

Biophysique de la Circulation

Mécanique des Fluides

Théorème de Bernoulli

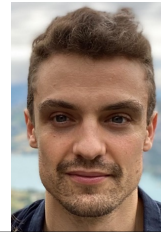
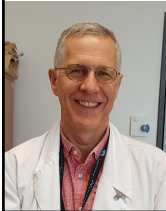
Anthime FLAUS

Marc Janier

Service de Médecine Nucléaire

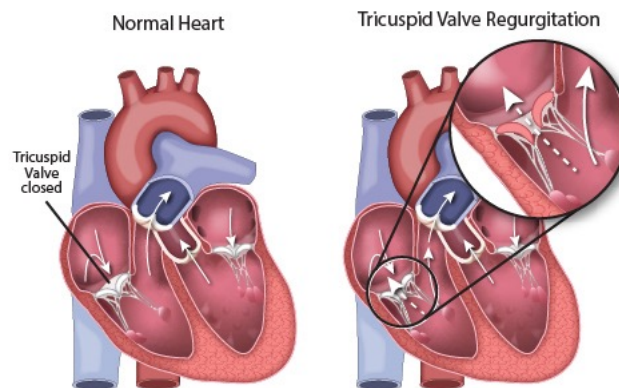
Hôpital GHE - cardiologie

Faculté Lyon-Est



1

Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



2

2

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

= Étude des mouvements des fluides, ou écoulements

Caractérisation et quantification de l'écoulement

1) Dynamique des fluides parfaits en régime permanent écoulement (sans perte de charge)

= **Equation de Bernoulli**

2) Dynamique des fluides réels (écoulement avec perte de charge)

= **notion de Viscosité** (Régime d'écoulement, Reynolds)

= **Loi de Poiseuille**

Hydrodynamique. Définition 3

3

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements



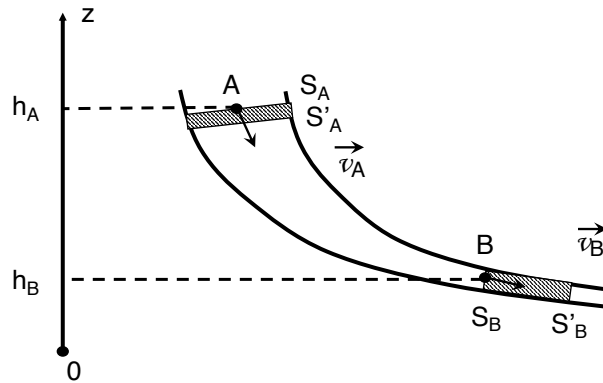
- Daniel Bernoulli 1738
- Hypothèses
 - le mouvement est permanent (transition = 0, changements = 0)
 - le fluide est parfait (viscosité = 0)
 - le fluide est incompressible (liquide)

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 4

4

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements



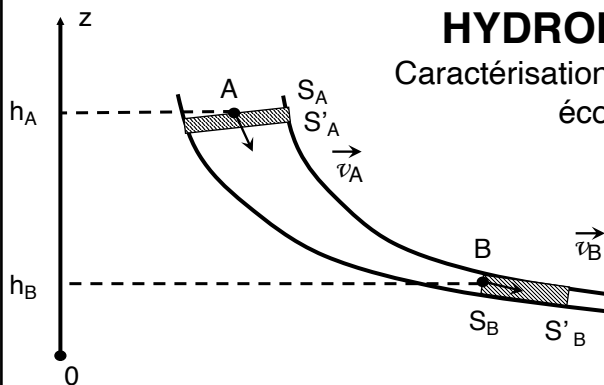
Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

5

5

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements



- Le fluide s'écoule à travers le tube de courant entre les points A et B
- Pendant un intervalle Δt :
 - Les points de S_A se déplacent de Δt se retrouvant sur S'_A , de même pour S_B et S'_B
 - Le fluide est incompressible, donc la masse Δm contenue entre S_A et S'_A et S_B et S'_B doit être identique. Cela revient à la conservation du débit massique :

$$\rho S_A v_A \Delta t = \rho S_B v_B \Delta t$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

