

## Inégalités et quantification

**Exercice 1** Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1.  $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$ .
2.  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$ .
3.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon)$ .
4.  $\exists N \in \mathbf{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbf{N}, (n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon)$ .
5.  $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$ .
6.  $\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2], -10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$ .
7.  $\forall x \in ]-3, -1[, \forall y \in ]2, 4[, xy > -6$ .
8.  $\forall x \in ]-3, -1[, \exists y \in ]2, 4[, xy > -6$ .
9.  $\exists x \in ]-3, -1[, \forall y \in ]2, 4[, xy > -6$ .
10.  $\forall (x, y) \in ]-2, 7[ \times ]-4, 1[, -28 < xy < 8$ .

## Bornes supérieures

**Exercice 2** Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} : n, p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

$$D = \{-y(x^2 + 1) : x \in [-1, 0] \text{ et } y \in [-2, -1] \cup [3, 4]\}.$$

**Exercice 3** Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbf{R}$  telles que  $A \subset B$  et  $B$  est majorée. Montrer que  $\sup A \leq \sup B$ .

**Exercice 4** Soit  $I$  un ensemble non vide et  $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$  deux familles majorées de réels.

1. Montrer que  $(a_i + b_i)_{i \in I}$  est majorée et que  $\sup_{i \in I} (a_i + b_i) \leq \sup_{i \in I} a_i + \sup_{i \in I} b_i$ .
2. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?

**Exercice 5** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble  $E = \{x \in [0; 1] : f(x) \leq x\}$  admet une borne inférieure  $b$ .
2. Montrer que  $b = \min E$ .
3. Montrer finalement que  $b$  est un point fixe de  $f$ .

## Suites adjacentes, monotones, extraites, de Cauchy ...

**Exercice 6** Pour tout entier  $n \geq 1$ , posons  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ .

1. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.
2. Notons  $\ell$  leur limite. Trouver un intervalle d'extrémités rationnelles, contenant  $\ell$  et de longueur inférieure à 0,002.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que  $e = 1 + \ell$  et en déduire une valeur approchée rationnelle de  $e$  à 0,002 près.

**Exercice 7** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres réels.

1. On suppose que les suites extraites  $(u_{2k})_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2k+1})_{k \in \mathbf{N}}$  convergent vers la même limite. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que  $(u_{2k})_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2k+1})_{k \in \mathbf{N}}$  convergent mais pas  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Exercice 8** Soit  $u$  une suite de nombres réels. On dit que  $\lambda \in \mathbf{R}$  est une *valeur d'adhérence* de  $u$  s'il existe une suite extraite de  $u$  qui converge vers  $\lambda$ .

1. Déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite convergente.
2. Déterminer les valeurs d'adhérences de la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par  $u_n = (-1)^n$ .
3. Donner un exemple d'une suite qui n'admet pas de valeur d'adhérence.
4. Donner un exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

**Exercice 9**

Soit  $0 < a < 1$  un réel et  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite vérifiant :  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq a^n$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est de Cauchy.

## Continuité et continuité uniforme

**Exercice 10** Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $a < b$ . Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions continues. On suppose que pour tout  $x \in [a, b], f(x) > g(x) > 0$ . Montrer qu'il existe  $k > 1$  tel que pour tout  $x \in [a, b], f(x) \geq kg(x)$ .

**Exercice 11** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum global sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 12**

1. Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$ , on a  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ .
2. En déduire que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

**Exercice 13**

1. Pour  $x > 0$ , calculer  $\ln(2x) - \ln x$ .
2. En déduire que  $x \mapsto \ln x$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Exercice 14** Soit  $k$  un réel strictement positif,  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si pour tous  $x, y \in I$ , on a  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ .

1. Montrer que si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne alors  $f$  est uniformément continue.
2. Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 + |x|}$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbf{R}$ . En déduire qu'elle est uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ .
3. Supposons que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée  $f'$  est bornée. Montrer que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.
4. En déduire que pour chaque  $\alpha < 1$ , la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est uniformément continue sur  $]1, +\infty[$ .
5. Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
6. Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$   $k$ -lipschitzienne avec  $k \in ]0, 1[$ .
  - (a) Montrer qu'il existe un unique  $\ell \in [a, b]$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .
  - (b) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 \in [a, b]$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
    - i. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ .
    - ii. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Exercice 15** Montrer que  $x \mapsto x \ln x$  est uniformément continue sur  $]0, 1]$ .

**Exercice 16**

1. Soit  $f: ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  uniformément continue. Montrer que  $f$  est bornée.
2. Redémontrer que  $x \mapsto \ln x$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Équivalents, développements limités**

**Exercice 17** Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$g: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

2. On considère  $f: ]-1/2, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$ .
  - (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $f$ .
  - (b) En déduire un équivalent de  $f$  en 0.

3. Si elle existe, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right).$$

**Exercice 18** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité de la fonction logarithmique à l'ordre 3 en 2.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

3. Donner un équivalent simple au voisinage de  $+\infty$  de la fonction

$$g: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x}) - \ln x.$$

4. Trouver un développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^2}$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

5. Trouver un développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^3}$  de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  par

$$v_n = 2n \cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n} - 2n.$$

**Exercice 19** On note, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3 + nx - 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe un unique réel  $u_n$  vérifiant  $u_n^3 + nu_n = 1$ .
2. Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite à termes strictement positifs.
3. (a) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , calculer  $f_{n+1}(u_n)$ .  
(b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge.
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .
5. (a) Déterminer un réel  $a$  et un entier naturel non nul  $k$  tels que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $u_n \sim \frac{a}{n^k}$ .

Dans la suite, on note pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $v_n = \frac{a}{n^k}$ .

- (b) Déterminer un équivalent de  $u_n - v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .