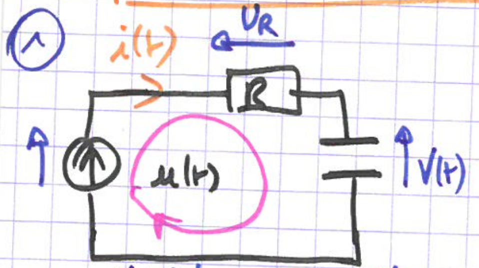
Régime transitoire

Exercice 1: charge d'un condensateur par U(t)=at

(1)



loi de maille : $u(t) - u_R - V(t) = 0$

$$\rightarrow R\,i(t) + \frac{q(t)}{C} = u(t) \quad (1)$$

avec $V(t)$ / $q(t) = C\,V(t)$

$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

$$\rightarrow RC\frac{dV}{dt} + V(t) = u(t) = at \quad a>0$$

il faut résoudre

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V(t) = \frac{a}{RC}t \qquad \tau = RC$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{\tau} = a\,\frac{t}{\tau}}$$

(2) $V(t) = ?$

- Sol. générale sans 2nd membre : $\frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{\tau} = 0 \Rightarrow V(t) = V_0 \exp -\frac{t}{\tau}$
- Sol. particulière $V_1(t) = \alpha t + \beta \rightarrow \alpha + \frac{\alpha t + \beta}{\tau} = a\frac{t}{\tau}$

$\rightarrow a = \alpha \qquad \beta = -a\tau$ par identification

$V_1(t) = a(t - \tau)$ et sol.

- Sol. générale : $V(t) = V_0 \exp -\frac{t}{\tau} + a(t-\tau)$
- Sol. physique $\Rightarrow$ cond. initial à $t=0$ non chargé $q(0)=0 \rightarrow V(0)=0$

$0 = V_0 - a\tau \Rightarrow V_0 = a\tau$

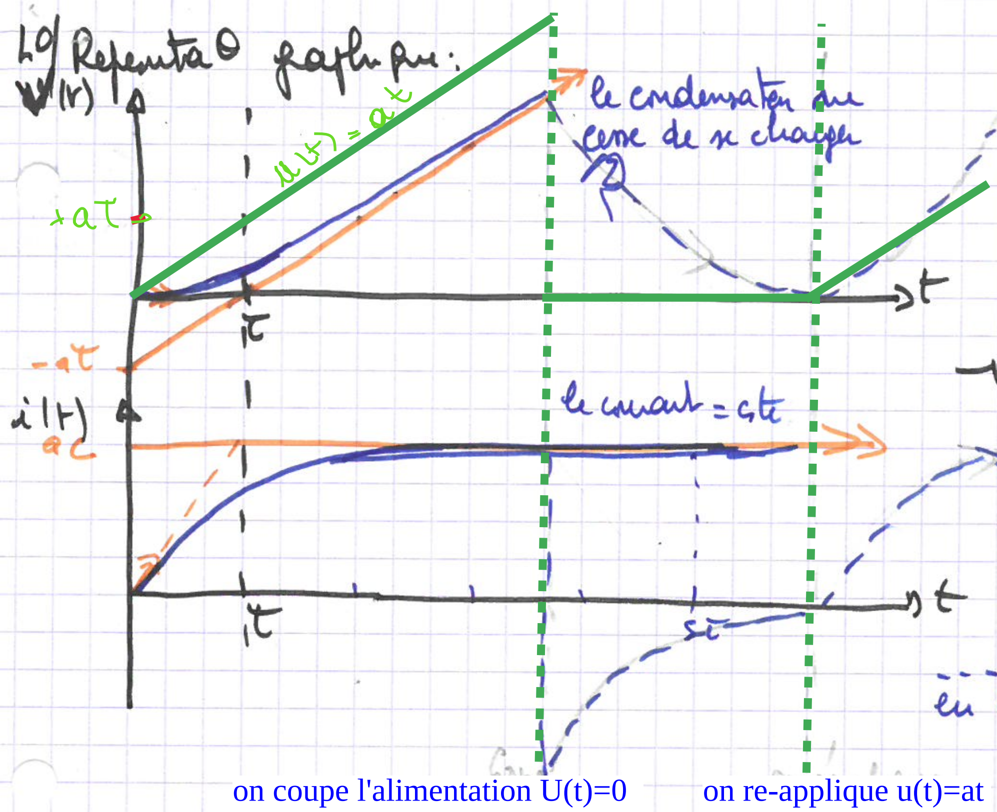
Sol : $$\boxed{V(t) = at - a\tau\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$

(3) Courant de charge $i(t)$ $\qquad i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

$$i(t) = C\left[a + a\tau\left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp -\frac{t}{\tau}\right]$$

$$\boxed{i(t) = aC\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$

1°) Représentation graphique :



asymptotes :

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} v(t) = a(t-\tau) \\ \lim_{t\to\infty} i(t) = ac \end{cases}$$

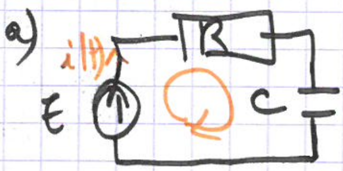
→ l'asymptote en zéro part de $f(0)$ et coupe asymptote ∞ à $t = \tau$

en appliquant de façon récurrente

Exercice 2: Circuit RC de charge et mise en parallèle d'un récepteur non polarisé (moteur)

1ère partie : Classique.

a)



$E - Ri(t) - v(t) = 0$ avec $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = c\frac{dv(t)}{dt}$

$RC\frac{dv}{dt} + v(t) = E$ $\quad RC = \tau$

→ $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$ équation diff du 1er ordre

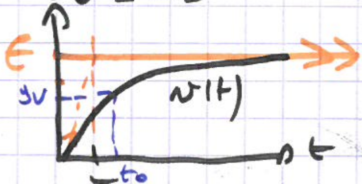
Sol. générale de $\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 \exp -\frac{t}{\tau}$

Sol. particulière $v_1(t) = cte \Rightarrow v_1(t) = E$

Sol. générale $v(t) = v_0 \exp -\frac{t}{\tau} + E$

Sol. physique → C.I à $t = 0$ $q(0) = 0 \Rightarrow v(0) = 0$ $\quad v_0 = -E$

$\boxed{v(t) = E\left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)}$ $\qquad \lim_{t\to\infty} v(t) = E$



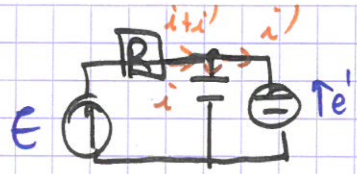
b) AN : $E = 12V$ $\quad R = 100\,k\Omega$ $\quad C = 10\,\mu F$ $\to \tau = RC = 10^5 \times 10^{-5} = 1\,s$

$9 = 12\left[1 - \exp(-t_0)\right]$ $\quad \frac{9}{12} = 1 - \exp(-t_0)$ $\quad 1 - \frac{9}{12} = \exp(-t_0) = \frac{1}{4}$

$-t_0 = \ln(+1/4) \Rightarrow \ln 4 = t_0 = 1{,}4\,s$.

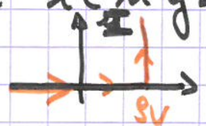
→ Puis on décharge le condensateur → et on place 1 moteur.

2ème partie



que se passe-t-il ?

