

Feuille n° 4 : Séries numériques

Exercice 1 Étudier la nature des séries suivantes, puis calculer leur somme quand c'est possible :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+100}$;
2. $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n}{n+1}$;
3. $\sum_{n \geq 0} e^{-n}$;
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+4)}$;
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$;
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$.

Exercice 2 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{5^n + 2}$;
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^3 + 10)^{1/4}}$;
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$;
4. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{e^n}$;
6. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$;
7. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$;
8. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$;
9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!}$;
10. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$;
11. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3}}$;
12. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$.

Exercice 3 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{10}}$;
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$;
3. $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$;
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$;
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$;
6. $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 1}}{n\sqrt{n-1}}$;
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$;
8. $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$;
9. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$;
10. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$;
11. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}}$;
12. $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$;
13. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n+3} \ln n}$;
14. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;
15. $\sum_{n \geq 1} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4

On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalentes.
2. Étudier la nature de la série de terme général v_n .
3. (a) Pourquoi le théorème sur les séries alternées ne s'applique-t-il pas à la série de terme général u_n ?
(b) Montrer que la série de terme général u_n diverge.

(Indication : on pourra utiliser un développement limité de $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ en 0)

4. Pourquoi le théorème sur les séries dont les termes généraux sont équivalents ne s'applique pas pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Exercice 5 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^1 x^n f(x) dx$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x) dx.$$

3. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 6 [Constante d'Euler]

On considère la suite $(u_p)_{p \geq 1}$ définie, pour tout entier $p \geq 1$, par

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$.

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
2. En déduire que la série de terme général u_p converge et que sa somme γ vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.
3. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,

$$u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+u} du.$$

4. En déduire que, pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre H_n et S_n .
(b) Montrer que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.
- (b) Déterminer un entier naturel n_0 pour lequel T_{n_0} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 7 [Exemples de produits de Cauchy de deux séries]

1. (a) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.
(b) Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même diverge.
On pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$.
2. Soit a et b deux réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$.
(a) Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.
On note c_n le terme général de la série obtenue quand on fait le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer c_n en fonction de n .
(c) En déduire que $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Exercice 8 Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$?

Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

1. Soit a un réel et $g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} g(t) dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x) dx.$$

3. En déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente.
4. En déduire que si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge alors la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge.
5. (Plus difficile) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [n, n+1]$, montrer que

$$\left| \int_n^a f(x) dx \right| \leq |f(n)| + \int_n^{+\infty} |f'(x)| dx.$$

6. (Plus difficile) Dédurre des questions précédentes que, réciproquement, si la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.
7. Expliquer pourquoi cela permet de retrouver le cas d'une fonction décroissante positive vu en cours, si celle-ci est de classe C^1 .
8. Application : montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ converge.

Exercice 10 [Critère d'Abel] Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant qui est hors programme (il n'est donc pas à connaître pour l'examen).

Théorème. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

- (i) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est bornée.
- (ii) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

1. Expliquer pourquoi ce critère généralise celui des séries alternées.

On considère maintenant deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant les hypothèses du théorème dans le but de le démontrer.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = S_0 v_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = S_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}).$$

4. Conclure.

5. Application : soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

- (b) En déduire que la série $\sum a_n \cos(n\theta)$ est convergente.