

Biophysique de la Circulation

Mécanique des Fluides

Equation de continuité

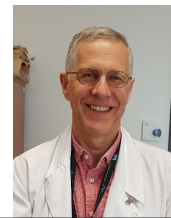
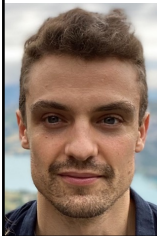
Anthime Flaus

Marc Janier

Service de Médecine Nucléaire

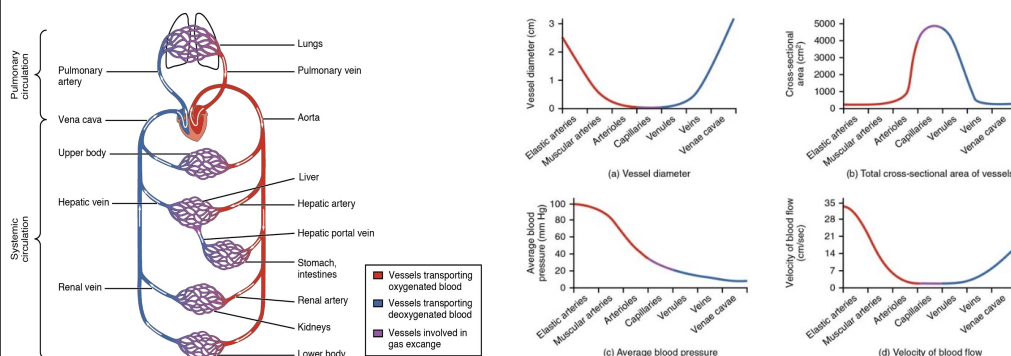
Hôpital GHE - cardiologie

Faculté Lyon-Est



1

Pourquoi le sang circule-t-il très lentement dans les capillaires alors que le débit cardiaque est élevé ?



https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:2101_Blood_Flow_Through_the_Heart.jpg

<https://courses.lumenlearning.com/suny-dutchess-ap1/chapter/blood-flow-blood-pressure-and-resistance-no-content/>

2

2

Hypothèses

Fluide parfait : quand un fluide se déforme les couches qui le constituent, glissent les unes sur les autres. Un fluide est dit parfait quand ce glissement s'effectue **sans aucune force de frottement** (= aucune dissipation d'énergie mécanique en chaleur)

Régime permanent : nous considérerons que ce qui se passe lorsque le régime est **établi** négligeant tous les phénomènes transitoires. Le robinet sera ouvert ou fermé. On ne décrira pas ce qu'il se passe lorsque son état change.

Fluide incompressible: c'est-à-dire dont le volume ne dépend pas (ou pratiquement pas) de la pression.
= Liquide
Différent des gaz qui sont compressibles

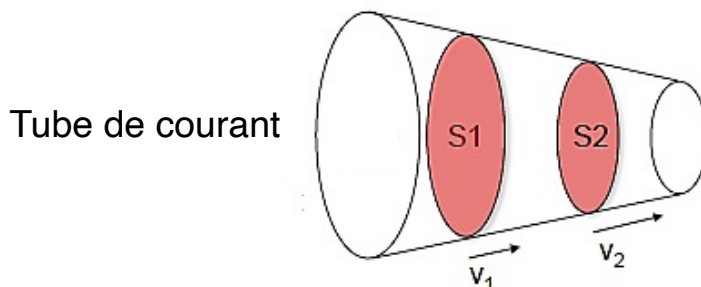
Hydrodynamique. Hypothèses 3

3

HYDRODYNAMIQUE

Définition du Débit

Lorsque le régime permanent est établi dans un circuit hydraulique, le débit Q est le volume de fluide qui traverse une section S pendant une unité de temps



$$Q = \text{Volume} / \Delta t = \text{Section} * \text{vitesse}$$

Hydrodynamique. Débit

4

4

HYDRODYNAMIQUE

Débit

Le débit Q est le volume de fluide qui traverse une section S pendant une unité de temps

$$Q = \text{Volume} / \Delta t = \text{Section} * \text{vitesse}$$

Unités de débit

SI $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

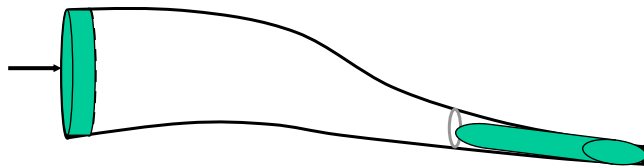
Usuelles $\text{l} \cdot \text{mn}^{-1}$ (débit cardiaque)

