Chapitre 4 – Fonctions réelles d'une variable réelle : formules de Taylor, développements limités, étude locale

UE Analyse 2
Élise Fouassier

Formule de Taylor-Lagrange (rappel cours 14 février)

Théorème

Soit I un intervalle, $n \in \mathbf{N}$, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Pour tout $(a, x) \in I^2$, avec $a \neq x$, il existe c compris strictement entre a et x tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &\quad \underbrace{+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{polynôme de Taylor de } f \text{ en } a} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{"reste de Lagrange"}} \end{aligned}$$

($c \in]a, x[$ si $a < x$, ou $]x, a[$ si $x < a$).

Formule de Taylor-Lagrange

Exemple.

Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, on note $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. La formule de Taylor-Lagrange permet de montrer que :

$$|e^x - P_n(x)| \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

d'où l'on déduit que

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Existence d'un développement limité et formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young donne une condition suffisante d'existence.

Théorème

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a \in I$. Alors, f admet un DL à l'ordre n en a de la forme

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Pour les fonctions pour lesquelles les dérivées successives sont simples à calculer, cette formule permet d'obtenir rapidement le développement limité de la fonction. Si ce n'est pas le cas, on utilise les théorèmes d'opérations que nous verrons dans le paragraphe suivant.

Développements limités de fonctions usuelles

Exemple 1.
La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = 1$, donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n).}$$

Développements limités de fonctions usuelles

Exemple 2.
Les fonctions cosinus et sinus étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, elles admettent un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

- $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $\sin^{(2k)}(0) = 0$,
- $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$, $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$,

donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \end{aligned}}$$

On vient d'écrire un DL à l'ordre $2n+1$ de cos et un DL à l'ordre $2n+2$ de sin.

Développements limités de fonctions usuelles

Exemple 3.
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0.
De plus, on montre par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$ (cf feuille 4 de TD) que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > -1$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

donc $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
Et $f(0) = 0$ donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

Développements limités de fonctions usuelles

Exemple 4.
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$$

et $f_\alpha(0) = 1$, donc par la formule de Taylor-Young, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+x)^\alpha\\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).\end{aligned}}$$

Pour $\alpha = -1$, on retrouve le DL de $1/(1+x)$ en 0.
Pour $\alpha = 1/2$, on obtient le DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$; à l'ordre 2, cela donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Opérations sur les développements limités

Quelques observations préliminaires.
Elles se montrent en utilisant la définition d'un o.

Soit $n, p, m \in \mathbf{N}$.

- Pour toute constante réelle $\lambda \neq 0$,
  - si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $\lambda f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
  - si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(\lambda x^n)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- Si $p \leqslant n$ et $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^p)$.
- Si $p \leqslant n$ et $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^p) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^p)$.
- Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $x^m f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{m+n})$.
- Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $\dfrac{f(x)}{x^m} = \underset{x\to 0}{o}(x^{n-m})$.
- Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $(f(x))^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$.

Opérations sur les développements limités

Dans la suite, nous énonçons les résultats concernant les opérations sur les développements limités au voisinage de 0.
Ceux concernant les développements limités au voisinage d'autres points s'en déduisent (par changements de variables).

Dans les énoncés suivants, on utilise la notation suivante.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, on note $P_n(f)$ l'unique polynôme de degré $\leqslant n$ tel que

$$f(x) = P_n(f)(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Opérations sur les développements limités

Addition et multiplication par une constante

Théorème

Soit I un intervalle tel que $0 \in I$. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en 0 et

$$P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$$

Démonstration.

On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(f)(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\ &= P_n(f)(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et

Opérations sur les développements limités

Addition et multiplication par une constante

$$\begin{aligned} g(x) &= P_n(g)(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\ &= P_n(g)(x) + x^n\varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x) &= \big(\lambda P_n(f)(x) + \mu P_n(g)(x)\big) + x^n(\lambda\varepsilon_1(x) + \mu\varepsilon_2(x)) \\ &= \big(\lambda P_n(f)(x) + \mu P_n(g)(x)\big) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

car $\lambda\varepsilon_1(x) + \mu\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
De plus $\lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.
Ainsi, on a écrit un DL_n de $\lambda f + \mu g$ en 0.
Par unicité,

$$P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g)$$

Opérations sur les développements limités

Addition et multiplication par une constante

Exemple.

On a vu $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.

Donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.

En sommant et en soustrayant, et en divisant par 2, on obtient les DL de ch et sh en 0.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right) \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+2}\right) \end{aligned}}$$

On vient d'écrire un DL à l'ordre $2p+1$ de ch et un DL à l'ordre $2p+2$ de sh.

Opérations sur les développements limités

Addition et multiplication par une constante

Attention.
Si les développements limités de f et g ne sont pas au même ordre, on ne peut écrire un DL de $f+g$ qu'à l'ordre le plus petit qui apparaît.
Supposons

$$f(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
$$g(x) = 1 + 2x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= 1 + x + 3x^2 + 4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) + 1 + 2x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 2 + 3x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underbrace{4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}_{=o_{x\to 0}(x^2)} \\ &= 2 + 3x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

Produit

Théorème

Soit I un intervalle tel que $0 \in I$. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0.
Alors le produit fg admet un DL_n en 0 et $P_n(fg)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(f) \cdot P_n(g)$.

