

Feuille n° 3 : Intégrales impropres

**Exercice 1** Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer la valeur des intégrales convergentes :

1.  $\int_0^{+\infty} \sin t \, dt$
2.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx$
4.  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt$
5.  $\int_0^1 \ln x \, dx$
6.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
7.  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

**Exercice 2** Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes :

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$
2.  $\int_0^1 t \ln t \, dt$
3.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2} \, dx$
4.  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/2}} \, dt$
5.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} (2 + 3 \cos^9 x) \, dx$
6.  $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$
7.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx$

**Exercice 3** On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 8x + 20}$ .

1. Pourquoi la fonction  $f$  est-elle définie et continue sur  $\mathbb{R}$  ?
2. Prouver que l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Prouver que l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 8x + 20)^2}$  converge.

**Exercice 4 La fonction gamma.**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ .
2. Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\Gamma(n+1)$ .

**Exercice 5** Soit  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. On suppose que  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ .
  - (a) Montrer que si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$  converge alors  $\ell = 0$ .
  - (b) La condition  $\ell = 0$  suffit-elle à garantir la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$  ?
2. Donner un exemple de fonction continue  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  à valeurs positives et non bornée (et donc telle que  $f$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ ) telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$  converge.

**Exercice 6** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} \, dx$
2.  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \, dt$
3.  $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} \, dt$
4.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}} \, dx$
5.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} \, dx$
6.  $\int_{3/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \, dt$
7.  $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/4} - t^{1/4}}{t^{1/3}} \, dt$
8.  $\int_0^{\pi/2} \frac{t}{e^{\sin t} - 1} \, dt$

**Exercice 7** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a \in \mathbb{R}$  pour la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a} \, dt$ .

**Exercice 8** Discuter, selon les valeurs du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \, dt$
2.  $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) \, dx$
3.  $\int_2^{+\infty} \left( \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x} \right) \, dx$  où  $\alpha \in [-4, +\infty[$ .

**Exercice 9**

1. Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$  converge.
2. En utilisant un changement de variable, montrer que  $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt = 0$ .
3. En déduire que, pour tout  $a > 0$ ,  $\int_0^\infty \frac{\ln(t) \, dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$ .

**Exercice 10** L'objectif de cet exercice est d'étudier  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$  et de calculer sa valeur.

- Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$  est convergente.
- On montre maintenant que l'intégrale est semi-convergente.
  - Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin t| \geq \sin^2 t$ .
  - Démontrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$  est convergente.
  - En déduire que  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y} dy$  diverge.
- On considère la fonction  $f: ]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{\sin(y)}$ .
  - Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .  
On notera toujours  $f$  ce prolongement.
  - En déduire que  $\int_0^{\pi/2} f(y) \sin(ny) dy$  converge vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin(y)} dy$ .
  - Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $J_n$  converge.
  - Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$ .

On rappelle que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

- Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, puis conclure.

**Exercice 11 Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss.**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ .
  - Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive.
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a
 
$$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}.$$
- Montrer que la suite  $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
- On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et déterminer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Déduire des questions précédentes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n$ .

- Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ , on a :  $\ln(1+x) \leq x$ .
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a
 
$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u du.$$

On pourra poser  $t = \sqrt{n} \cos u$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} u du.$$

On pourra poser  $t = \sqrt{n} \cotan(u)$ .

- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

- Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et déterminer sa valeur.

**Exercice 12**

- Justifier que pour tout réel  $x > 0$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$  converge.

Que pouvez-vous dire dans le cas où  $x \leq 0$  ?

On définit alors la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt.$$

- Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - Déterminer la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ .
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du$ .
  - En déduire que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et déterminer  $\varphi'$ .
  - Retrouver alors le résultat de la question 2.(a).
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt.$$

- En déduire un équivalent simple de  $\varphi(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .