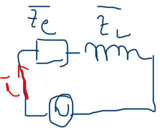
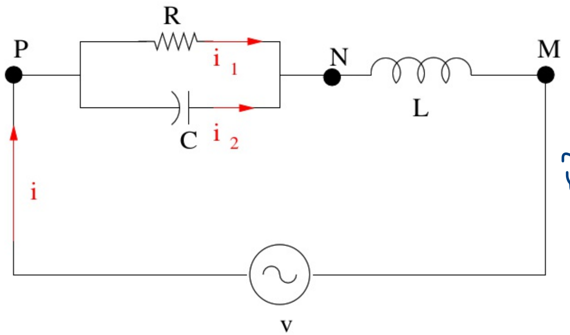
Exercice 1 : étude d'un circuit en régime sinusoïdal

On considère le circuit suivant où R est une résistance de $100\,\Omega$, L une bobine de self-induction de $0,12\,H$ de résistance négligeable, C un condensateur de capacité $33,33\,\mu F$.



$\Leftrightarrow$



$\overline{i} = 5\sqrt{2}\, e^{j400t}$

$R = 100\,\Omega$

$C = \frac{100}{3}\,10^{-6}\,F = \frac{10^{-4}}{3}\,F$

$L = 0,12\,H$

$\tilde{V}(t) = 180\sqrt{2}\, e^{400jt}$

$V(t) = 180\sqrt{2}\cos 400t$

On applique entre les points P et M une différence de potentiel sinusoïdale v de pulsation $\omega = 400\,rd.s^{-1}$ et de valeur efficace $180\,V$.

1. déterminer les impédances complexes $\overline{Z_R}$, $\overline{Z_C}$, $\overline{Z_L}$; l'impédance équivalente $\overline{Z_e}$ aux bornes de P et N; l'impédance totale $\overline{Z_t}$. Calculer les impédances réelles correspondantes.

$Z_R = 100$ $\quad \overline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j\,3}{10^{-4}\times 400} = \frac{-3}{4}\,100\,j = -75j$ $\quad \overline{Z_L} = jL\omega = j\,400\times 0,12 = 48j$

$\overline{Z_{PN}} = \overline{Z_e} = Z_R \parallel Z_C \Rightarrow \frac{1}{\overline{Z_e}} = \frac{1}{\overline{Z_R}} + \frac{1}{\overline{Z_C}} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \Rightarrow \overline{Z_e} = \frac{R}{1 + jC\omega R} = \frac{100}{1 + j\,400\times 100\times\frac{10^{-4}}{3}} = \frac{100}{1 + \frac{4}{3}j} = \frac{100\,(1 - \frac{4}{3}j)}{\underbrace{(1 + \frac{16}{9})}_{\frac{25}{9}}} = \frac{9\times 100}{25}\left(1 - \frac{4}{3}j\right)$

$Z_e = 36\left(1 - \frac{4}{3}j\right) = 36 - 48j$

$\overline{Z_t} = \overline{Z_e} + \overline{Z_L} = 36 - 48j + 48j = 36$

$\Rightarrow \overline{Z_t}$ resistif $\Rightarrow i(t)$ et $v(t)$ en phase

$\overline{i} = \frac{\tilde{v}}{Z_t} = \frac{180\sqrt{2}}{36}\, e^{j400t} = 5\sqrt{2}\, e^{j400t}$

2. Calculer les intensités efficaces et les déphasages des courants i_1, i_2 et i par rapport à la tension v. Donner une représentation des intensités et des différences de potentiel complexes relatives aux différentes branches du circuit.

on a $\underline{i_1}(t) + \underline{i_2}(t) = \underline{i}(t)$ et $\underline{i}(t) = 5\sqrt{2}\, e^{j400t}$

$\underline{V_{PN}} = \underline{Z_e}\, \underline{i}(t) = \underline{Z_R}\, \underline{i_1}(t) = \underline{Z_C}\, \underline{i_2}(t) = (36-48j)\, 5\sqrt{2}\, e^{j400t}$

$\Rightarrow \underline{i_1} = \frac{36-48j}{100} \times 5\sqrt{2}\, e^{j400t} = \frac{36-48j}{20} \sqrt{2}\, e^{j400t}$

$\frac{36-48j}{20} = \rho_1 e^{j\varphi_1}$ $\quad \rho_1 = \sqrt{\frac{36^2+48^2}{20^2}}$

$\rho_1 = \frac{1}{20}\sqrt{12^2(3^2+4^2)} = \frac{12}{20}\sqrt{25} = 3$ $\quad \tan\varphi_1 = \frac{-48}{36} = -\frac{4}{3}$ $\quad \varphi_1 = -0{,}927$ (-54°)

$\underline{i_1}(t) = 3\sqrt{2}\, e^{j(400t - 0{,}927)}$

$\Rightarrow \underline{i_2}(t) = \frac{\underline{Z_e}\, \underline{i}}{\underline{Z_C}} = \frac{(36-48j)}{-75j} 5\sqrt{2}\, e^{j400t} = \frac{j}{15}(36-48j)\sqrt{2}\, e^{400jt}$

$\Rightarrow \underline{i_2}(t) = \frac{48+36j}{15} \sqrt{2}\, e^{j400t} = \rho_2 \sqrt{2}\, e^{j(400t+\varphi_2)}$

$\frac{48+36j}{15} = \rho_2 e^{j\varphi_2}$

$\rho_2 = \frac{1}{15}\sqrt{48^2+36^2} = \frac{12}{15} \times \sqrt{4^2+3^2} = \frac{4}{5} \times 5 = 4$ $\quad \tan\varphi_2 = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ $\quad \varphi_2 = 0{,}64$ rad

36°

$\underline{i_2}(t) = 4\sqrt{2}\, e^{j(400t + 0{,}64)}$

Représentation de Fresnel des courant --> utile pour représenter les tension

$\bar{i} \to 5\sqrt{2} \to 5$ cm

$i_2 \to 3\sqrt{2}$ $-54°$ $\to 3$ cm

$i_1 \to 4\sqrt{2}$ $36°$ $\to 4$ cm

tension

$\bar{v} \to 180\sqrt{2} \to 6$ cm

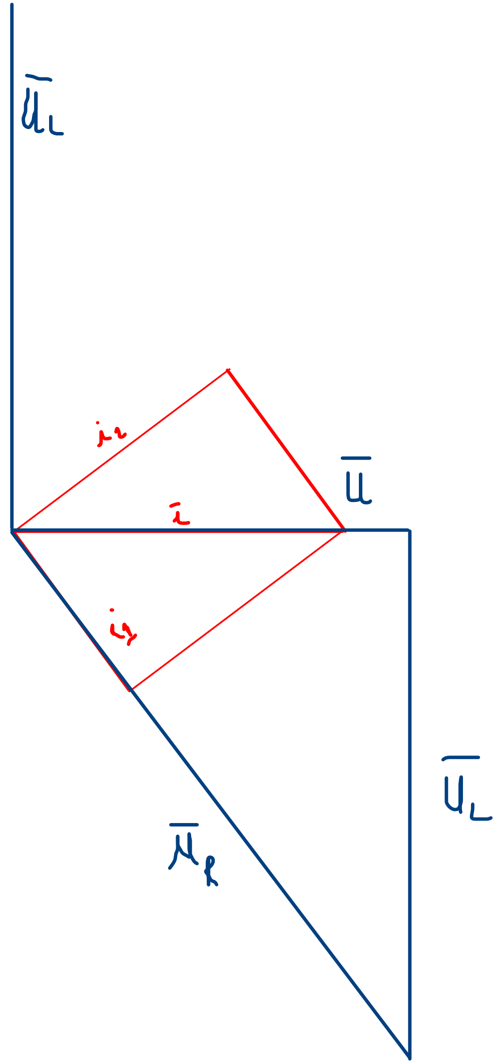
$\bar{U}_L = \bar{Z}_L\, \bar{i} = 48j\, 5\sqrt{2}\, e^{j400t}$

$\bar{U}_L = 240\sqrt{2}\, e^{j(400t + \frac{\pi}{2})}$

$u_L \to 8$ cm $90°$

$\bar{U}_R = \bar{U}_C = 100\, \bar{i}_1 = 300\sqrt{2}\, e^{j(400t - 0{,}927)}$

$\bar{U}_R \to 10$ cm $-54°$



3. Calculer la puissance totale dissipée dans chaque branche.

$$u(t) = u_e \sqrt{2} \cos \omega t \qquad i(t) = i_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$$

$$P_{int} = u(t)\, i(t) = u_e\, i_e\, 2 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

$$= u_e\, i_e\, 2 \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \; \frac{e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega t+\phi)}}{2} \right]$$

$$= \frac{u_e\, i_e}{2} \left[\underbrace{e^{i(2\omega t+\phi)} + e^{-i(2\omega t+\phi)}}_{\cos(2\omega t+\phi)} + e^{i\phi} + e^{-i\phi} \right]$$

$$\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi$$

$$P_{inst} = u_e\, i_e \left[\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi \right]$$

$$P = \langle P_{inst} \rangle_T = u_e\, i_e\, \frac{1}{T} \int_0^T \left[\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi \right] dt$$

$$P = u_e\, i_e \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi)\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\cos \phi}_{\text{Const}}\, dt \right] = u_e\, i_e \cos \phi$$

$$\frac{1}{2\omega} \left[\sin(2\omega t + \phi) \right]_0^T = 0$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

AN

$$P_R = u_R^e \, i_R^e \cos(\phi_R) = 300 \times 3 \times \cos 0 = 900 \text{ Watts}$$

$$P_C = u_C^e \, i_C^e \cos(\phi_C) = 300 \times 4 \cos 90^\circ = 0$$

$$P_L = u_L^{eff} \, i_L^e \cos(\phi_L) = 240 \times 5 \cos(-90^\circ) = 0$$

$$P_{Zt} = 180 \times 5 \times \cos 0 = 900 \text{ Watts}$$

dans ce circuit, la puissance n'est dissipée que par la résistance!

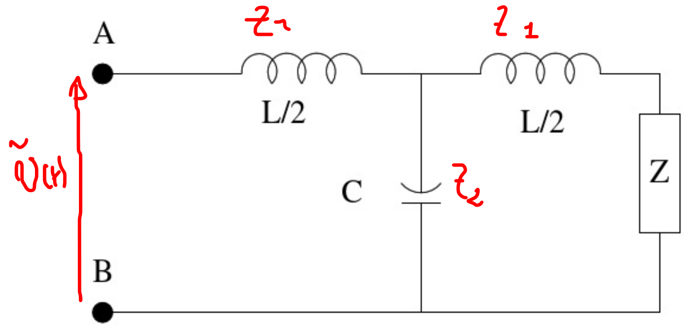
Exercice 2 : Calculs d'impédances

On applique entre les bornes A et B du circuit ci-dessous, une tension sinusoïdale de pulsation ω. Quelle relation existe entre l'impédance Z, L, C et ω pour que l'impédance équivalente de l'ensemble soit égale à Z ?

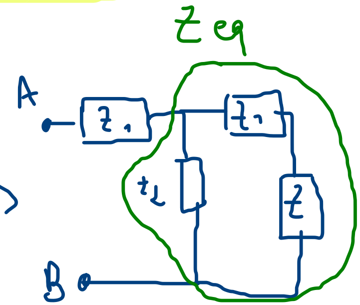
$Z_1 = jL\frac{\omega}{2}$

$\frac{1}{Z_2} = jC\omega$

$Z = ?$



$\Leftrightarrow$

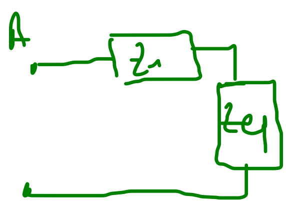


Avec : $L = 0,318\,H$ et $C = 32\,\mu F$. A quelle fréquence l'impédance Z est elle nulle ?

à partir du schéma équivalent :

$$Z_{eq} = Z_2 \,//\, (Z_1 + Z) \Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1 + Z} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z}{Z_2(Z_1 + Z)}$$

$$Z_{eq} = \frac{Z_2(Z_1 + Z)}{Z_1 + Z_2 + Z}$$



$$Z_{AB} = Z_1 + Z_{eq} = Z_1 + \frac{Z_2(Z + Z_1)}{Z_2 + Z + Z_1} = Z$$

on veut ZAB=Z

$$Z - Z_1 = \frac{Z_2(Z + Z_1)}{Z_2 + Z_1 + Z} \Rightarrow (Z - Z_1)(Z_1 + Z_2 + Z) = Z_2(Z + Z_1)$$

$$\cancel{ZZ_1} + \cancel{ZZ_2} + Z^2 - Z_1^2 - Z_1Z_2 - \cancel{Z_1Z} = \cancel{Z_2Z} + Z_1Z_2 \Rightarrow Z^2 = Z_1^2 + 2Z_1Z_2$$

$$\left.\begin{aligned} &Z^2 = 2 Z_1 Z_2 + Z_1^2 = \\ &Z_1 = j\frac{L\omega}{2} \quad Z_2 = \frac{1}{jC\omega} \end{aligned}\right\} \quad Z^2 = \frac{L}{C} - \frac{L^2\omega^2}{4} \qquad \begin{aligned} &Z^2 > 0 \\ &Z^2 < 0 \end{aligned}$$

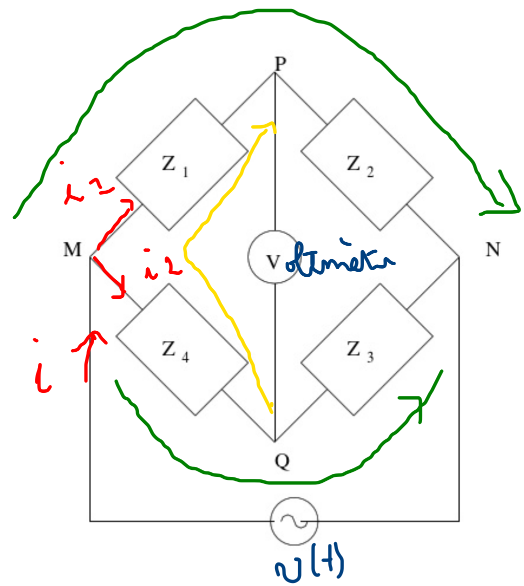
f : fréquence telle $Z = 0$ on voit $Z^2 = f(\omega^2)$

$\omega = 2\pi f$ $\qquad Z = 0 \Rightarrow \frac{L^2\omega^2}{4} = \frac{L}{C} \quad \omega^2 = \frac{4}{LC} = \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$

$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$ $\qquad$ AN $f = 190$ Hz

Exercice 3 : Pont d'impédances

On considère un pont d'impédances alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω. V est un voltmètre qui permet de savoir lorsque la différence de potentiel $V_p - V_Q$ est nulle. Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont des impédances que l'on représentera par leurs valeurs symboliques complexes. Montrer qu'avec cette convention la condition d'équilibre du continu.



équilibre Vp-Vq=0 comme si on avait un fil entre p et q!

Il y a 2 mesures de v(t) MQN et MPN

$$\bar{v}(t) = (Z_1 + Z_2)\, i_1 = (Z_4 + Z_3)\, i_2 = V_{NM}$$

$$\Rightarrow i_2 = i_1 \frac{Z_1 + Z_2}{Z_4 + Z_3}$$

$\rightarrow$ équilibre $u_{PQ} = 0$ $\quad Z_4 i_2 - Z_1 i_1 = 0$

$$Z_1 i_1 = Z_4 i_2 \Rightarrow Z_1 = \frac{i_2}{i_1} Z_4 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_4 + Z_3} Z_4$$

$$Z_1 (Z_4 + Z_3) = Z_4 (Z_1 + Z_2) \Rightarrow Z_1 Z_4 + Z_1 Z_3 = Z_4 Z_1 + Z_4 Z_2$$

$Z_1 Z_3 = Z_4 Z_2$ est la condition d'équilibre du pont!

1. Application au pont de Wien

Dans ce cas Z_1 est une résistance R_1; Z_2 est une résistance R_2; Z_3 est un condensateur de capacité C en série avec une résistance R; Z_4 est un condensateur de capacité C en parallèle avec une résistance R. Le générateur a une pulsation ω.

Quelles sont les conditions d'équilibre du pont ? Montrer qu'il peut servir de fréquencemètre.

condition : Z1Z3=Z2Z4 si la tension U_{PQ} est = 0 V

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= R_1 \\ Z_2 &= R_2 \\ Z_3 &= R + \frac{1}{jC\omega} \\ \frac{1}{Z_4} &= \frac{1}{R} + jC\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) = \frac{R_2}{R_1}$$

$$1 + 1 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right) = \frac{R_2}{R_1}$$

par identification des parties réélles et imaginaires on a:

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 \rightarrow R_2 = 2R_1 \qquad RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0 \Rightarrow R^2C^2\omega^2 = 1$$

il faut donc choisir R2=2*R1 et RCW=1 cette dernière condition dépend de w

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}$$

2. Application au pont de Maxwell

Dans ce cas Z_1 est une self L de résistance r; Z_2 est une résistance R_1; Z_3 est un condensateur de capacité C ajustable en parallèle avec une résistance R ajustable; Z_4 est une résistance R_2. Le générateur a une pulsation ω.

Quelles sont les conditions d'équilibre du pont ? Montrer qu'il peut servir à mesurer L et r.

condition : Z1Z3=Z2Z4

$Z_1 = jL\omega + r$ $\quad Z_2 = R_1$ $\quad \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R} + jC\omega$ $\quad Z_4 = R_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} \qquad (jL\omega + r)/R_1 = R_2\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)$$

$$j\frac{L\omega}{R_1} + \frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{R} + jCR_2\omega$$

$$\Rightarrow \frac{L\omega}{R_1} = CR_2\omega \Rightarrow \frac{L}{C} = R_1R_2 \quad C \text{ ajustable}$$

$$L = CR_1R_2 \rightarrow C = \frac{L}{R_1R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{R} \qquad rR = R_1R_2$$

$$R = \frac{R_1R_2}{r} \quad \text{ajustable}$$

l'equilibre est independant de ω !

objectifs: caractériser une bobine L,r

$L = R_1R_2C$

$r = R_1R_2/R$

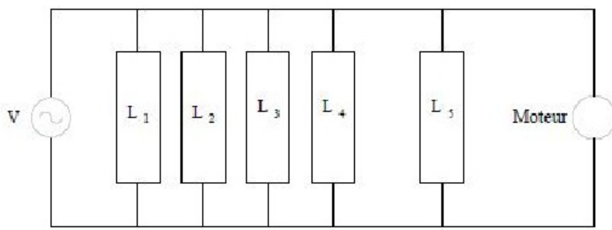
R_1R_2 fixé $\rightarrow$ on fait varier C, R,

tension $U_{PQ} = 0$ $\rightarrow$ le pont est equilibré

Exercice 4 : Puissance

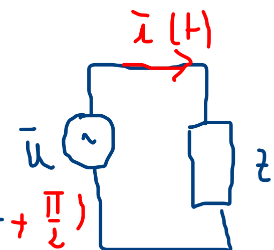
Une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $V_e = 220\,V$ et de fréquence $50\,Hz$ alimente un circuit comprenant en parallèle :

- 5 lampes à incandescence considérées comme des résistances pures ; 4 lampes (L_1 L_4 de puissance active $100\,W$ chacune et L_5 de $40\,W$.
- Un moteur électrique partiellement inductif de puissance active $1320\,W$ et de facteur de puissance $0,6$.



la tension v est la même pour chaque élément:
Lampe-> résistance, pas de phase entre courant et tension
moteur-> phase donnée (cos phi) inductif

1. Calculer les valeurs efficaces des courants circulant dans les lampes et le moteur, ainsi que la valeur efficace du courant total. Donner une représentation des grandeurs complexes associées. Calculer le facteur de puissance $\cos\Phi$ du circuit.



Rmq sur : circuit Capacitif- circuit inductif--> signe du déphasage ?

• Bobine : $Z_L = jL\omega$ $\quad j = e^{i\pi/2}$ $\quad \bar{u} = jL\omega\,\bar{i}$

si $\bar{i} = i_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $\bar{u} = i_e\sqrt{2}\, L\omega\, e^{i\pi/2}\, e^{i\omega t} = u_{eff}\sqrt{2}\, e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

si $\bar{u} = u_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $\bar{i} = \dfrac{u_e\sqrt{2}}{L\omega\, e^{i\pi/2}}\, e^{i\omega t} = i_{eff}\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \pi/2)}$

$\Rightarrow$ circuit partiellement inductif de phase phi

si $\bar{u} = u_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $\bar{i}(t) = i_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \phi)}$ $\longrightarrow$ cas de notre exo !

si $\bar{i} = i_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $\bar{u}(t) = u_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t + \phi)}$

condensateur

$$Z_C = 1/jC\omega = \frac{1}{C\omega\, e^{i\pi/2}} = \frac{e^{-i\pi/2}}{C\omega}$$

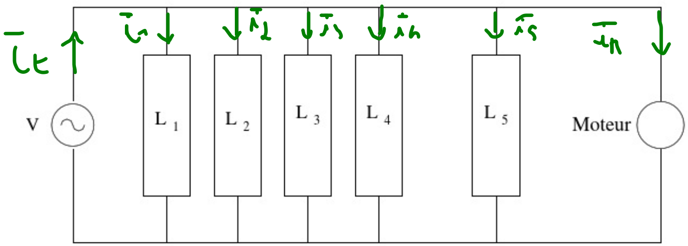
si $\bar{i}(t) = i_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{u} = \frac{i_e\sqrt{2}}{C\omega} e^{-i\pi/2} e^{i\omega t} = u_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \pi/2)}$

si $\bar{u}(t) = u_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{i} = u_e\sqrt{2}\, C\omega\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t} = i_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t + \pi/2)}$

--> Un circuit partiellement capacitif de phase phi:

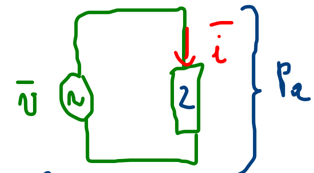
si on impose $\bar{u}(t) = u_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{i}(t) = i_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t + \phi)}$

si on impose $\bar{i}(t) = i_e\sqrt{2}\, e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{u}(t) = u_e\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \phi)}$



- 5 lampes à incandescence considérées comme des résistances pures ; 4 lampes (L_1 L_4 de puissance active 100 W chacune et L_5 de 40 W.
- Un moteur électrique partiellement inductif de puissance active 1320 W et de facteur de puissance 0, 6.

$V_e = 220\,V$ et de fréquence 50 Hz



les Lampes et le moteur sont soumis à la même tension V du générateur
-> on a donc 6 mailles
Rappel Puissance : Pa=ie ue cos(phi)

$$P_a = i_e\, u_e \cos\phi$$

$$100 = i_L^e \times 220 \times \cos 0$$

- les 4 premieres lampes sont identiques de Pa=100Watts
elles se comportent comme des R -> phi=0

de L_1 à L_4 $\Rightarrow$ $i_e^L = \frac{100}{220} = 0{,}455$ A

- la lampe L5 Pa=40 Watt et phi=0

$$i_e^{L5} = \frac{40}{220} = 0{,}18 \text{ A}$$

- le moteur Pa=1320Watts et cos(phi)=0,6
--> phi=+/-0.927 rad (+/-53°)

$$i_e^m = \frac{1320}{220 \times 0{,}6} = 10 \text{ A}$$

$$\bar{I}_t = \bar{I}_{L1} + \bar{I}_{L2} + \bar{I}_{L3} + \bar{I}_{L4} + \bar{I}_{L5} + \bar{I}_m$$

$$\bar{I}_t = (4 \times 0{,}455 + 0{,}18)\sqrt{2}\, e^{i\omega t} + 10\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - 0{,}927)}$$

le signe - car partiellement inductif

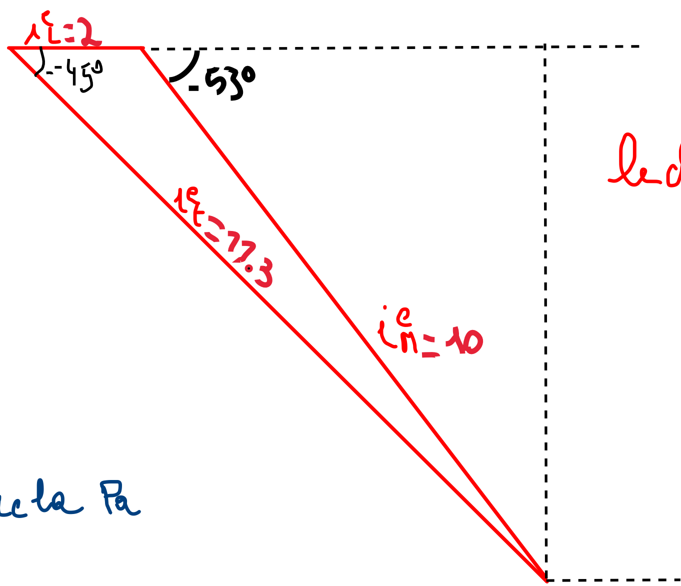
$$\bar{I}_t = 2\sqrt{2}\, e^{i\omega t} + 10\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - 0{,}927)}$$

Pour évaluer itotal on a 2 méthodes : Fresnel et le calcul complexe

Methode 1 : Fresnel

$$\bar{i}_t = \underbrace{2\sqrt{2}\, e^{i\omega t}}_{i_L} + \underbrace{10\sqrt{2}\, e^{-i\,0{,}927}}_{i_M} e^{i\omega t}$$

$-0{,}927$ rad $\rightarrow -53°$



$i_L^e = 2\sqrt{2} \rightarrow 2$ cm $\quad \phi = 0$

$i_M^e = 10\sqrt{2} \rightarrow 10$ cm $\quad \phi_M = -53°$

lecture : $i_t^e \rightarrow 11{,}3$ cm $\quad \phi = -45°$

$$\bar{i}_t = 11{,}3\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \pi/4)}$$