(a) $i' = 0$ car le recepteur est polarisé cad que tant que la tension 9V n'est pas atteinte il n'y a pas de courant qui circule dans ce recepteur



donc entre 0 et 9V $i' = 0$. or la tension aux bornes du recepteur polarisé est donnée par $\vartheta(t)$ calculée en 1ère partie $\vartheta(t) = E\left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)$

$t \in [0, t_1]$ $t_1 = 1{,}2\,s$. (cf 1.b)

(b) $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{c\,d\vartheta}{dt} = C\left[\frac{E}{\tau}\exp -t\right] = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ $\tau = RC$

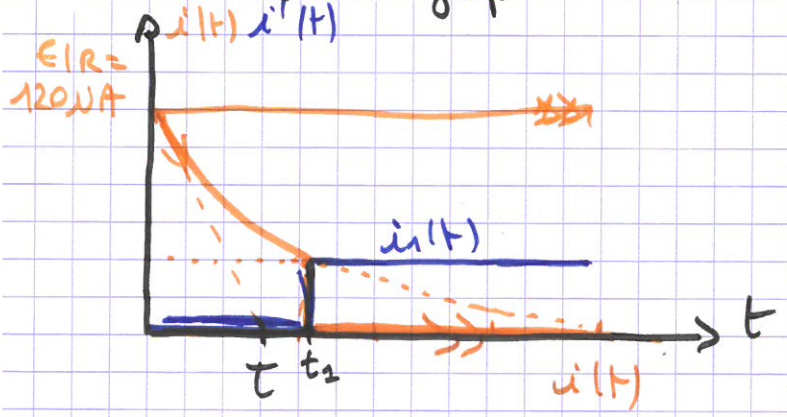
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp -\frac{t}{\tau} \qquad t \in (0, t_1)}$$

$E/R = 120\,\mu A$

(c) $t > t_1$: le recepteur qui n'a pas de R $\Rightarrow$ impose que la tension à ses bornes ne dépasse jamais 9V $\Rightarrow t > t_1$ $\vartheta(t) = 9V$ cad cte $\Rightarrow$ le courant ds le condensateur $i = \frac{c\,d\vartheta}{dt} = c\frac{d\,"9v"}{dt} = 0$ il n'y a alors pas de courant qui circule ds la branche du condensateur $\rightarrow i = 0$ et on a $E - Ri' - e' = 0$ $i' = \frac{E - e'}{R}$

$i' = \frac{12-9}{10^5} = 30\,\mu A$

d) allure du graphe de i et i'



$\lim_{t \to \infty} i(t) = 0$ $\quad i(0) = \frac{E}{R} = 120\,\mu A$

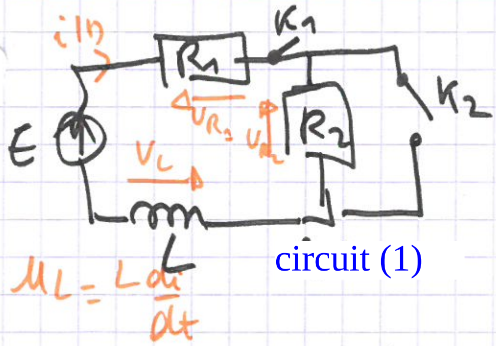
et $i(t_1) = \frac{E}{R}\exp -1{,}4 = E/R \times \frac{1}{4}$

$\ln 4 = 1{,}4$

$\ln\frac{1}{4} = -1{,}4$

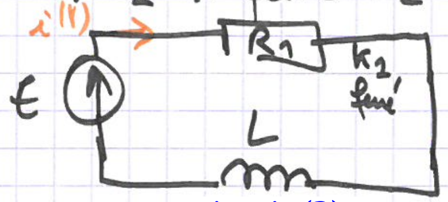
$e^{\ln 1/4} = \exp -1{,}4$

Exercice 3: Bobine d'auto-induction -> Circuit RL



circuit (1)

si K_2 est fermé R_2 est court-circuitée



circuit (2)

1°/ K_1 et K_2 fermé $\Rightarrow$ circuit (2)

a) loi de maille $\Rightarrow$ $E - R_1 i(t) - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + R_1 i(t) = E$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_1}{L} i(t) = \frac{E}{L}}$$ équa° diff en $i(t)$ $\tau = \frac{L}{R_1}$