$\text{ml} \cdot \text{mn}^{-1}$ (débit cérébral)

HYDRODYNAMIQUE

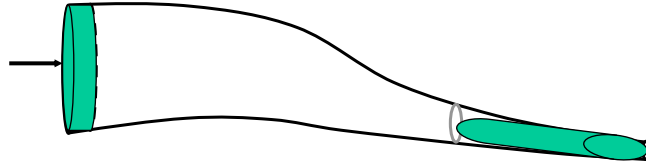
Principe fondamental

Conservation du débit



HYDRODYNAMIQUE

Conservation du débit



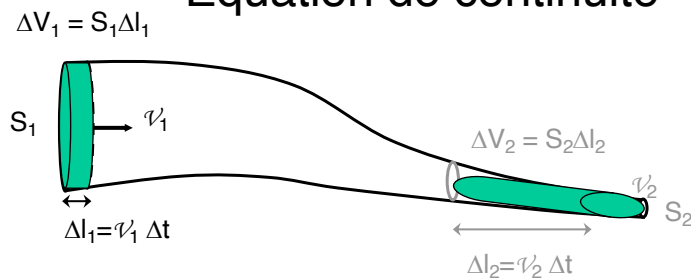
Si l'on considère un conduit indéformable, si en Δt , il entre une quantité ΔV de liquide, dans le même temps une quantité identique doit sortir à l'autre extrémité

Hydrodynamique. Conservation de la masse 7

7

HYDRODYNAMIQUE

Equation de continuité



Si $\Delta V_1 = \Delta V_2$ avec

– $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1 = S_1 v_1 \Delta t$

– $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2 = S_2 v_2 \Delta t$

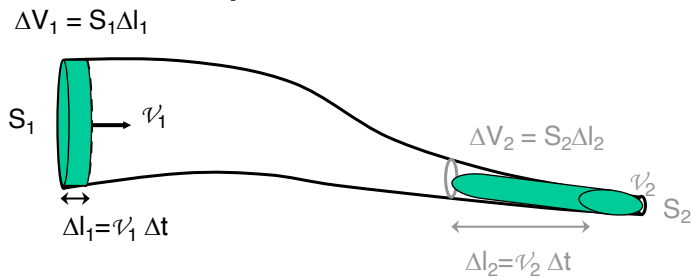
Alors **$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q = \text{Débit} = \text{Cste}$ (équation de continuité)**

Hydrodynamique. Eq continuité 8

8

HYDRODYNAMIQUE

Equation de continuité



Ces volumes renferment une quantité de matière Δm :

$$\Delta m_1 = \rho \Delta V_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t$$

Débit massique = variation de quantité de matière par unité de temps

Débit massique = débit volumique $\times \rho$



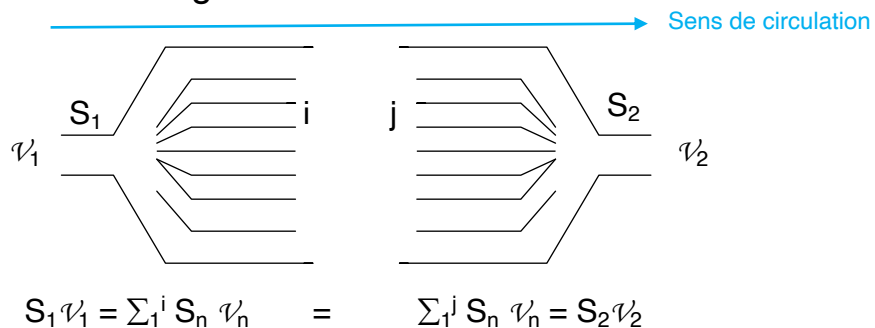
Hydrodynamique. Eq continuité 9

9

HYDRODYNAMIQUE

Equation de continuité

Ce principe est étendu aux conditions dans lesquelles les tubes de courant se subdivisent en une somme de petits tubes indéformables, ou à l'inverse, lorsque plusieurs petits tubes convergent en un seul



