cos n}{n^2+1} + \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

Vérifions ensuite que 0 est un minorant de X : en effet, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{\cos n}{n^2+1} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{-1}{n^2+1} + \frac{1}{n+1} \geq 0 \text{ car } \cos n \geq -1 \text{ et } n^2+1 \geq n+1.$$

Ainsi, par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf X = 0$.

Exercice 3 Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^e \cos\left(\frac{\ln x}{n}\right) dx$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq e - 1.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Considérons un réel $x \in [1, e]$.

Par croissance de la fonction $\ln$, on a

$$\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$$

et donc

$$0 \leq \frac{\ln x}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq \pi/2.$$

Puis par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi/2]$, on obtient

$$\cos(\pi/2) \leq \cos\left(\frac{\ln x}{n}\right) \leq \cos 0$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \cos\left(\frac{\ln x}{n}\right) \leq 1.$$

Par monotonie de l'intégrale,

$$\int_1^e 0 \, dx \leq \int_1^e \cos\left(\frac{\ln x}{n}\right) dx \leq \int_1^e 1 \, dx$$

c'est-à-dire

$$0 \leq I_n \leq e - 1.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t \, dt.$$

Fixons $n \in \mathbf{N}^*$.

Il suffit de faire un changement de variables en posant $t = \ln x$ ou de manière équivalente $x = e^t$. Alors $dx = e^t \, dt$. Ainsi,

$$I_n = \int_{\ln 1}^{\ln e} \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t \, dt = \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t \, dt.$$

3. Calculer I_1 . (On pourra effectuer deux intégrations par parties.)

Par intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \cos(t) e^t \, dt \\ &= [\sin(t) e^t]_0^1 - \int_0^1 \sin(t) e^t \, dt \\ &= \sin(1) e - \left([-\cos(t) e^t]_0^1 + \int_0^1 \cos(t) e^t \, dt \right) \\ &= (\sin 1 + \cos 1) e - 1 - I_1 \end{aligned}$$

d'où

$$I_1 = \frac{(\sin 1 + \cos 1) e - 1}{2}.$$

4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est monotone et en déduire qu'elle est convergente.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{t}{n+1} \leq \frac{t}{n} \leq 1 \leq \pi$. Par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$ et positivité de la fonction exponentielle, on obtient

$$\forall t \in [0, 1] \quad \cos\left(\frac{t}{n+1}\right) e^t \geq \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t.$$

Par monotonie de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} \geq I_n$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc croissante. D'après la première question, elle est de plus majorée, donc elle est convergente.

5. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t dt \\ &= \left[\cos\left(\frac{t}{n}\right) e^t \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{n} \sin\left(\frac{t}{n}\right) \right) e^t dt \\ &= \cos\left(\frac{1}{n}\right) e - 1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^t dt \end{aligned}$$

D'une part, par continuité de la fonction cosinus, on a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos 0 = 1$.

D'autre part,

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^1 \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^t dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sin\left(\frac{t}{n}\right) \right| e^t dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 e^t dt \leq \frac{e-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e - 1.$$

Exercice 4 Points fixes

On considère une fonction $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

1. On suppose dans cette partie que f est continue et croissante.

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in [0, 1]$ et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in [0, 1]$ et $x_n \leq x_{n+1}$:

— Par définition $x_0 = 0$ et donc $x_0 \in [0, 1]$. De plus, comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, $0 \leq f(x_0)$ c'est-à-dire $x_0 \leq x_1$.

— Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $x_n \in [0, 1]$ et que $x_n \leq x_{n+1}$.

Comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, $x_{n+1} = f(x_n) \in [0, 1]$.

De plus comme f est croissante et $x_n \leq x_{n+1}$, on en déduit que $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$, c'est-à-dire que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in [0, 1]$ et $x_n \leq x_{n+1}$ et donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

(b) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f .

Par (a), la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite ℓ comprise entre x_0 et 1.

Par continuité de f , on a alors

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f(\ell).$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de f .

