Université Claude Bernard Lyon 1

Tutorat Lyon Est

Unité d'Enseignement 3

BANQUE DE QCM

2013 - 2022

Variables aléatoires discrètes et continues – Lois classiques

QUESTIONS – REPONSES

2013-2021

Question 1 :

La maladie de Huntington, également dénommée chorée de Huntington, est une affection génétique et héréditaire conduisant à la destruction de neurones de certaines régions cérébrales. Elle se traduit principalement par des mouvements anormaux et des troubles du comportement.
Dans la population caucasienne, la prévalence de la maladie de Huntington est de 1/10 000.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes atteintes par la maladie de Huntington sur un échantillon aléatoire de 900 sujets caucasiens.

On considérera, dans cet exercice, que 9,5≈9.

A. X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,1.
B. X suit une loi binomiale de paramètres n = 900 et p = 10^{-4}.
C. On peut approximer la loi binomiale par une loi de Poisson P(0,09). Hors Programme en 2021

En Chorée, la prévalence de cette maladie est de 5%.
On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes atteintes par la maladie de Huntington dans un échantillon aléatoire de 200 Choréens.

D. On peut approximer la loi de Y par une loi normale N(10 ; 3).
E. La probabilité qu'au moins 11 personnes soient atteintes par la maladie de Huntington dans cet échantillon choréen est d'environ 37%.

Question 1 : BCDE

A FAUX X correspond à la répétition de 900 épreuves de Bernoulli de paramètre p = 1/10 000. X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 900 et p = 1/10 000.

B VRAI

C FAUX On vérifie les conditions d'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson :
n = 900 > 50 ; p = 1/10 000 < 0,1 ; np = 900 * (1/10 000) = 0,09 <10
On peut donc approximer la loi binomiale suivie par X par une loi de Poisson P(np).
Calcul des paramètres de la loi de Poisson : np = 900 * (1/10 000) = 0,09
Donc B(900 ; 1/10 000) ~ P(0,09)

D VRAI Y correspond à la répétition de 200 épreuves de Bernoulli de paramètre p=0,05. Y suit une loi binomiale B (200 ; 0,05). On voudrait approximer cette loi binomiale par une loi normale. Vérification des conditions d'approximation : n = 200 > 30 ; np = 200*0,05 = 10 > 5 ; n(1-p) > 10 car ici (1-p) > pCalcul des paramètres de la loi normale :
np = 10 et $\sqrt{npq} = \sqrt{10 * 0{,}95} = \sqrt{9{,}5} \approx \sqrt{9} = 3$
Donc B(200 ; 0,05) ~ N(10 ; 3)

E VRAI On calcule P (Y ≥ 11) = 1 – P(Y ≤ 11)
= 1 - P $(Z \leq z)$ avec Z = $\frac{Y-\mu}{\sigma}$
= 1 - P $(Z \leq \frac{11-10}{3})$ = 1 - P (Z$\leq 0{,}33$)
On lit dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (table I), la probabilité pour la valeur z = 0,33 : on trouve P(Z ≤ 0,33) = 0,6923

$$1 - P(Y \leq 11) = 1 - 0{,}6923 \approx 0{,}37$$

Donc la probabilité qu'au moins 11 personnes soient atteintes par la maladie de Huntington dans cet échantillon choréen est d'environ 37%.

Question 2 :

Dans un service d'ophtalmologie, on administre en systématique un antalgique après une opération de l'œil (il faut noter que l'on administre une seule fois l'antalgique à chaque patient).
Cet antalgique a des effets secondaires dans 2% des cas et est inefficace dans 5% des cas (présence de douleurs).
1% des cas ont des effets secondaires et des douleurs.
On observe aussi, en moyenne, dans ce service, 5 décès en 6 mois dus à ce médicament.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant des effets secondaires du médicament dans un échantillon de 100 personnes.
Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de décès, dus à ce médicament, ayant eu lieu en un an dans ce service d'ophtalmologie.