Hydrodynamique. Eq continuité 10

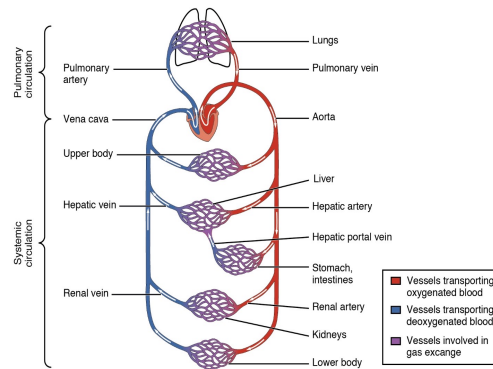
10

Physiologie de la circulation sanguine Schéma du système circulatoire

Débit cardiaque :
- volume de sang expulsé par le ventricule gauche

Débit d'un homme au repos :
- 5-6 litre par minute

Délai pour faire une boucle :
- environ 1 minute



OpenStax College, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2101_Blood_Flow_Through_the_Heart.jpg

Hydrodynamique. Eq continuité 11

11

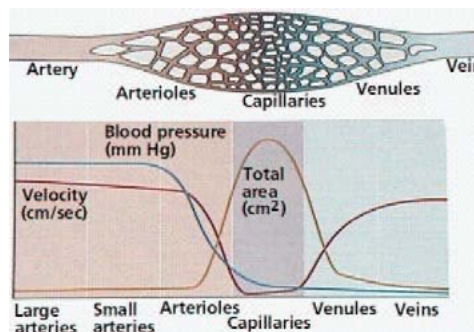
TABEAU

Structure comparative des vaisseaux sanguins

Types de vaisseaux*	Diamètre (D) de la lumière et épaisseur (E) de la paroi (valeurs moyennes)	Composition relative			
		Endothélium	Tissu élastique	Muscle lisse	Tissu fibreux (collagène)
Artère élastique	D: 1,5 cm E: 1,0 mm				
Artère musculaire	D: 6,0 mm E: 1,0 mm				
Artériole	D: 37,0 µm E: 6,0 µm				
Capillaire	D: 7,0 µm E: 0,5 µm				

<http://anevrisme.info/arteres-cerebrales.htm>

On rappelle $S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q$
= Débit = Cste

