



# Biophysique de la Circulation

## Mécanique des Fluides

Théorème de Bernoulli

Anthime FLAUS

Marc Janier



Service de Médecine Nucléaire

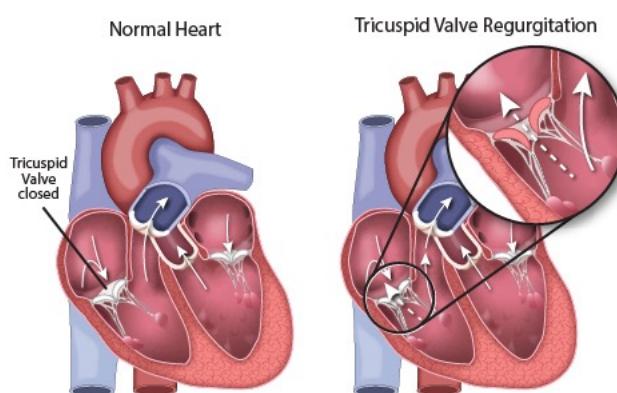
Hôpital GHE - cardiologie

Faculté Lyon-Est



1

## Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



2

2

## **HYDRODYNAMIQUE**

Caractérisation et quantification des écoulements

= Étude des mouvements des fluides, ou écoulements

**Caractérisation et quantification de l'écoulement**

**1) Dynamique des fluides parfaits en régime permanent  
écoulement (sans perte de charge)**

**= Equation de Bernoulli**

2) Dynamique des fluides réels (écoulement avec perte de charge)

= notion de Viscosité (Régime d'écoulement, Reynolds)

= Loi de Poiseuille

Hydrodynamique. Définition 3

3

## **HYDRODYNAMIQUE**

Caractérisation et quantification des écoulements



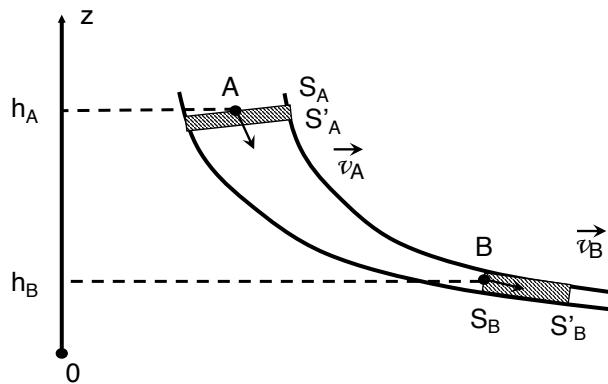
- Daniel Bernoulli 1738
- Hypothèses
  - le mouvement est permanent (transition =0, changements = 0)
  - le fluide est parfait (viscosité = 0)
  - le fluide est incompressible (liquide)

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 4

4

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements



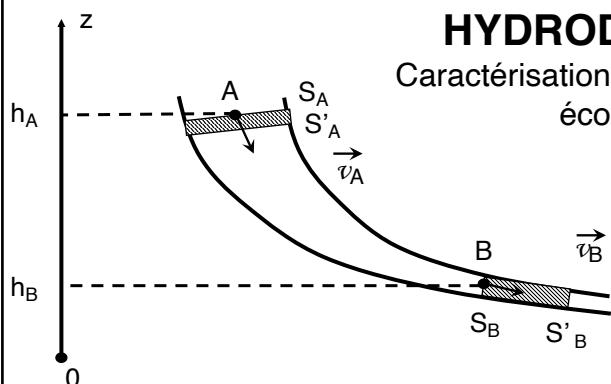
Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

5

5

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements



- Le fluide s'écoule à travers le tube de courant entre les points A et B
- Pendant un intervalle  $\Delta t$ :
  - Les points de  $S_A$  se déplacent de  $\Delta t$  se retrouvant sur  $S'_A$ , de même pour  $S_B$  et  $S'_B$
  - Le fluide est incompressible, donc la masse  $\Delta m$  contenue entre  $S_A$  et  $S'_A$  et  $S_B$  et  $S'_B$  doit être identique. Cela revient à la conservation du débit massique :

$$\rho S_A v_A \Delta t = \rho S_B v_B \Delta t$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

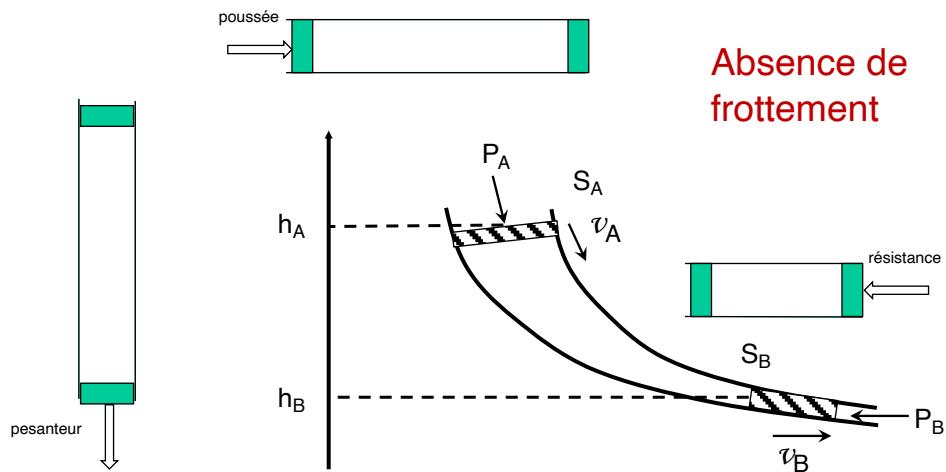
6

6

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

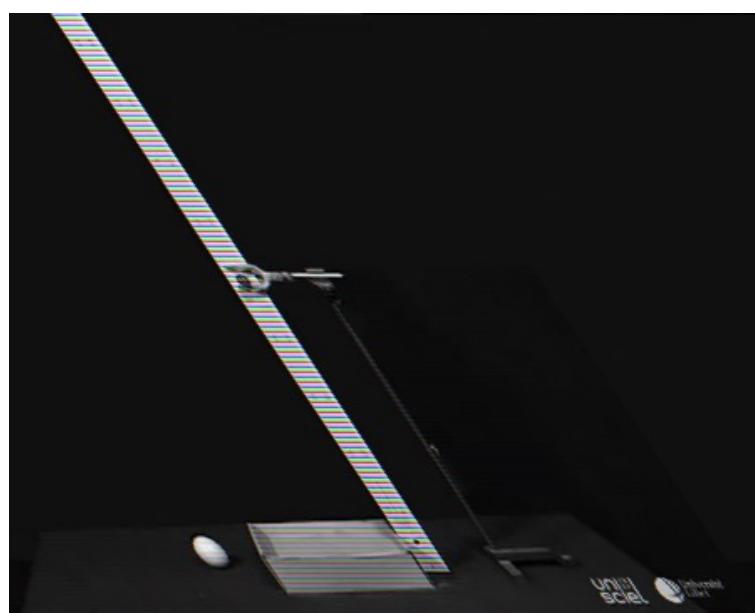
### Bilan des forces



Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli

7

## Conservation de l'énergie



8

8

**HYDRODYNAMIQUE**  
Caractérisation et quantification des écoulements

- On considère que la masse  $\Delta m$  de fluide est passé du point A au point B
- Entre ces deux situations la variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces appliquées

$$\Delta E_c = \Delta W_{\text{pres}} + \Delta E_p$$

- Variation d'énergie cinétique entre A et B :  $\Delta E_c = 1/2\Delta m (v_B^2 - v_A^2)$
- Forces appliquées : force de pesanteur et force de pression

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli      9

9

**HYDRODYNAMIQUE**  
Caractérisation et quantification des écoulements

- Travaux de pression  $P_A$  et  $P_B$**  ( $W = F.d$  et  $F = P.S$  d'où  $W = P.S.d$ ) effectués sur les surfaces A et B et qui provoquent pendant  $\Delta t$  des déplacements  $\Delta l_A$  et  $\Delta l_B$  des liquides présents sur les surfaces

$$\Delta W_{\text{pres}} = P_A S_A \Delta l_A - P_B S_B \Delta l_B = (P_A S_A v_A - P_B S_B v_B) \Delta t$$

- Variation d'énergie potentielle** liée à l'altitude, par élément de masse, entre A et B

$$\Delta E_p = - g \Delta m (z_B - z_A) = - g \Delta m (z_A - z_B)$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli      10

10

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant dans le cadre de l'écoulement d'un fluide parfait d'où:

$$\Delta E_{\text{tot}} = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta W_{\text{pres}} \quad \text{d'où}$$

$$1/2 \Delta m (\nu_B^2 - \nu_A^2) + \Delta m g (z_B - z_A) + (P_B S_B \nu_B - P_A S_A \nu_A) \Delta t = 0$$

*Dans cette équation, chaque terme a les dimensions d'une énergie par unité de volume ou densité d'énergie*

Comme  $\rho S v \Delta t = \Delta m$  donc  $\Delta t = \Delta m / (\rho S v)$  et si \*  $\rho / \Delta m$  alors  
 $1/2 \rho (\nu_B^2 - \nu_A^2) + \rho g (z_B - z_A) + P_B - P_A = 0$

$$\text{d'où } P_A + \rho g z_A + 1/2 \rho \nu_A^2 = P_B + \rho g z_B + 1/2 \rho \nu_B^2 = \text{Cste}$$

Cette constante est appelée la charge (symbole E)

Sa dimension est celle d'une pression

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli

11

11

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

L'énergie totale de fluide est la somme de 3 termes

$$E_T = E_{\text{pres}} + \rho gh + 1/2 \rho \nu^2 \quad \text{ou} \quad E_T = E_{\text{pres}} + E_{\text{pes}} + E_c$$

$E_{\text{pres}}$  = Energie potentielle de pression

$E_{\text{pes}}$  = Energie potentielle de pesanteur

$E_c$  = Energie cinétique

Expression du théorème de Bernouilli

Dans un fluide parfait incompressible en écoulement permanent, la charge est constante en tout point du circuit.

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 12

12

## Quizz #2

Le théorème de Bernoulli déclare que la somme des travaux de pression, l'énergie cinétique et \_\_\_\_\_ par unité de volume d'un fluide \_\_\_\_\_ et \_\_\_\_\_ le long d'une ligne de courant.

13

13

## Quizz #2

Le théorème de Bernoulli déclare que la somme des travaux de pression, l'énergie cinétique et **l'énergie potentielle** par unité de volume d'un fluide **incompressible** et **parfait** le long d'une ligne de courant.

14

14

## HYDRODYNAMIQUE

Caractérisation et quantification des écoulements

Csq 1 : Le résultat est prouvé pour les tubes de courant, on peut l'étendre aux tubes où il existe un écoulement en régime laminaire (Cf viscosité)

Csq 2 : Loi de l'hydrostatique

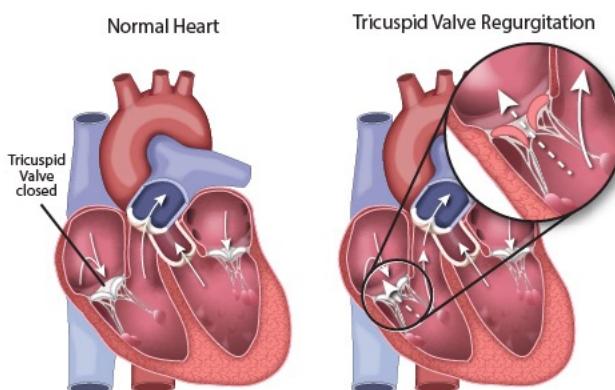
si  $v = 0$  le théorème devient  $P + \rho g z = \text{Cste}$

Csq 3 : La pression en 1 point dépend de la vitesse du fluide à altitude identique

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernoulli 15

15

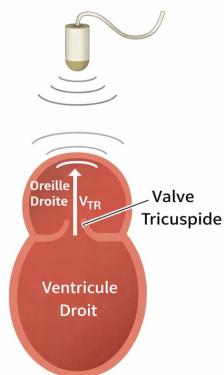
## Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



16

16

## Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



$$P_{od} + \rho g \cancel{z_d} + 1/2 \rho v_{od}^2 = P_{vd} + \rho g \cancel{z_d} + 1/2 \rho v_{vd}^2 = \text{Cste}$$

$$P_{od} + 1/2 \rho v_{od}^2 = P_{vd} - 1/2 \rho v_{vd}^2$$

$$\Delta P = 1/2 \rho v_{od}^2 - 1/2 \rho v_{vd}^2$$

$$\Delta P \approx 1/2 \rho v_{od}^2$$

$$\rho_{\text{sang}} = 1060 \text{ kg/m}^3$$

$1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$

$$P_{vd} - P_{od} (\text{mmHg}) \approx \left[ \frac{\frac{1}{2} * 1060}{133.3} \right] v_{od}^2 (\text{m/s})^2$$

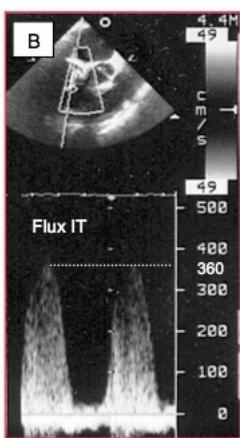
$$\Delta P \approx 4v_{od}^2$$

image : <https://www.youtube.com/watch?v=cO6B9Q3At1Y>

17

17

## Comment mesurer la différence de pression entre oreillette et ventricule ?



Une vitesse maximale de 3,6 m/s est mesurée à travers la valve tricuspidale en régurgitation.

La différence de pression est égale à :

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx 4v_{od}^2 \\ &\approx 4 \times 3,6^2 \\ &\approx 52 \text{ mmHg}\end{aligned}$$

La pression dans le VD est supérieure de 36mmHg à celle de l'OD.

image : <https://www.pac6.ch/fr/chapitres/25-echocardiographie-transoesophagienne-1ere-partie/25-4-mesures-hemodynamiques/25-4-2-equation-de-bernoulli>

18

18

## HYDRODYNAMIQUE

- Application de la loi de Bernoulli

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Cste}$$

1. Tube de Pitot
2. Phénomène de Venturi

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 19

19

## Le tube de Pitot

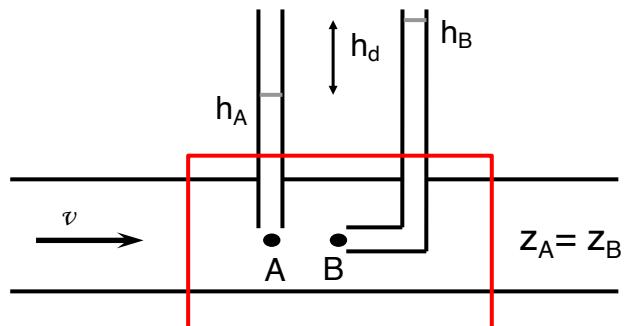
- Le **tube de Pitot** est utilisé pour mesurer la **vitesse d'un fluide** en mouvement, qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un gaz. Application en aéronautique, utilisé aussi pour les sciences médicales, notamment en physiologie cardiovasculaire et en exploration fonctionnelle respiratoire.