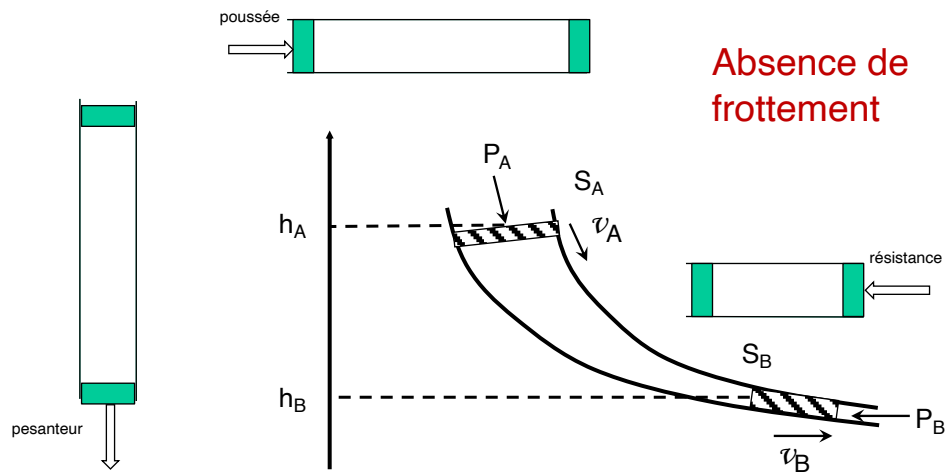
6

6

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Bilan des forces

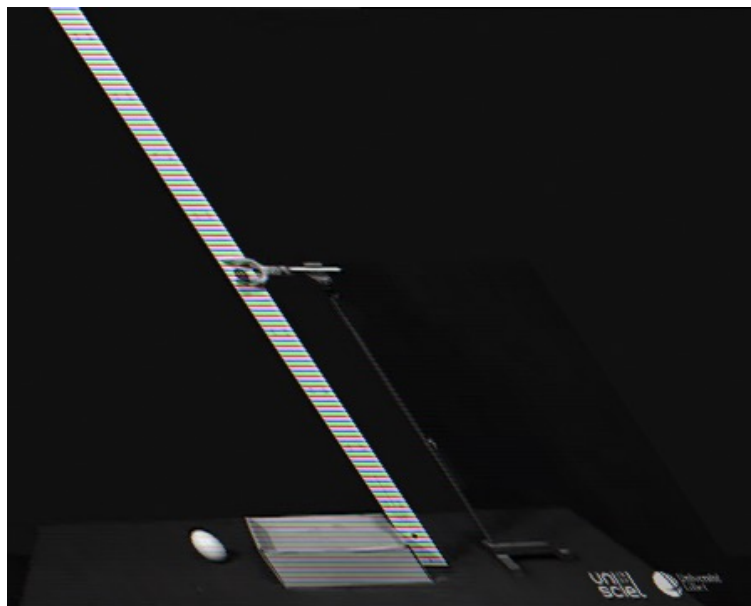


Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli

7

7

Conservation de l'énergie



8

8

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

- On considère que la masse Δm de fluide est passé du point A au point B
- Entre ces deux situations la variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces appliquées

$$\Delta E_c = \Delta W_{\text{pres}} + \Delta E_p$$

- Variation d'énergie cinétique entre A et B : $\Delta E_c = 1/2 \Delta m (v_B^2 - v_A^2)$
- Forces appliquées : force de pesanteur et force de pression

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli **9**

9

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

- Travaux de pression P_A et P_B** ($W = F.d$ et $F = P.S$ d'où $W = P.S.d$) effectués sur les surfaces A et B et qui provoquent pendant Δt des déplacements Δl_A et Δl_B des liquides présents sur les surfaces

$$\Delta W_{\text{pres}} = P_A S_A \Delta l_A - P_B S_B \Delta l_B = (P_A S_A v_A - P_B S_B v_B) \Delta t$$
- Variation d'énergie potentielle** liée à l'altitude, par élément de masse, entre A et B

$$\Delta E_p = -g \Delta m (z_B - z_A) = g \Delta m (z_A - z_B)$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli **10**

10

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant dans le cadre de l'écoulement d'un fluide parfait d'où:

$$\Delta E_{\text{tot}} = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta W_{\text{pres}} \text{ d'où}$$

$$1/2 \Delta m (v_B^2 - v_A^2) + \Delta m g (z_B - z_A) + (P_B S_B v_B - P_A S_A v_A) \Delta t = 0$$

Dans cette équation, chaque terme a les dimensions d'une énergie par unité de volume ou densité d'énergie