Aides aux calculs :
$0,98^{-100} \approx 0,98^{-99} \approx 7,54$; $0,98^{100} \approx 0,98^{99} \approx 0,13$; $e^{-10} \approx 4.10^{-5}$; $e^{-5} \approx 6,7.10^{-3}$

A. X suit une loi de Bernoulli de paramètres n = 100 et p = 0,02.
B. Si on administre le médicament 10 000 fois, on observera, en moyenne, 200 fois des effets secondaires.
C. La probabilité d'avoir au moins 2 fois des effets secondaires dans un échantillon de 100 personnes est de 0,61 (à 10^{-2} près).
D. Y suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ = 5.
E. La probabilité d'avoir exactement 5 décès dus à ce médicament dans le service en un an est de $\frac{1}{30}$.

Question 2 : BCE

Tout d'abord revenons sur un petit point de cours :

- Une loi binomiale permet d'exprimer le nombre de succès survenus sur n expériences réalisées, en connaissant la probabilité de succès (le succès pouvant tout à fait être le fait d'être malade).
- Une loi de Poisson permet d'exprimer le nombre de fois où un événement se produit sur un intervalle de temps ou de longueur donnée, en connaissant le nombre moyen d'occurrence (= apparition dans le temps et dans l'espace) de l'événement sur cet intervalle.

A FAUX Définissons Z la variable aléatoire modélisant le fait d'avoir des effets secondaires après la prise de l'antalgique en question :
Z = 0 si le patient n'a pas d'effets secondaires
Z = 1 si le patient a des effets secondaires
Z suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p = 0,02.
X est en fait la répétition de 100 épreuves de Bernoulli donc : X suit une loi BINOMIALE de paramètres n = 100 et p = 0,02.

B VRAI Le médicament est administré 10 000 fois.
La variable W modélisant le nombre de personnes ayant des effets secondaires dans un échantillon de 10 000 personnes suit une loi binomiale de paramètres n = 10 000 et p=0.02. L'espérance de W est E(W) = np = 10 000 * 0.02 = 200.

C VRAI La probabilité d'avoir au moins 2 fois des effets secondaires correspond à P(X≥2).
Or comme la loi binomiale est une loi discrète, on a P(X≥2)= 1 - P(X=0) - P(X=1).
Or on sait que pour la loi binomiale : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Donc $P(X \geq 2) = 1 - C_{100}^{0} 0{,}02^{0}(0{,}98)^{100-0} - C_{100}^{1} 0{,}02^{1}(0{,}98)^{100-1}$

$$\approx 1 - 1 * 0{,}02^{0}(0{,}98)^{100-0} - \frac{100!}{1! * 99!} * 0{,}02^{1}(0{,}98)^{100-1}$$

$$\approx 1 - (1 * 1 * 0{,}13) - (\frac{99! * 100}{99!} * 0{,}02 * 0{,}13)$$

(Retenez que $C_x{}^0 = 1$)

$$\approx 1 - 0{,}13 - (100 * 0{,}0026)$$

$$\approx 1 - 0{,}13 - 0{,}26$$

$$\approx 1 - 0{,}39$$

$$\approx 0{,}61 \text{ (à } 10^{-2} près)$$

D FAUX Y suit EXACTEMENT une loi de Poisson P(10) (on ne passe pas par une approximation par la loi normale).
Le décès se produit en moyenne 5 fois en 6 mois. Pour étudier le nombre de décès se produisant en 1 an (2*6mois), on choisit comme modèle la loi de Poisson de paramètre λ = 2*5 = 10.

E VRAI Pour une loi de Poisson :
On traduit l'énoncé : la probabilité d'avoir exactement 5 décès est P(Y=5).

Or pour une loi de Poisson, $P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Donc $P(Y = 5) = \frac{10^5}{5!} * e^{-10} = \frac{10^5}{1*2*3*4*5} * 4.10^{-5} = \frac{1}{2*3*5} = \frac{1}{30}$

Question 3 :

Une RPP peut être associée avec l'épilepsie.
Au Panama, la prévalence de l'épilepsie est de 1.5%
Soit X la variable aléatoire modélisant le statut des patients vis à vis de l'épilepsie (malade/non malade).
On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus atteints d'épilepsie dans un échantillon aléatoire de 100 personnes issues de la population panaméenne.

A. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p = 0,015.
B. Y est la répétition de 100 épreuves de Bernoulli consistant à déterminer si un individu est atteint d'épilepsie ou non.
C. Y suit une loi binomiale de paramètres n = 100 ; p = 0,15
D. On ne peut pas approximer cette loi binomiale par une loi de Poisson.
E. Y suit approximativement une loi normale de paramètres μ = 1,5 et σ = $\sqrt{1{,}5 * 0{,}985}$

Question 3 : AB

A VRAI

B VRAI En effet, l'épreuve « l'individu est atteint d'épilepsie » n'a que 2 réponses possibles : (X=1), c'est à dire oui, ou (X=0), c'est à dire non. Il s'agit donc bien d'une épreuve de Bernoulli qu'on répète pour les 100 personnes de l'échantillon.

C FAUX Attention X suit une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 1,5% = 0,015.

D FAUX On vérifie les conditions d'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson :

- n = 100 > 50 ; p = 0,015 < 0,1 ; np = 100 * 0,015 = 1,5 < 10

On peut donc approximer la loi binomiale suivie par X par une loi de Poisson P(np)

Calcul des paramètres de la loi de Poisson (pour vous entraîner) : np = 100 * 0,015 = 1,5
Donc B(100 ; 0,015) ~ P(1,5)

E FAUX

Vérification des conditions d'application : n = 100 >30 ; np = 100 * 0,015 = 1,5 < 5
On ne peut donc pas approximer cette loi binomiale par une loi normale.

Question 4 :

Chez les enfants, la vie en communauté type crèche augmente le risque de propagation des maladies infantiles. En période de pic épidémique la probabilité d'avoir la varicelle est de 80% chez les moins de 3 ans. On a un échantillon en période épidémique de 50 enfants de moins de 3 ans venant d'une crèche de la ville de Lyon. On considère malgré le caractère transmissible de la maladie que les cas sont indépendants.
Soit Y la variable aléatoire « avoir la varicelle ».
Soit X la variable aléatoire « nombre d'enfants ayant la varicelle dans le groupe de 50 ».

Pour les calculs on approximera : $\sqrt{8} = 3$

A. Y suit une loi de Bernoulli, Bern(0,80)
B. Y suit une loi binomiale, **B** (50 ; 0,8)
C. X peut être approximée par une loi Normale, **N** (40 ; 3)
D. La probabilité que 10 enfants ou moins aient la varicelle est quasi nulle.
E. La probabilité qu'il y est entre 31 et 43 enfants avec la varicelle dans le groupe est d'environ 0,84.

Question 4 : ACDE

A VRAI Y est une variable aléatoire qui prend uniquement deux valeurs 0 et 1 : 0 si l'enfant n'a pas la varicelle, 1 si l'enfant a la varicelle.
Y=0 si pas varicelle P(Y=0)=0,2
Y=1 si varicelle P(Y=1)=0,8
Or, une épreuve de Bernoulli est une expérience ayant **2 issues possibles**. Donc Y est bien une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,8.

B FAUX Une loi binomiale modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre. Toutes les conditions sont donc réunies pour X qui correspond à la répétition de l'épreuve « l'enfant a-t-il la varicelle » mais pas pour Y qui correspond à une seule épreuve de Bernoulli ! Ici $X = \sum Y_i$
Donc X suit une loi binomiale **B**(n ; p) soit X →**B**(50 ; 0,8) mais Y ne suit pas une loi binomiale mais uniquement une loi de Bernoulli.

C VRAI On a vu que X suivait une loi de binomiale, cette variable aléatoire peut donc être approximée par une loi Normale mais uniquement sous certaine condition : avant de répondre il faut vérifier les conditions d'approximation par la loi Normale :
n≥30 np≥5 n(1-p)≥5
Ici n=**50** ; np=50*0,8= **40** ; n(1-p)=50(1-0,8)=**10**
Donc les conditions d'approximation de la loi Normale sont respectées, on peut donc approximer la loi binomiale par une loi Normale **N**(np ;$\sqrt{npq}$) soit np= 32 et npq=50*0,2*0,8 = 8 et grâce à l'aide au calcul $\sqrt{8} = 3$ donc la loi de X peut être approximée par une loi Normale **N**(40 ; 3).

D VRAI Il faut centrer et réduire la Variable aléatoire X pour pouvoir effectuer ces calculs :

$x - \mu$

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{}{\sigma}\right)$$
$$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{10-40}{3})$$
$P(X \leq x) = P(Z \leq -10)$ Ceci n'est pas calculable dans les tables
$$= 1 - \varphi(10)$$
On regarde alors dans la table la valeur pour 10; or la table ne va que jusqu'à 4,9 nous prenons donc la valeur la plus élevé.
$$= 1 - 0{,}99998$$
$$= 0{,}00002$$
La probabilité que 10 enfants ou moins aient la varicelle est donc quasi nulle.

E VRAI Ici il faut également centrer et réduire les 2 valeurs.
$$(31 \leq X \leq 43) = P(\frac{31-40}{3} \leq Z \leq \frac{43-40}{3})$$
$$= P(-3 \leq Z \leq 1)$$
$$= \varphi(1) - \left(1 - \varphi(3)\right)$$
On regarde dans la table les valeurs correspondant à 3 et 1.
= 0,8413 – (1-0,99865) $= 0{,}8413 - 0{,}00135 = 0{,}83995$ ≈ 0,84

Question 5 :

Au Sierra Leone, on considère un échantillon de 60 individus. On cherche à connaître le nombre de personnes susceptibles de contracter Ebola dans ce groupe d'individu. On considère également, malgré le caractère transmissible de cette maladie, que les cas sont indépendants. Cette maladie a une prévalence faible de 0,05.
Soit X la variable aléatoire modélisant le « nombre de cas d'ebola dans l'échantillon »

Aide au calcul : $\sqrt{2{,}85} = 1{,}7 \quad e^{-3} = 0{,}05 \quad e^{-2} = 0{,}14$

A. X suit une loi Binomiale **B** (3 ; 1,7)
B. X peut être approximée par une loi de Poisson **P** (3)
C. X peut être approximée par une loi Normale **N** (3 ; 1,7)
D. La probabilité d'observer 2 nouveaux cas en une journée est de 0,225
E. Il manque une donnée pour répondre.

Question 5 : BD

A FAUX Soit Y la variable aléatoire modélisant le statut maladie :
Y=0 si non malade
Y=1 si individu malade P(Y=1)=0,05
X → Bern (0,05)
X suit bel et bien une loi binomiale car cette variable correspond à la répétition de 60 épreuves de Bernoulli « avoir ebola » : $X = \sum_{i=1}^{60} Y_i$. Les Yi sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli donc X →B(n ;p).
Mais les paramètres donnés sont faux, ils correspondent à np et $\sqrt{npq}$ qui sont les paramètres lors de l'approximation de la loi binomiale par une loi normale ! Les paramètres d'une loi binomiale sont n et p soit **B** (60 ; 0,05).

B VRAI X suit une loi Binomiale, on va vérifier les conditions d'approximation par une loi de Poisson :
n≥50 p ≤0,1 np<10
On a n=60 ; p=0,05 ; np=60*0,05=3

Les conditions d'approximation sont donc respectées on peut donc approximer loi binomiale **B** (60 ; 0,05) par une loi de Poisson **P** (np=lambda) soit **P** (3)

C FAUX Avant d'approximer par une loi normale, il faut vérifier les conditions d'approximation de la loi binomiale par une loi normale : **n≥30 np≥5 n(1-p)≥5**
Or n=60 mais **np=3** ! Donc les conditions d'application ne sont pas réunies, on ne peut pas approximer la loi Binomiale par une loi Normale.