20

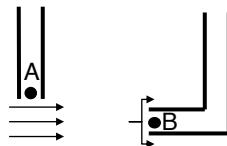
20

## Principe du tube de Pitot

Comparer la pression statique et totale



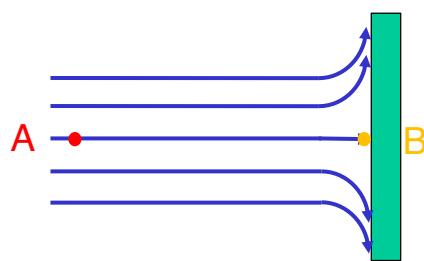
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Pression totale}$$



Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 21

21

## Principe : focus



$$\cancel{P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2} = \cancel{P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2} = 0$$

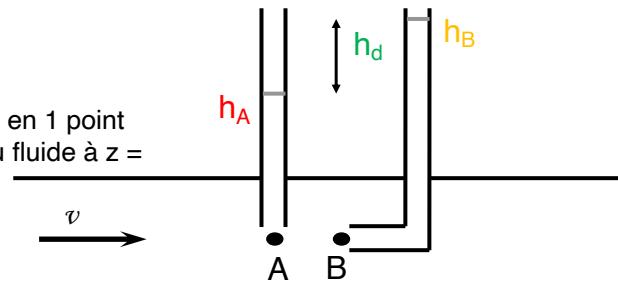
$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 22

22

## Principe du tube de Pitot

Conséquence :  $P$  en 1 point dépend vitesse du fluide à  $z =$



$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B \text{ soit } P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

$$\text{et } P_A = P_0 + \rho g h_A \text{ et } P_B = P_0 + \rho g h_B$$

$$\text{d'où } P_A - P_B = \rho g h_A - \rho g h_B = \rho g h_d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \rho g h_d \text{ d'où } h_d = \frac{v^2}{2g} \text{ (indépendant de } \rho)$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 23

23

## Principe du tube de Pitot

La mesure de ces 2 hauteurs de manomètre  $h_d$  peut permettre de mesurer la vitesse d'écoulement du fluide, ou bien la vitesse d'un objet (avion) dans un fluide (air)



$$v = \sqrt{2 g h_d}$$

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli 24

24



28

28

## HYDRODYNAMIQUE : Effet Venturi

Cas de la sténose

The diagram illustrates a Venturi tube, which is a pipe with a constriction. At the left end, labeled A, the pipe has a larger diameter and is connected to a vertical line representing pressure  $P_A$ . An arrow indicates the flow velocity  $v_A$ . At the right end, labeled B, the pipe narrows, and the flow velocity is indicated by a blue arrow  $v_B$ . The text "Plus rapide / dépression" is written next to the narrowest part of the tube, indicating that the flow is faster and the pressure is lower there due to the narrowing.

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

d'où  $P_A - P_B = \rho g (z_B - z_A) + \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$  or  $\rho g (z_B - z_A) = 0$  (si tube horizontal)  
et débit constant c.à.d.  $S_A v_A = S_B v_B$  donc  $v_A^2 = (S_B/S_A)^2 v_B^2$

d'où  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho [1 - (S_B/S_A)^2] v_B^2 = \text{Cste } v_B^2$   
car  $\rho = \text{cste}$  et  $S_B/S_A = \text{cste}$

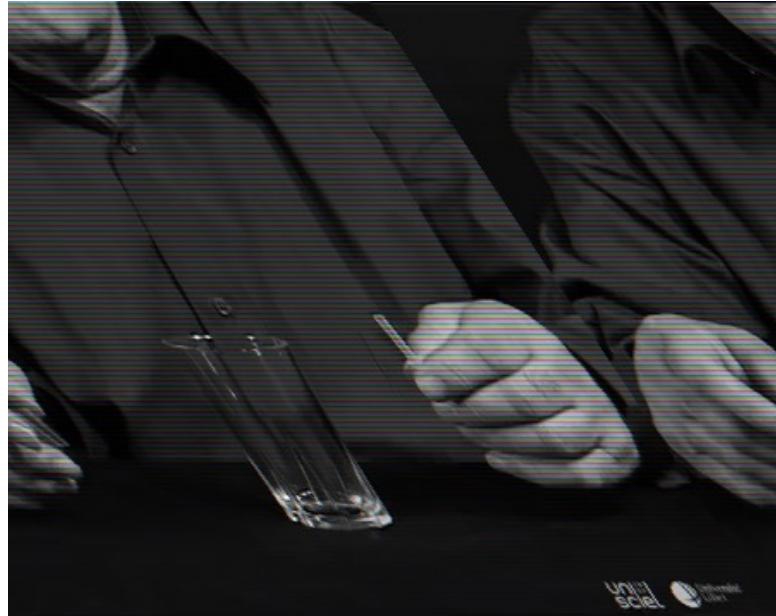
La dépression en cas de rétrécissement est proportionnelle au carré de la vitesse