Démonstration.

On écrit

$$f(x) = P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$
$$g(x) = P_n(g)(x) + x^n \varepsilon_2(x), \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc

Opérations sur les développements limités

Produit

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) \\ &\qquad + x^n\Big[\underbrace{P_n(f)(x)\varepsilon_2(x) + P_n(g)(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)}_{\varepsilon_3(x)}\Big] \\ &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) + x^n\varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

De plus, $P_n(f)P_n(g)$ est un polynôme de degré au plus $2n$, on l'écrit

$$P_n(f)P_n(g) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$$

En reportant dans l'égalité précédente, on obtient

Opérations sur les développements limités

Produit

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n \Big[\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} c_k x^{k-n} + \varepsilon_3(x)}_{\varepsilon_4(x)} \Big]$$

Pour tout $k \geqslant n+1$, $k-n \geqslant 1$ donc $x^{k-n} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $\varepsilon_4(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi,

$$f(x)g(x) \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Cette dernière ligne est un DL_n de fg en 0.

Par unicité, $P_n(fg) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$.

Opérations sur les développements limités

Produit

Exemple. Déterminons le DL_2 en 0 de $f : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$.
Il existe puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

Produit

$$f(x) = 1 + x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

(les termes de degré > 2 du produit "rentrent" dans le o)

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Opérations sur les développements limités

Produit

Attention ! Pour obtenir le DL à l'ordre n d'un produit fg, il faut en général partir des DL à l'ordre n des deux fonctions f et g.

Dans certains cas, en le justifiant, on peut partir des développements limités des deux termes d'un produit à un ordre inférieur à celui cherché pour le produit. Voici un exemple.

Exemple. Déterminons le DL_3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(1+x)\sqrt{1+x}$.

Il existe puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.
Le DL de $\ln(1+x)$ en 0 commence par un terme en x, il n'y a pas de terme constant ; on a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Donc quand on fera le produit des deux DL, tous les termes du DL de $\sqrt{1+x}$ seront multipliés au moins par x, y compris le $o_{x\to 0}\left(x^2\right)$.

Il suffit donc, pour obtenir un DL_3 de f en 0, de partir d'un DL_2 de $\sqrt{1+x}$.

Opérations sur les développements limités

Produit

On a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= x - \frac{x^3}{24} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

(on ne garde que les termes de degrés $\leqslant 3$ devant le o).

Opérations sur les développements limités

Quotient

Pour calculer le développement limité d'un quotient quand on connaît les développements limités du numérateur et du dénominateur, on commence par se ramener à l'écriture de ce quotient sous la forme suivante :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}{1 + b_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

Ensuite, on écrit le développement limité de $\dfrac{1}{1 + b_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$ en utilisant celui de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de $u = 0$, ce qui est possible car $u(x) = b_1 x + \ldots + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Opérations sur les développements limités

Quotient

Voici des exemples pour illustrer la procédure.

Exemple. Déterminons le DL_3 de tan en 0.
On a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}_{= u}}.$$

On pose $u = -\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, alors $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
On écrit le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de $u = 0$.

Opérations sur les développements limités

Quotient

Comme $u \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2$, il suffit d'utiliser un DL à l'ordre 2 en u ; on écrit

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)} = \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+\underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\tan x &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\ &= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

Quotient

Voici un autre exemple, où l'on illustre la "perte d'ordre".

Exemple. Déterminons le DL_3 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ en 0.

Les développements limités de $\ln(1+x)$ et $\sin x$ commencent par un terme en x, donc on commence par mettre x en facteur pour se ramener à la forme voulue.
Dans cette procédure, il faut faire attention : on perd un ordre dans les DL, on doit partir des DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ *et* $\sin x$.

Opérations sur les développements limités

Quotient

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}_{= u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}$$

Opérations sur les développements limités

Quotient

Puis on utilise le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ quand $u \to 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

Composition

Théorème

Soit I et J deux intervalles tels que $0 \in I$, $0 \in J$. Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbf{N}$.

- *Supposons que $\underline{f(0) = 0}$.*
- *Supposons que f et g admettent un DL_n en 0.*

Alors la composée $g \circ f$ admet un DL_n en 0 et $P_n(g \circ f)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(g) \circ P_n(f)$.

Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat.

En pratique, on commence par écrire le DL de la fonction qui est "à l'intérieur", puis on vérifie ensuite qu'on peut bien utiliser le DL de la fonction qui est "à l'extérieur".

Opérations sur les développements limités

Composition

Exemple. Déterminons le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\sin x}$.

On écrit d'abord le DL de $\sin x$ au voisinage de 0 :
$e^{\sin x} = \exp\left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$.
On pose $u = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, on a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \underset{u\to 0}{o}(u^4) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 \\ &\qquad + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités

Composition

$$
\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3\right) + \frac{1}{24}(x^4) + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}
$$

Exemple. Déterminons le DL_4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$. Il faut prendre garde ici : $\cos 0 = 1$, donc on ne peut pas utiliser directement le DL de exp en 0. On écrit

$$
e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}
$$

Attention ! Le terme dans l'exponentielle ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$.