2. Pour cette question, on suppose uniquement que f est continue.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Considérons l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x) - x$.

Comme f est continue, g l'est également.

De plus, f est à valeurs dans $[0, 1]$, ainsi $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g étant continue et $g(1) \leq 0 \leq g(0)$, l'application g s'annule en au moins un point $a \in [0, 1]$.

Mais alors $f(a) = a$, c'est-à-dire que a est un point fixe de f .

3. Pour cette partie, on suppose uniquement que f est croissante.

On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de la manière suivante :

— $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$;

— Pour $n \in \mathbf{N}$,

— $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$ si $\frac{u_n + v_n}{2} \leq f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$,

— $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ sinon.

On admettra que ces deux suites vérifient alors les propriétés suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq f(u_n) \leq f(v_n) \leq v_n \leq 1$;
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$.

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers la même limite ℓ .

Montrons que ces suites sont adjacentes :

— Tout d'abord, $v_n - u_n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

— Vérifions maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} \leq f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v_{n+1} - v_n = \begin{cases} \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} > f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $u_n \leq v_n$, d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Ces suites étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq \ell \leq v_n.$$

- (b) Montrer que ℓ est un point fixe de f .

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq f(u_n) \leq f(v_n) \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$, il suit que les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent également vers ℓ .

De plus,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$$

et donc par croissance de f ,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f(u_n) \leq f(\ell) \leq f(v_n).$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \leq f(\ell) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$$

c'est-à-dire

$$\ell \leq f(\ell) \leq \ell.$$

Donc $f(\ell) = \ell$.

4. Donner un exemple de fonction $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui n'admet pas de point fixe.

On peut considérer g définie sur $[0, 1]$ par $g(0) = 1$ et pour tout $x \in]0, 1]$ par $g(x) = 0$.

Complément : Les propriétés des suites de la partie 3 se montrent par récurrence.

— Par définition de u_0 et v_0 , $0 \leq u_0 \leq v_0 \leq 1$.

Par croissance de f , on a alors $f(u_0) \leq f(v_0)$.

De plus, comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, $0 \leq f(u_0)$ et $f(v_0) \leq 1$.

Finalement, comme $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, en regroupant les inégalités précédentes, on obtient

$$0 \leq u_0 \leq f(u_0) \leq f(v_0) \leq v_0 \leq 1.$$

D'autre part,

$$v_0 - u_0 = 1 - 0 = 1 = \frac{1}{2^0}.$$

— Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que

- $0 \leq u_n \leq f(u_n) \leq f(v_n) \leq v_n \leq 1$;

- $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$.

Comme $u_n \leq v_n$, notons que

$$u_n \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n.$$

— Ou bien $\frac{u_n + v_n}{2} \leq f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$.

Dans ce cas, par définition, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.

Alors,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_{n+1} \leq f(u_{n+1}).$$

De plus, comme $v_{n+1} = v_n$ et par hypothèse de récurrence $f(v_n) \leq v_n$, on a

$$f(v_{n+1}) \leq v_{n+1}.$$

Par croissance de f , comme $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ on a également $f(u_{n+1}) \leq f(v_{n+1})$ et en regroupant les inégalités précédentes on obtient

$$0 \leq u_{n+1} \leq f(u_{n+1}) \leq f(v_{n+1}) \leq v_{n+1} \leq 1.$$

Enfin,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2^n \times 2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

— Ou bien $\frac{u_n + v_n}{2} > f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$.

Dans ce cas, par définition, $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Alors,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \text{ et } f(v_{n+1}) < v_{n+1}.$$

De plus, comme $u_{n+1} = u_n$ et par hypothèse de récurrence $u_n \leq f(u_n)$, on a

$$u_{n+1} \leq f(u_{n+1}).$$

De même que dans le cas précédent, en utilisant la croissance de f et en regroupant les inégalités on obtient

$$0 \leq u_{n+1} \leq f(u_{n+1}) \leq f(v_{n+1}) \leq v_{n+1} \leq 1.$$

Enfin,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2^n \times 2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$