Verification avec la Pa

$P_a = i_e\, u_e \cos\phi$

$P_a = 11{,}3 \times 220 \times \cos 45° = 1758$ Watt

$P_a = 4 \times 100 + 40 + 1320 = 1760$ Watt

Méthode 2: calcul complexe

$$\bar{i}_t = 2\sqrt{2}\, e^{i\omega t} + 10\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - 0{,}927)}$$

$$\bar{i}_t = 2\sqrt{2}\, e^{i\omega t} + 10\sqrt{2}\, e^{-i\,0{,}927}\, e^{i\omega t}$$

$$\bar{i}_t = e^{i\omega t}\sqrt{2}\,\underbrace{\left[2 + 10\, e^{-i\,0{,}927}\right]}_{\text{à évaluer}}$$

$$2 + 10\, e^{-i\,0{,}927} = 2 + 10\cos 0{,}927 - j\,10\sin 0{,}927$$

$$= 2 + 10 \times 0{,}6 - j\,0{,}8 \times 10$$

$$= 2 + 6 - 8j = 8 - 8j = 8(1-j)$$

$$= 8(1-j)$$

$$= \rho\, e^{i\theta} \qquad \Rightarrow \rho = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-8}{8} \longrightarrow \theta = -45° = -\pi/4$$

$$2 + 10\, e^{-i\,0{,}927} = 8\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = 11{,}3\, e^{-i\pi/4}$$

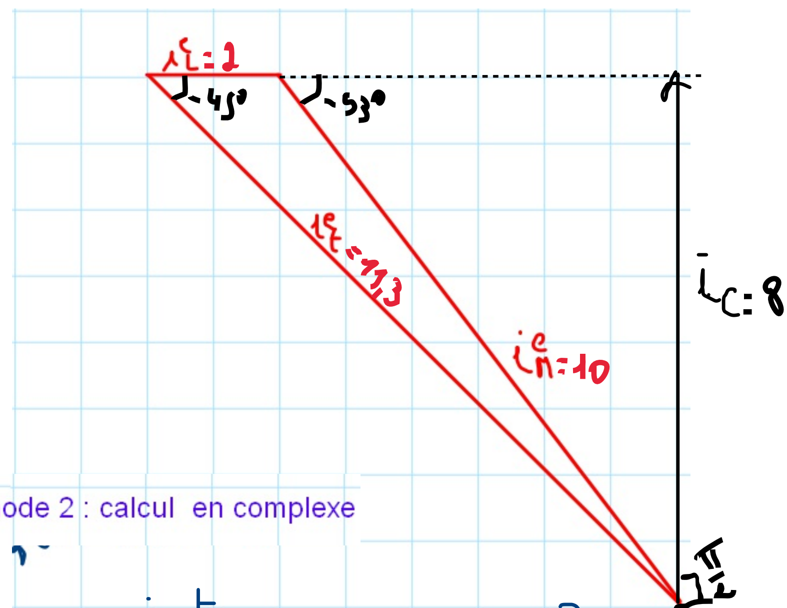
$$\bar{i}_t = 11{,}3\sqrt{2}\, e^{i(\omega t - \pi/4)}$$

identique à la lecture

2. Déterminer la capacité du condensateur branché aux bornes du moteur afin que le cos Φ de l'installation soit égal à 1. Calculer la nouvelle valeur efficace du courant total.

On veut que le cos(phi) du circuit =1 --> comme on a trouvé phi_circuit=-pi/4 par les courants il faut ajouter un condensateur dans le circuit qui compense cette phase!

méthode 1 : par lecture sur le grape



$\bar{i}_C$ lecture → 8 cm θ = +90°

$$\bar{i}_C = 8\sqrt{2}\, e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$\bar{i}_t = (8 - 8j)\sqrt{2}\, e^{i\omega t} + \bar{i}_C$$

méthode 2 : calcul en complexe

$$\bar{i}_C = C\omega U\sqrt{2}\, e^{i\omega t} j = i_C^e \sqrt{2}\, j\, e^{i\omega t}$$

$\bar{i}_t = \sqrt{2}\, e^{i\omega t}\left[8 - 8j + j\, i_C^e\right]$ ⇒ avec $\bar{i}_t$ $\phi = 0$ → partie complexe = 0

$i_C^e = 8$ et $j = e^{i\pi/2}$ $\phi_C = \pi/2$ ⇒ $C = \frac{8}{100\pi \times 220} = 115,7\ \mu F$

3. Montrer que la puissance totale dissipée dans le circuit sera la même dans les deux cas, mais que la puissance dissipée pas effet Joule dans le circuit d'alimentation sera réduite dans le deuxième cas.

Puissance dans le circuit :

$$P_a = 4 \times 100\ \text{Watt} + 40\ \text{Watt} + 1320\ \text{Watts}$$

$$P_a = 1760\ \text{Watts}$$

$$\overline{u_e} = 220\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$$

Sans Condensateur : déjà fait $\Rightarrow$ $P_a = 220 \times 11{,}3 \times \cos \pi/4 = 1758$ Watts

avec condensateur:

$$\overline{i_t} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{i_L} = 2\sqrt{2}\, e^{i\omega t} \\ \overline{i_{F1}} = \sqrt{2}\,(6 - 8j)\, e^{i\omega t} \\ \overline{i_C} = \sqrt{2}\, 8j\, e^{i\omega t} \end{array} \right\} \overline{i_t} = 8\sqrt{2}\, e^{i\omega t}$$

$$P_a = 220 \times 8 \times \cos 0 = 1760\ \text{Watts}$$

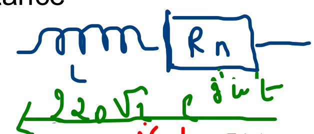
Puissance Joule dans les circuits :

sans le condensateur $\bar{i}_t = 11{,}3\sqrt{2}\, e^{j(\omega t - \pi/4)}$

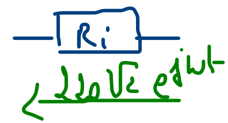
avec le condensateur $\bar{i}_t = 8\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$