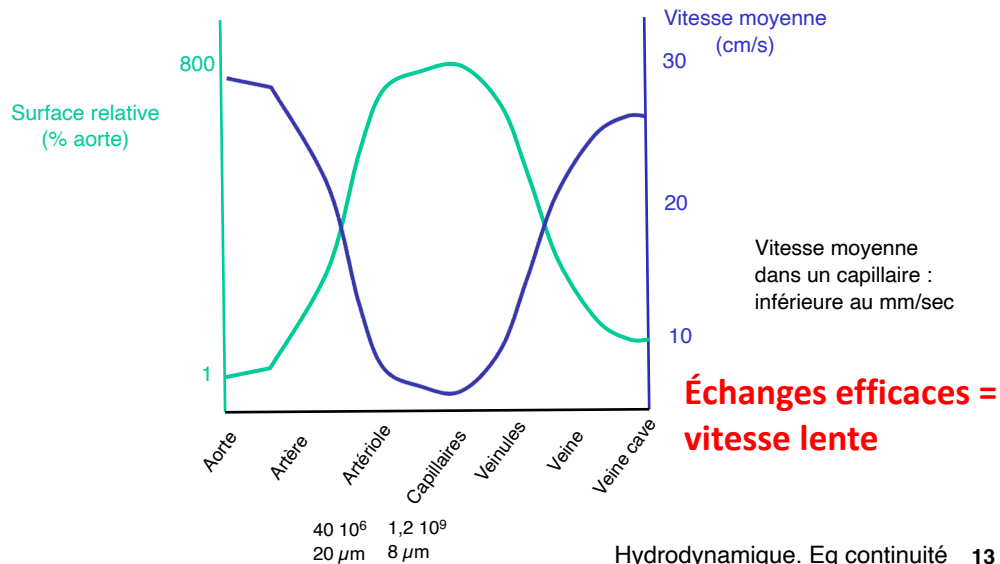


EL Khatib, Nader, 2009/01/01 Modélisation Mathématique de l'Athérosclérose

12

12

Vitesse écoulement du sang en fonction de l'arbre vasculaire



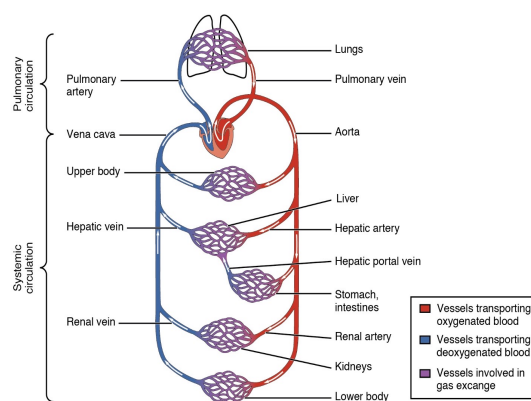
13

HYDRODYNAMIQUE

Equation de continuité

Applications

- Débit cardiaque :
Etat normal $Q_{VD} = Q_{VG}$
- En cas d'insuffisance ventriculaire gauche :
 $Q_{VD} > Q_{VG}$ d'où accumulation dans les poumons (OAP)



Hydrodynamique. Eq continuité 14

14

Quizz # 1

- Qu'appelle-t-on un fluide parfait ?
- Quelle est la définition du débit Q ?
- Quelle est l'équation de continuité ?

15

15

Quizz # 1

- Qu'appelle-t-on un fluide parfait ?
Un fluide dans lequel ne s'exerce aucune force de frottement
- Quelle est la définition du débit Q ?
Il s'agit du volume de fluide qui traverse une section droite du circuit pendant l'unité de temps
- Quelle est l'équation de continuité ?
 $S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q = \text{Débit} = \text{Cste}$ (équation de continuité)

16

16

Exercice 1

- On donne
 $v_{ao} = 30 \text{ cm.s}^{-1}$, $S_{cap} = 800 S_{ao}$, $\phi_{cap} = 8 \mu\text{m}$, $L_{cap} = 1 \text{ mm}$
- Calcul au niveau d'un capillaire
 - de la vitesse d'écoulement,
 - du temps de transit d'un GR,
 - du débit capillaire

Hydrodynamique. Eq continuité.. Exercice 17

17

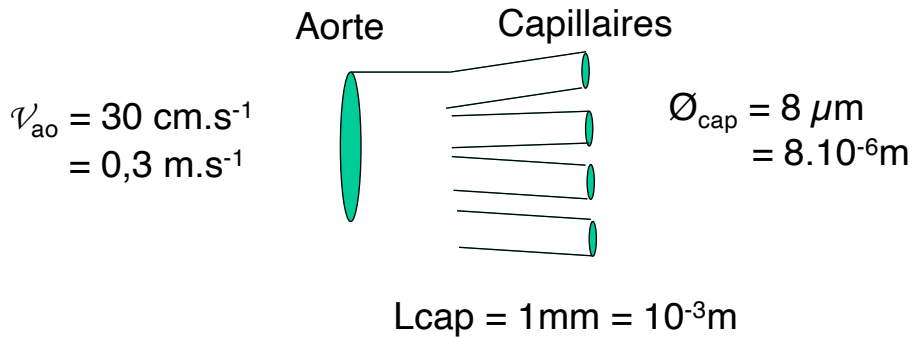
Méthode

- Reprendre l'énoncé
- Schéma avec variable
- Adaptation unité
- Choix formule
- Cohérence de la valeur
- Rendre générique

18

18

Exercice 1



- On donne

$$v_{ao} = 30 \text{ cm.s}^{-1}, S_{cap} = 800 S_{ao}, \varnothing_{cap} = 8 \mu\text{m},$$

$$L_{cap} = 1 \text{ mm}$$

Hydrodynamique. Eq continuité.. Exercice 19

19

Exercice 1

- On donne

$$v_{ao} = 30 \text{ cm.s}^{-1}, S_{cap} = 800 S_{ao}, \varnothing_{cap} = 8 \mu\text{m},$$