D VRAI Pour calculer $P(X = 2)$ on a deux solutions :

- Utiliser la formule de la loi Binomiale
- Utiliser la loi de poisson

Utiliser la loi de poisson est ici préférable vu la complexité du calcul via la loi Binomiale. Cette méthode est hors programme en 2021, il faut donc utiliser la formule de la loi binomiale dans votre cas et le rentrer dans votre calculatrice.
En effet c'est pour cela qu'on approxime par la loi de Poisson : pour faciliter les calculs !

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$_P(X = 2) = \frac{e^{-3} * 3^2}{2!}$$

$$_P(X = 2) = \frac{0{,}05 * 9}{1 * 2}$$

$$_P(X = 2) = \frac{0{,}45}{2} = 0{,}225$$

E FAUX La formule si on utilisait la loi binomiale serait :

$$P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(S = 2) = \binom{60}{2} 0{,}05^2\,(1 - 0{,}05)^{60-2}$$

$$P(S = 2) = \frac{60!}{2!(60-2)!}\, 0{,}0025 \times 0{,}95^{58}$$

Question 6 :

En Bretagne, la quantité d'eau (en cL/m2) qu'il pleut par jour est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne 250 et d'écart type 50. La probabilité qu'un jour il ne pleuve pas entre 200 et 300 cL/m2 d'eau en Bretagne appartient à l'intervalle :

A. $[0{,}1;\ 0{,}2]$
B. $[0{,}2;\ 0{,}3]$
C. $[0{,}3;\ 0{,}4]$
D. $[0{,}4; 0{,}5]$
E. $[0{,}5; 0{,}6]$

Question 6 : C

A FAUX
B FAUX
C VRAI Soit X la variable aléatoire gaussienne représentant la quantité d'eau qu'il pleut par jour en Bretagne. X suit une loi normale N(250 ; 50)
On cherche donc 1- P(X ∈ [200; 300] car on cherche la probabilité qu'il ne pleuve PAS.

$$(200 < X < 300) = P\left(\frac{200 - 250}{50} < \frac{X - 250}{50} < \frac{300 - 250}{50}\right) = P(-1 < Z < 1)$$

P

$$P(-1 < Z < 1) = \varphi(1) - \varphi(-1) = \varphi(1) - (1 - \varphi(1)) = 2 \times \varphi(1) - 1$$
$$= 2 \times 0.84 - 1 = 0.68$$

Donc au final, la probabilité qu'il ne pleuve pas entre 200 et 300 dL/m2 d'eau en bretagne un jour est de 0,32.

D FAUX

E FAUX

Question 7 :

Dans la population des femmes enceintes françaises, la probabilité d'accoucher par voie basse est de 85%. On note X le nombre d'accouchements par voie basse sur un échantillon de 1000 femmes issues de la population française.

A. X suit une loi de Bernoulli de paramètre (0,85)
B. X suit une loi binomiale de paramètres (1000 ; 0,85)
C. X suit une loi normale de paramètre (850, $\sqrt{127{,}5}$ ≈10)
D. La probabilité d'observer un nombre d'accouchements par voie basse supérieur ou égal à 850 est égale à 50%.
E. La probabilité d'avoir moins de 950 accouchements par voie basse est de 0,89.

Question 7 : BD

A FAUX Une épreuve de Bernoulli est une expérience avec deux issues possibles uniquement, or ici X a 1001 valeurs possibles.

B VRAI Soit Y la variable aléatoire modélisant le fait d'accoucher par voie basse ou non. Y prend la valeur 1 en cas d'accouchement par voie basse et la valeur 0 sinon et, d'après l'énoncé, P(Y=1) = 0,85. Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p=0.85. X s'écrit alors comme la somme de 1000 variables aléatoires Yi, toutes indépendantes et de même loi. X suit donc une loi binomiale de paramètres n=1000 et p=0,85.

C FAUX Attention X ne suit pas une loi normale, mais X suit une loi binomiale qui peut être approximée par une loi normale. En effet, on a n≥30, np≥5 et npq≥5, les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale sont donc réunies. X peut alors être approximée par une loi Normal de paramètres

D VRAI 850 correspond à np, soit à l'espérance du nombre d'accouchements par voie basse, ainsi 850 correspond à la moyenne. Or on sait que la moyenne et la médiane d'une variable aléatoire suivant une loi normale sont confondues. D'après la définition de la médiane, on a donc bien 50% de chances d'observer 850 accouchements ou plus par voie basse.