Les lampes sont équivalentes à des résistances en parallèle sur le moteur qui est équivalent à une bobine en série avec une résistance

moteur :



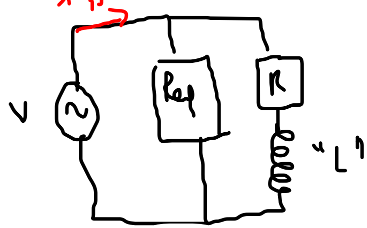
lampe



en parallèle → Req

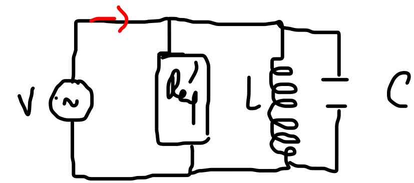
$11{,}3\sqrt{2}\, e^{j(\omega t - \pi/4)}$

circuit équivalent sans C



$\bar{i} = 8\sqrt{2}\, e^{j(\omega t)}$

circuit équivalent avec C



$P_{joule} = R_{eq}\, i_{eff}^2$ ici $i_{eff} = 11{,}3$

$P_{joule} = R_{eq}\, i_{eff}^2$ ici $i_{eff} = 8$

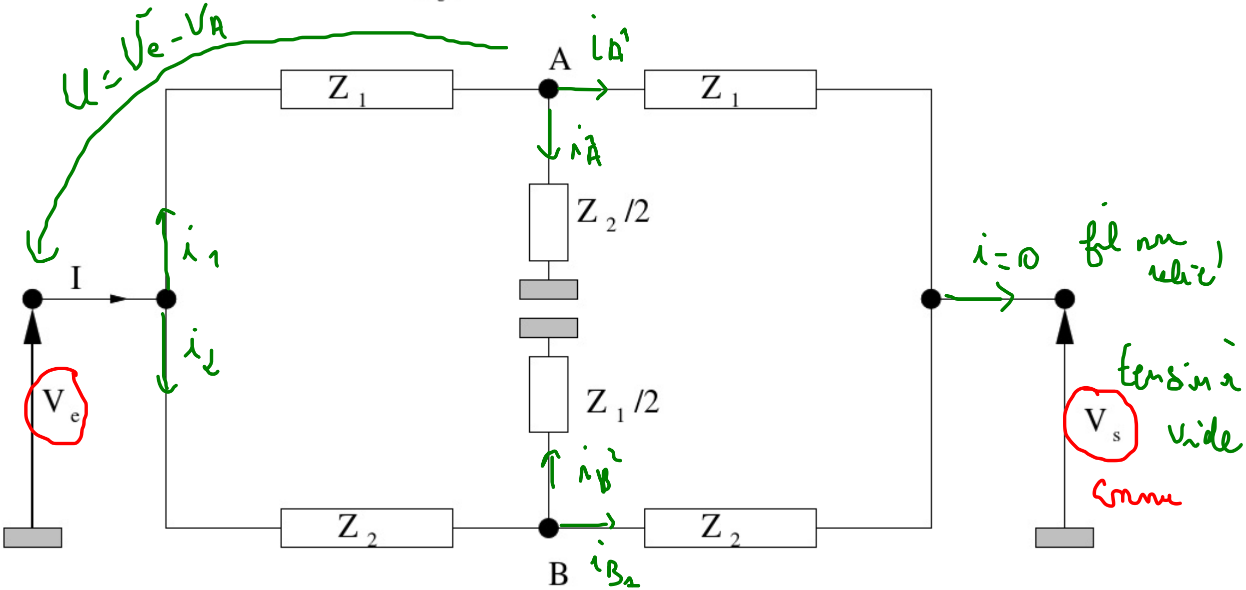
$11{,}3^2 \gg 8^2$

le circuit avec le condensateur permet de diminuer la courant qui circule dans le circuit équivalent--
Effet joule est moins important quand il y a un condensateur !!! (facture moins chère et moins de risque d'incendie)!

Exercice 5 : Double T en pont

On considère le montage suivant:

1. Calculer la fonction de transfert $(\frac{V_s}{V_e})$.



$V_e - Z_1 i_1 = V_A$

$V_A - \frac{Z_2}{2} i_A^2 = 0$

$V_A - Z_1 i_A^1 = V_S$

$i_1 = i_A^1 + i_A^2 \longrightarrow i_A^2 = \frac{2 V_A}{Z_2}$ et $i_A^1 = \frac{V_A - V_S}{Z_1}$

$V_e - V_A = Z_1 i_1 \to i_1 = \frac{V_e - V_A}{Z_1} = \frac{2 V_A}{Z_2} + \frac{V_A - V_S}{Z_1}$