Comme $\rho S v \Delta t = \Delta m$ donc $\Delta t = \Delta m / (\rho S v)$ et si $\rho / \Delta m$ alors

$$1/2 \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g (z_B - z_A) + P_B - P_A = 0$$

$$\text{d'où } P_A + \rho g z_A + 1/2 \rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + 1/2 \rho v_B^2 = \text{Cste}$$

Cette constante est appelée la charge (symbole E)

Sa dimension est celle d'une pression

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

L'énergie totale de fluide est la somme de 3 termes

$$E_T = E_{\text{pres}} + \rho g h + 1/2 \rho v^2 \text{ ou } E_T = E_{\text{pres}} + E_{\text{pes}} + E_c$$

W_{pres} = Energie potentielle de pression

E_p = Energie potentielle de pesanteur

E_c = Energie cinétique

Expression du théorème de Bernoulli

Dans un fluide parfait incompressible en écoulement permanent, la charge est constante en tout point du circuit.

Quizz #2

Le théorème de Bernoulli déclare que la somme des travaux de pression, l'énergie cinétique et _____ par unité de volume d'un fluide _____ et _____ le long d'une ligne de courant.

13

13

Quizz #2

Le théorème de Bernoulli déclare que la somme des travaux de pression, l'énergie cinétique et **l'énergie potentielle** par unité de volume d'un fluide **incompressible** et **parfait** le long d'une ligne de courant.

14

14

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Csq 1 : Le résultat est prouvé pour les tubes de courant, on peut l'étendre aux tubes où il existe un écoulement en régime laminaire (Cf viscosité)

Csq 2 : Loi de l'hydrostatique

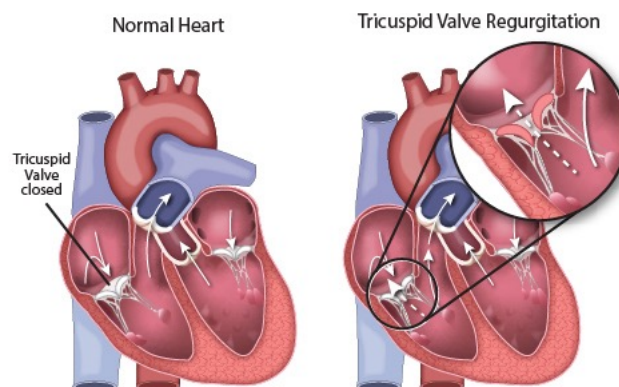
si $v = 0$ le théorème devient $P + \rho g z = Cste$

Csq 3 : La pression en 1 point dépend de la vitesse du fluide à altitude identique

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 15

15

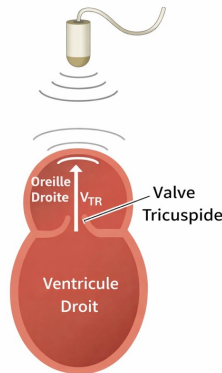
Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



16

16

Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



$$P_{od} + \rho g \cancel{z_d} + 1/2 \rho v_{od}^2 = P_{vd} + \rho g \cancel{z_d} + 1/2 \rho v_{vd}^2 = Cste$$

$$P_{od} + 1/2 \rho v_{od}^2 = P_{vd} + 1/2 \rho v_{vd}^2$$

$$\Delta P = 1/2 \rho v_{od}^2 - 1/2 \rho v_{vd}^2$$

$$\Delta P \approx 1/2 \rho v_{od}^2$$

$$\rho_{sang} = 1060 \text{ kg/m}^3$$

$$1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$$

$$P_{vd} - P_{od} (\text{mmHg}) \approx \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot 1060}{133.3} \right] v_{od}^2 (\text{m/s})^2$$

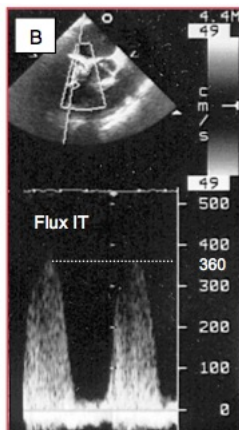
$$\Delta P \approx 4v_{od}^2$$

image : <https://www.youtube.com/watch?v=cO6B9Q3At1Y>

17

17

Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



Une vitesse maximale de 3,6 m/s est mesurée à travers la valve tricuspid en régurgitation.