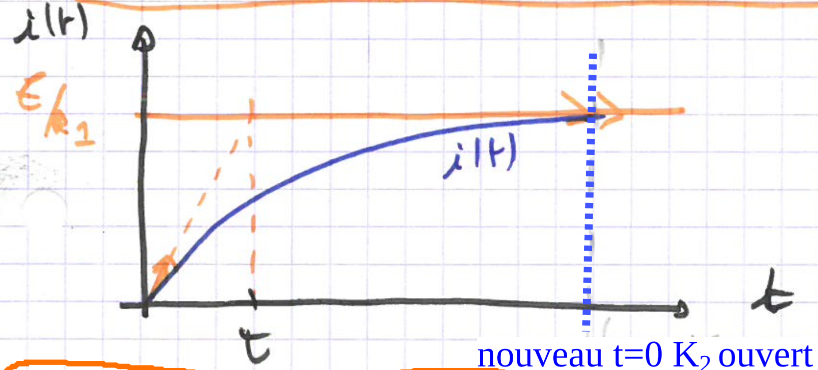
Sol. générale sans 2nd membre $\frac{di}{dt} + \frac{R_1}{L} i(t) = 0 \Rightarrow \boxed{i(t) = i_0 \exp -\frac{R_1}{L} t}$

Sol. particulière $\boxed{i_1(t) = cste \Rightarrow i_1 = E/R_1}$

Sol. générale $\boxed{i(t) = i_0 \exp -\frac{R_1}{L} t + E/R_1}$

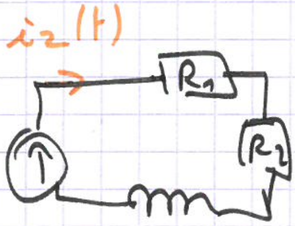
Cond. initiale physique $\Rightarrow i(0) = 0 \Rightarrow i_0 = -E/R_1$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1}\left[1 - \exp -t/\tau\right] \quad \tau = \frac{L}{R_1}}$$



- $\lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{E}{R_1}$
- $i(0) = 0$

2ème partie on ouvre K_2 $\Rightarrow$ circuit (1)



$\Rightarrow R_1 \to R_1 + R_2$

a) $E - (R_1+R_2)\, i_2(t) - L\frac{di_2}{dt} = 0$

Sol. générale $\boxed{i_2(t) = i_{20} \exp -\frac{R_1+R_2}{L} t + \frac{E}{R_1+R_2} \quad \text{évidente}}$

cond° initiale : à $t=0$ $i_2(0) = E/R_1 = i_{20} + \frac{E}{R_1+R_2}$

$$i_{20} = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1+R_2} = \boxed{\frac{E R_2}{R_1(R_1+R_2)}}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left[1 + \frac{R_2}{R_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right]}$$