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli

29

29

## Effet Venturi Le vaporisateur

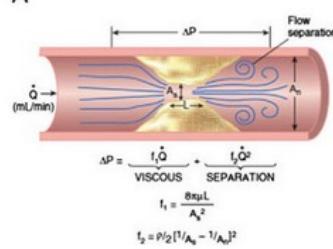


30

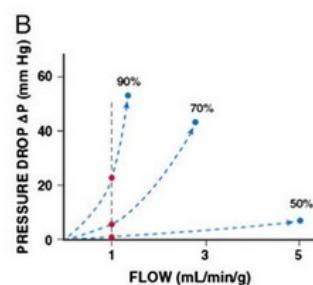
30

## Exemple en médecine: la sténose vasculaire

A



B



Duncker D et al. 2014 Progress in cardiovascular diseases

31

31

## **HYDRODYNAMIQUE**

Caractérisation et quantification des écoulements

Complexification de Bernoulli

Utilisation de notions simples qui supposent une vitesse d'écoulement constante. Si on tient compte de la réalité, débit pulsatile, inertie de la colonne sanguine, compliance (ou élasticité) des vaisseaux, on aboutit à une équation de base complexe (différentielle du 2<sup>e</sup> ordre)

Hydrodynamique. Caractérisation écoulements.. Bernouilli

32

32

### **1. Quel phénomène décrit le tube de Pitot ?**

- a) Relation entre pression et vitesse d'un fluide en mouvement.
- b) Conservation du débit dans un conduit fermé.
- c) Mesure de la densité d'un fluide.

33

33

## **2. Que se passe-t-il dans une sténose artérielle selon Venturi ?**

- a) La pression augmente et la vitesse diminue.
- b) La pression diminue et la vitesse augmente.

34

34

## **3. Quelle est la formule dérivée de l'effet Venturi pour la dépression dans un tube horizontal ?**

- a)  $P_A - P_B = \rho g h$
- b)  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$
- c)  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$
- d)  $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho [1 - (\frac{S_B}{S_A})^2] v_B^2$

35

35

## Exercice 2

Un grand réservoir d'eau contient un orifice circulaire de diamètre  $d = 20\text{mm}$  situé à une hauteur  $h = 3,5 \text{ m}$  en dessous de la surface de l'eau. Le réservoir alimente un tuyau horizontal de 2 mètres de longueur et de même diamètre que l'orifice.

1. Calculez la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de l'orifice
2. Estimez le temps nécessaire pour remplir un récipient de 25 L placé sous l'orifice

On considère  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$

On néglige les pertes de charge dans le tuyau.

36

36

## Résultat

1. Calcul de la vitesse  $v$  d'écoulement

Application du théorème de Bernoulli :  $v = \sqrt{2gh}$

Avec  $g = 9.81\text{m/s}^2$  et  $h = 3.5\text{m}$  alors  $v = 8.29\text{m/s}$

2. Calcul du débit volumique  $Q$

Le débit volumique  $Q$  est donné par  $Q = vA$

$1\text{m}^3 = 1000\text{Litres}$

On calcule  $A = 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

On calcule  $Q = 8.29 \cdot 3.14 \cdot 10^{-4} = 0.0026 \text{ m}^3/\text{s} = 2.6 \text{ L/s}$

3. Le temps nécessaire pour remplir un récipient de volume  $V = 25 \text{ L}$  est donné par  $t = V/Q$

Soit  $V = 25\text{L} = 0.025 \text{ m}^3$  soit  $t = 0.025/0.0026 \approx 9.62 \text{ s}$

37

37