$$L_{cap} = 1 \text{ mm}$$

- Calcul au niveau d'un capillaire

– **de la vitesse d'écoulement,**

- Conservation du débit donc $S_{ao} \cdot v_{ao} = S_{cap} \cdot v_{cap}$

- Donc $v_{cap} = S_{ao} \cdot v_{ao} / S_{cap}$

Hydrodynamique. Eq continuité.. Exercice 20

20

Exercice 1

- On donne
 $\mathcal{V}_{ao} = 30 \text{ cm.s}^{-1}$, $S_{cap} = 800 S_{ao}$, $\varnothing_{cap} = 8 \mu\text{m}$,
 $L_{cap} = 1 \text{ mm}$
- Calcul au niveau d'un capillaire
 - de la vitesse d'écoulement ($0,375.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$),
 - du temps de transit d'un GR,

$$\text{Temps de transit} = L_{cap} / \mathcal{V}_{cap}$$

- du débit capillaire

$$Q_{cap} = S_{cap} * \mathcal{V}_{cap} = \pi * r^2 * \mathcal{V}_{cap}$$

Hydrodynamique. Eq continuité.. Exercice 21

21

Exercice 1 : Application numérique

$$\mathcal{V}_{cap} = 1/800 \mathcal{V}_{ao} = 0,375.10^{-3} \text{ m.s}^{-1} = 0,375 \text{ mm.s}^{-1}$$

$$t = 2,67 \text{ s}$$

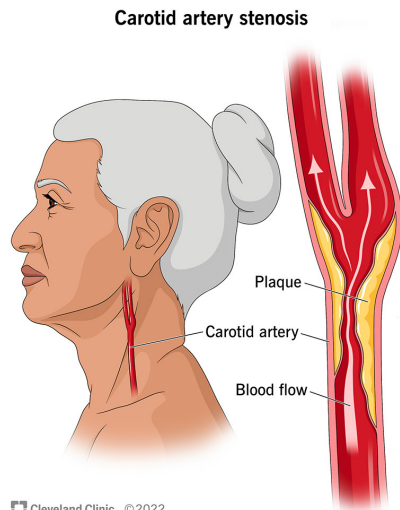
$$Q_{cap} = S_{cap} * \mathcal{V}_{cap} = \pi * r^2 * \mathcal{V}_{cap}$$

$$Q_{cap} = 188,5 . 10^{-16} \text{ m}^3.\text{s}^{-1} = 2 . 10^{-8} \text{ ml.s}^{-1}$$

Hydrodynamique. Eq continuité.. Exercice 22

22

Exercice 2



- Que devient la vitesse en cas de sténose ?

23

23

Exercice 2

Un patient présente un rétrécissement dans un vaisseau (sténose). Les données suivantes sont disponibles :

- Section normale (S_1) : 2 cm^2
- Section rétrécie (S_2) : $0,5 \text{ cm}^2$
- Vitesse du sang dans la section normale (V_1) : 15 cm/s
- Longueur du vaisseau rétréci (L_2) : 5 cm

Questions :

1. Calculez la vitesse dans la section rétrécie (V_2) en utilisant l'équation de continuité.
2. Estimez le temps de transit d'un globule rouge (t_{transit}) dans la section rétrécie.

24

24

Exercice 2

Méthode :

1. Utilisez l'équation de continuité :

$$S1 \times V1 = S2 \times V2 \rightarrow V2 = (S1 \times V1) / S2$$

2. Calculez le temps de transit :

$$t_{\text{transit}} = L2 / V2$$

Application numérique :

1. $V2 = (2 \times 15) / 0,5 = 60 \text{ cm/s}$

2. Calculez le temps de transit :

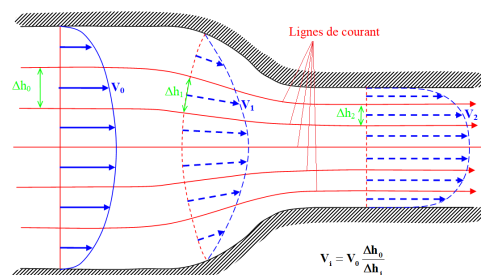
$$t_{\text{transit}} = 5/60 = 0.083\text{s}$$

25

25

DEFINITIONS

Ligne de courant : c'est la trajectoire suivie par un volume très petit (infinitésimal) de fluide au cours de son écoulement. Un tube de courant est constitué de l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.



D'après Hunter Rouse, Elementary Mechanics of Fluids, 1978

Par Bernard de Go Mars — Travail personnel, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=98589966>

Hydrodynamique. Définitions 26

26