$\tau_2 = L/(R_1+R_2)$

2b) e : force électromotrice d'auto-induction

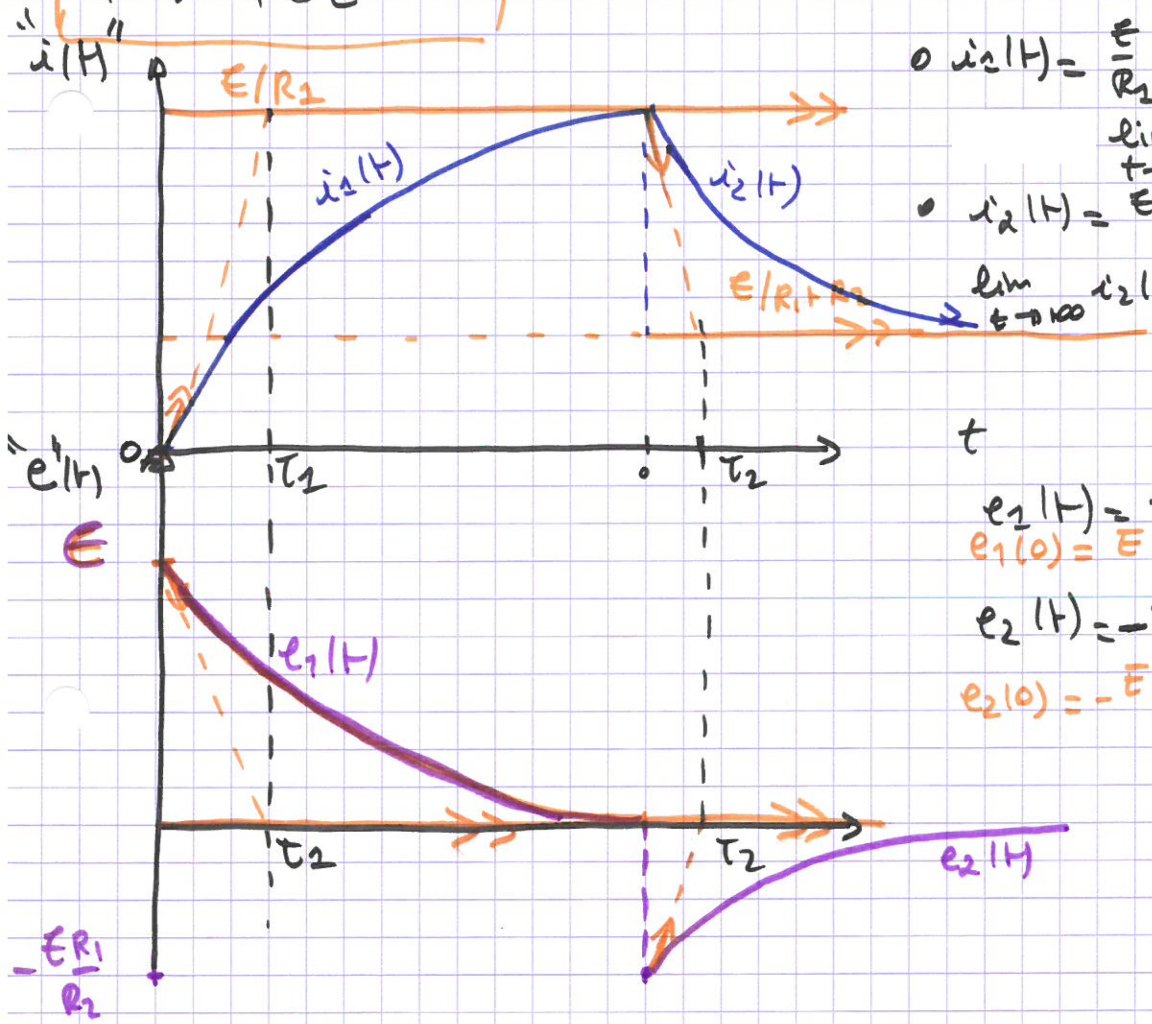
$e_2 = + L \frac{di_2}{dt}$ lors de la charge ($-$ si décharge)

$e_2 = L \frac{E}{R_1+R_2} \left(-\frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_1+R_2}{L} \exp - \frac{t}{\tau_2} \right)$ $\tau_2 = \frac{L}{R_1+R_2}$

$\boxed{e_2(t) = -E \frac{R_2}{R_1} \exp - t/\tau_2}$

et cherchons $e_1(t) = L \frac{di_1}{dt} = L \left(\frac{d}{dt} \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \right)$ $\tau_1 = \frac{L}{R_1}$

$\boxed{e_1(t) = +E e^{-t/\tau_1}}$



- $i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$ $i_1(0) = 0$

  $\lim_{t \to +\infty} i_1(t) = E/R_1$
- $i_2(t) = E/R_1+R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-t/\tau_2}\right.$

  $\lim_{t \to +\infty} i_2(t) = E/R_1+R_2$

$e_1(t) = E e^{-t/\tau_1}$ $\lim_{t \to +\infty} \to 0$

$e_1(0) = E$

$e_2(t) = -E \frac{R_2}{R_1} e^{-t/\tau_2}$ $\lim_{t \to +\infty} \to 0$

$e_2(0) = -\frac{E R_2}{R_1}$