Opérations sur les développements limités

Composition

$$
\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\
&= e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}, \quad u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&= e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)\right) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\
&= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}
$$

Développements limités en un autre point que 0

Pour calculer le développement limité d'une fonction au voisinage de $a \neq 0$, on peut utiliser un changement de variable. Voici un exemple pour illustrer la méthode.

Exemple. Déterminons le DL à l'ordre 2 au voisinage de 2 de $f : x \mapsto x \ln x$.

Soit $x > 0$, on pose $h = x - 2$. Alors, $h \underset{x \to 2}{\longrightarrow} 0$, et on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2+h) = (2+h)\ln(2+h) = (2+h)\left(\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) \\
&= (2+h)\left(\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \underset{h \to 0}{o}(h^2)\right) \\
&= 2\ln 2 + (1 + \ln 2)h + \frac{h^2}{4} + \underset{h \to 0}{o}(h^2)
\end{aligned}$$

Développements limités en un autre point que 0

On termine en remplaçant h par $x-2$. Ainsi, le DL à l'ordre 2 au voisinage de 2 de f est :

$$f(x) = 2\ln 2 + (1+\ln 2)(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^2\right).$$

Attention ! Quand on fait le changement de variable, on s'intéresse toujours à $f(x) = f(2+h)$ et non à $f(h)$; la variable h nous sert pour faire les calculs intermédiaires.

Applications

Paragraphe traité au tableau.

1. Calculs de limites
2. Positions relatives d'une courbe et de sa tangente en un point
3. Extrema de fonctions

Développements asymptotiques

Toutes les fonctions n'admettent pas de développement limité en tout point.
On cherche donc à étendre la gamme des fonctions auxquelles comparer une fonction donnée.
L'idée est toujours de se ramener à des fonctions dont le comportement est bien connu.
Les familles de fonctions les plus utilisées sont
$(x \mapsto (x-a)^n)_{n \in \mathbf{Z}}$, $(x \mapsto (x-a)^\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, $(x \mapsto x^\alpha |\ln x|^\beta)_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2}$,
$(x \mapsto x^\alpha e^{\beta x})_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2}$.

Dans les exercices de ce cours, le cas que l'on rencontrera le plus souvent est celui de la famille
$(x \mapsto (x-a)^n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

Développements asymptotiques

Exemple. On considère $f : x \mapsto xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

f est bien définie sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ donc f est définie au voisinage de $+\infty$.
On cherche un développement asymptotique de f en $+\infty$.

Traitons d'abord l'exposant. On commence par mettre en facteur les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Comme $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Développements asymptotiques

Et donc

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

On utilise ensuite le DL d'exponentielle en 0.

En effet, $u=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

Développements asymptotiques

donc

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{2x}{x^2-1}} &= 1 + \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}\right)^3 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{4}{x^2} + \frac{1}{6}\frac{8}{x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi

$$
f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).
$$

Développements asymptotiques

Application à l'étude des branches infinies de fonctions

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Branche infinie.
On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie lorsque l'une des deux coordonnées (abscisse ou ordonnée) tend vers $\pm\infty$.

Courbes asymptotes.
On cherche souvent à déterminer plus précisément l'allure de ces branches infinies.
Peut-on en particulier dire si $\mathcal{C}_f$ "ressemble" à une autre courbe plus simple ?
Pour cela, définissons la notion de courbes asymptotes.

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $\pm\infty$. On dit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont **asymptotes** (ou que $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour asymptote) au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Développements asymptotiques

Application à l'étude des branches infinies de fonctions

Asymptote verticale.
Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un point a fini, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote (cela ne rentre pas dans le cadre de la définition précédente car la droite d'équation $x = a$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction, mais l'idée est la même).

Positions relatives.
Lorsque l'on sait que deux courbes sont asymptotes au voisinage de a (fini ou $\pm\infty$), on se demande souvent quelle est leur position relative au voisinage de a.
Pour cela, il suffit d'étudier le signe de $f - g$ au voisinage de a.
En effet, si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de a, et si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ au voisinage de a, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de a.

Développements asymptotiques

Application à l'étude des branches infinies de fonctions

Utilisation d'un développement asymptotique.

Lorsqu'on connaît un développement asymptotique de f suffisamment précis, on peut souvent en déduire l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point considéré. En particulier, s'il existe une asymptote, et si oui quelle est la position relative de la courbe de f et de son asymptote.

Exemple.

Reprenons l'exemple précédent : $f : x \mapsto e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On a vu que

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Développements asymptotiques

Application à l'étude des branches infinies de fonctions

D'abord, on en déduit que

$$f(x) - (x+2) = \frac{2}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

et donc

$$f(x) - (x+2) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$$

- Comme $\frac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi $f(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; ainsi la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$.
- De plus $f(x) - (x+2)$ est du signe de $\frac{2}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc positif, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (D) au voisinage de $+\infty$.