La différence de pression est égale à :

$$\Delta P \approx 4v_{od}^2$$

$$\approx 4 \times 3,6^2$$

$$\approx 52 \text{ mmHg}$$

La pression dans le VD est supérieure de 36mmHg à celle de l'OD.

image : <https://www.pac6.ch/fr/chapitres/25-echocardiographie-transoesophagienne-1ere-partie/25-4-mesures-hemodynamiques/25-4-2-equation-de-bernoulli>

18

18

HYDRODYNAMIQUE

- Application de la loi de Bernoulli

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Cste}$$

1. Tube de Pitot
2. Phénomène de Venturi

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 19

19

Le tube de Pitot

- Le **tube de Pitot** est utilisé pour mesurer la **vitesse d'un fluide** en mouvement, qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un gaz. Application en aéronautique, utilisé aussi pour les sciences médicales, notamment en physiologie cardiovasculaire et en exploration fonctionnelle respiratoire.

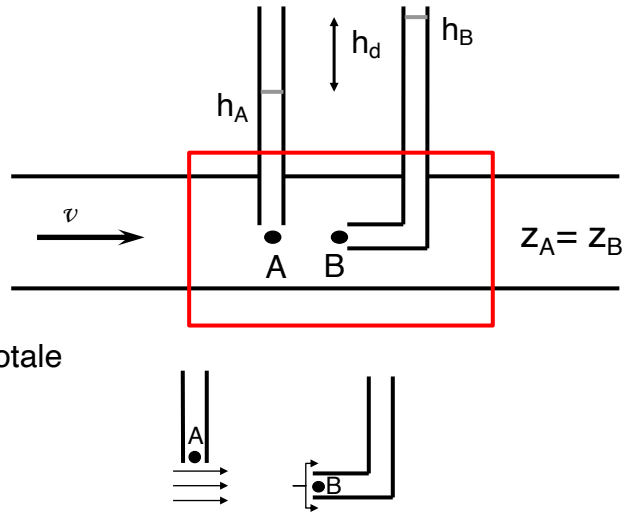
20

20

Principe du tube de Pitot

Comparer la pression statique et totale

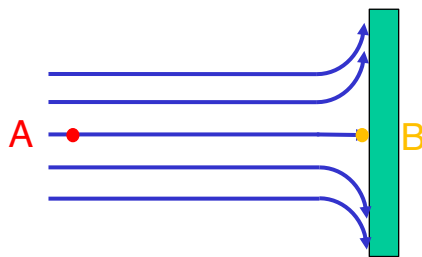
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Pression totale}$$



Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 21

21

Principe : focus



$$\cancel{P_A + \rho g z_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \cancel{P_B + \rho g z_B} + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

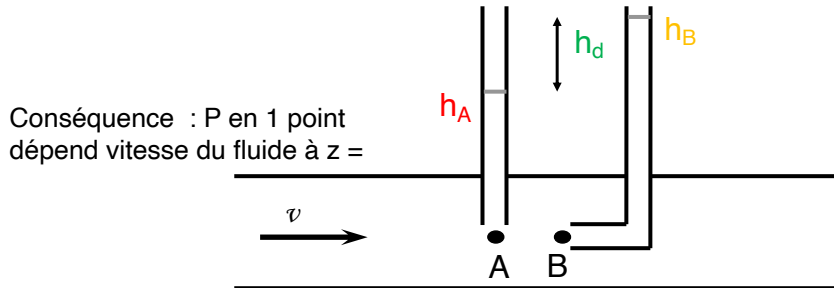
$$= 0$$

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 22

22

Principe du tube de Pitot



$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B \text{ soit } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

$$\text{et } P_A = P_0 + \rho g h_A \text{ et } P_B = P_0 + \rho g h_B$$

$$\text{d'où } P_A - P_B = \rho g h_A - \rho g h_B = \rho g h_d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \rho g h_d \text{ d'où } h_d = \frac{v^2}{2g} \text{ (indépendant de } \rho \text{)}$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 23

23

Principe du tube de Pitot

La mesure de ces 2 hauteurs de manomètre h_d peut permettre de mesurer la vitesse d'écoulement du fluide, ou bien la vitesse d'un objet (avion) dans un fluide (air)



$$v = \sqrt{2 g h_d}$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 24

24



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Fisica
e Astronomia
Galileo Galilei