$V_e - V_A = \frac{Z_1}{Z_2} 2 V_A + V_A - V_S \to \boxed{V_A = \frac{V_e + V_S}{2} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

$$v_A = \frac{v_e + v_s}{2} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$ par symétrie du pbm

$$v_B = \frac{v_e + v_s}{2} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

le fil en v_0 n'est pas relié (tension à vide) $i_A' + i_B' = 0$

à determiner

$$\frac{v_A - v_S}{Z_1} + \frac{v_B - v_S}{Z_2} = 0 \Rightarrow \frac{v_A}{Z_1} + \frac{v_B}{Z_2} = v_S \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}$$

$$v_S = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \left(\frac{v_A}{Z_1} + \frac{v_B}{Z_2} \right) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} v_A + \frac{Z_1 v_B}{Z_1 + Z_2}$$

$$v_S = \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \left(\frac{v_e + v_s}{2} \right) + \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \left(\frac{v_e + v_s}{2} \right) \Rightarrow \frac{v_e + v_s}{v_s} = \frac{Z_2^2 + Z_1^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \times 2$$

$$\frac{v_e + v_s}{v_s} = \frac{v_e}{v_s} + 1 = 2 \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \Rightarrow \frac{v_e}{v_s} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + 4 Z_1 Z_2}{Z_1^2 + Z_2^2}$$

la fonction de transfert est Vs/Ve

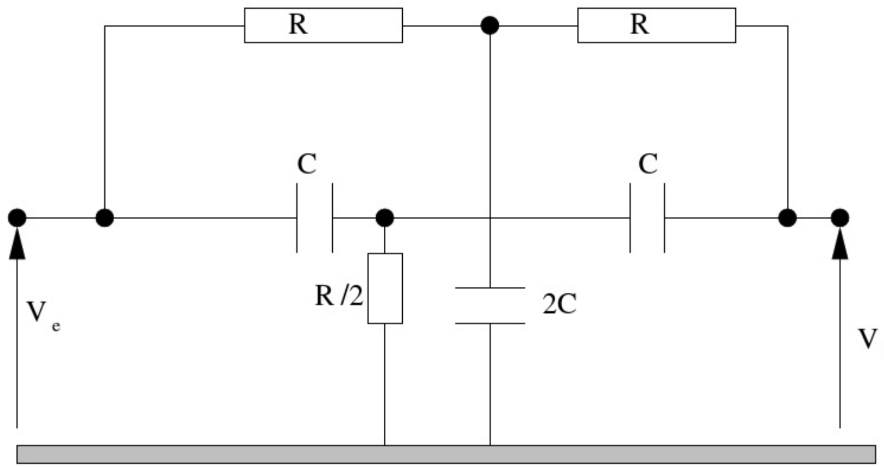
$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{Z_2^2 + Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + 4Z_1Z_2} = \frac{1}{1 + 4\frac{Z_1 . Z_2}{Z_1^2 + Z_2^2}}$$

2. Application : Réalisation d'un filtre réjecteur.

Déterminer la fonction de transfert et son module. En déduire la nature du filtre.

Calculer les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) en fonction de $\tau = RC$.

Calculer la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de la bande rejetée.



$Z_1 = R \qquad Z_2 = 1/j\omega C$

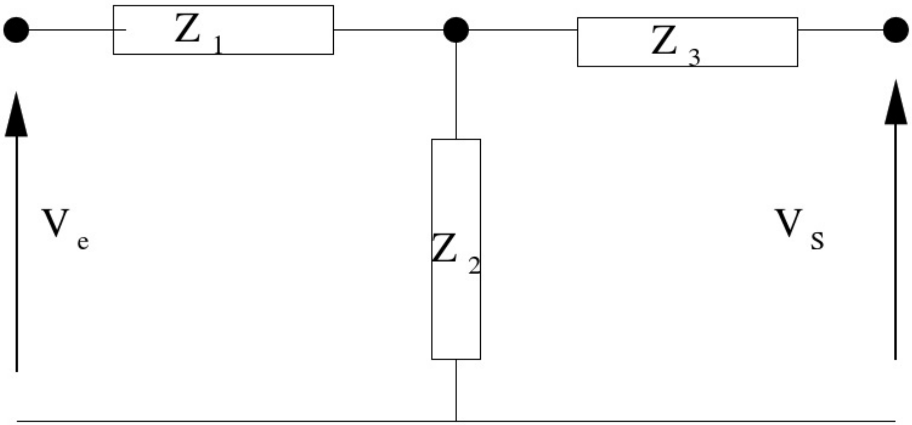
$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + 4\,\dfrac{R/jC\omega}{R^2 - 1/C^2\omega^2}} \quad * C^2\omega^2 \qquad \tau = RC$$

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 - \dfrac{4j\tau\omega}{\omega^2\tau^2 - 1}}$$

Exercice 6 : Circuit R,L,C

Soit le montage de la figure ci-après alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω.

1. Calculer la fonction de transfert $(\frac{V_s}{V_e})$ **quand** V_s **est mesurée à vide**.



2. L'impédance Z_1 est réalisée par la mise en parallèle d'un condensateur de capacité C et d'une self idéale L; Z_2 est une résistance R. On posera $K(\omega) = \frac{L\omega}{1-LC\omega^2}$.

   Calculer $(\frac{V_s}{V_e})$ en fonction de R et $K(\omega)$, ainsi que son module.

3. (a) Déterminer les limites de ce module quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ respectivement.

   (b) Pour quelle valeur ω_0 de ω le module est il nul ?

   (c) Quelle est la fonction réalisée par ce montage ?