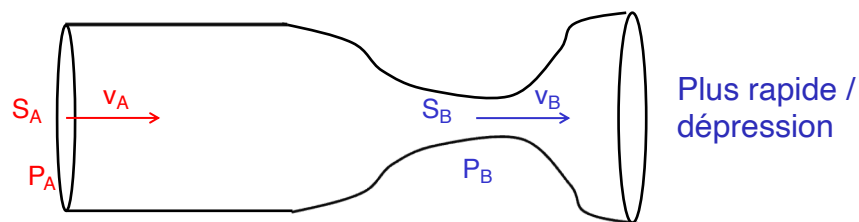
Venturi tube

28

28

HYDRODYNAMIQUE : Effet Venturi

Cas de la sténose



$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

d'où $P_A - P_B = \rho g (z_B - z_A) + \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$ or $\rho g (z_B - z_A) = 0$ (si tube horizontal)

et débit constant c.à.d. $S_A v_A = S_B v_B$ donc $v_A^2 = (S_B/S_A)^2 v_B^2$

$$\text{d'où } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho [1 - (S_B/S_A)^2] v_B^2 = \text{Cste } v_B^2$$

car $\rho = \text{cste}$ et $S_B/S_A = \text{cste}$

La dépression en cas de rétrécissement est proportionnelle au carré de la vitesse

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

29

29

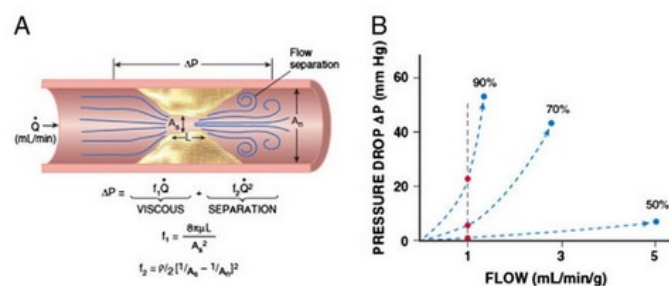
Effet Venturi Le vaporisateur



30

30

Exemple en médecine: la sténose vasculaire



Duncker D et al. 2014 Progress in cardiovascular diseases

31

31

HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Complexification de Bernoulli

Utilisation de notions simples qui supposent une vitesse d'écoulement constante. Si on tient compte de la réalité, débit pulsatile, inertie de la colonne sanguine, compliance (ou élasticité) des vaisseaux, on aboutit à une équation de base complexe (différentielle du 2^e ordre)

1. Quel phénomène décrit le tube de Pitot ?

- a) Relation entre pression et vitesse d'un fluide en mouvement.
- b) Conservation du débit dans un conduit fermé.
- c) Mesure de la densité d'un fluide.

2. Que se passe-t-il dans une sténose artérielle selon Venturi ?

- a) La pression augmente et la vitesse diminue.
- b) La pression diminue et la vitesse augmente.

34

34

3. Quelle est la formule dérivée de l'effet Venturi pour la dépression dans un tube horizontal ?

- a) $P_A - P_B = \rho g h$
- b) $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$
- c) $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$
- d) $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho [1 - (\frac{S_B}{S_A})^2] v_B^2$

35

35

Exercice 2

Un grand réservoir d'eau contient un orifice circulaire de diamètre $d = 20\text{mm}$ situé à une hauteur $h = 3,5\text{ m}$ en dessous de la surface de l'eau. Le réservoir alimente un tuyau horizontal de 2 mètres de longueur et de même diamètre que l'orifice.

1. Calculez la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de l'orifice
2. Estimez le temps nécessaire pour remplir un récipient de 25 L placé sous l'orifice

On considère $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$

On néglige les pertes de charge dans le tuyau.

36

36

Résultat

1. Calcul de la vitesse v d'écoulement

Application du théorème de Bernoulli : $v = \sqrt{2 g h}$

Avec $g = 9.81\text{m/s}^2$ et $h = 3.5\text{m}$ alors **$v = 8.29\text{m/s}$**

2. Calcul du débit volumique Q

Le débit volumique Q est donné par $Q = v.A$

$1\text{m}^3 = 1000\text{Litre}$

On calcule $A = 3.14 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$

On calcule $Q = 8.29 \cdot 3.14 \cdot 10^{-4} = 0.0026\text{ m}^3/\text{s} = \mathbf{2.6\text{ L/s}}$

3. Le temps nécessaire pour remplir un récipient de volume $V = 25\text{ L}$ est donné par $t = V/Q$

Soit $V = 25\text{L} = 0.025\text{ m}^3$ soit $t = 0.025/0.0026 \approx 9.62\text{ s}$

37

37