E FAUX Il va falloir centrer et réduire la valeur 950 :

$$P(X \leq 950) = P\left(\frac{X - 850}{10} \leq \frac{950 - 850}{10} = \frac{100}{10}\right) = P(Z \leq 10)$$

Dans la table de la loi normale pour z = 10 on trouve 0,99998 donc la probabilité d'observer moins de 950 accouchements par voie basse est de 99,9%.

Question 8 :

Le by-pass gastrique par cœlioscopie entraîne un taux de complication d'environ 5%. L'équipe de chirurgien d'une clinique prévoit de réaliser 80 by-pass gastriques dans l'année à venir. Soit la variable aléatoire X, égale au nombre de complications à craindre durant l'année à venir.

A. X suit approximativement une loi normale (80, 0,05)
B. X suit une loi binomiale (80, 0,95)
C. X suit approximativement une loi de poisson (4)
D. X suit approximativement une loi de poisson (76)
E. L'espérance de X est 4

Question 8 : CE

Traduction de l'énoncé

On réalise ici une épreuve de Bernoulli, qui est le by-pass. Soit S notre variable de Bernoulli. *Bien faire attention ici à la notion de succès et d'échec : à la fin de l'exercice, on cherche le nombre d'opérations ayant eu une complication. Une complication est donc considérée comme un succès aussi paradoxal que ça puisse paraître !*

Succès = complication, quand S = 1
Échec = pas de complication, quand S = 0
P = P(complication) = 0.05
Donc, S ~ Bern(0.05)
On répète cette épreuve de Bernoulli 80 fois.
Soit X le nombre de complications à l'issue de toutes ces épreuves.
X~B(n, p) (diapo 44 du cours sur les variables aléatoires)
Ici, on répète l'épreuve 80 fois, donc n = 80 et p = 0.05
Attention à ne pas s'arrêter là une fois qu'on a trouvé une loi suivie par X. Car la loi de X peut très bien être approximée par d'autres ! On est donc obligés de vérifier TOUTES les lois présentées dans les items !!!

A FAUX Conditions d'application de l'approximation de la loi binomiale par la loi normale (diapo 65) :

- np > 5 → np=4 **NON**
- n(1-p) >5 → n(1-p) = 76 OK
- n >30 → n = 80 OK

Une des conditions d'application n'est pas remplie. Donc on ne peut pas approximer notre loi binomiale par la loi normale, donc X ne suit pas approximativement de loi normale.

B FAUX Voir démonstration ci-dessus. X~B(80, 0.05)

C VRAI On cherche à approximer la loi binomiale par la loi de poisson : conditions d'applications (diapo 54) :

- np <10 → np = 4 OK
- n >50 → n = 80 OK
- p ≤ 0.1 → p = 0.05 OK

Les conditions d'applications sont réunies donc X suit approximativement une loi de Poisson (np), où np = 4

D FAUX

E VRAI X ~ B (80, 0.05) donc E(X) = np = 4

Question 9 :

Un pêcheur assis sur une berge, muni d'une canne à pêche, contemple une route sous-marine empruntée par exactement 100 poissons séparés d'intervalles réguliers. Le pêcheur a 5% de chance d'attraper chacun des 100 poissons lorsque celui-ci passe sous sa canne à pêche. Soit X est la Variable Aléatoire associée au nombre de poissons pêchés par le pêcheur une fois que les 100 sont passés. Aides aux calculs pour C) : 1,96 ≈ 2 ; $\sqrt{0,05 \times 0,95} = 0,22$; 2,25 x 0,22 = 0,5

A. X suit une loi binomiale B(100 ; 0,05) pouvant être approximée par une loi normale et une loi de poisson

B. $\frac{100!}{15!*85!}$ x $0,05^{15}$ x $0,95^{85} \approx \frac{e^{-5}*5^{15}}{15\,!}$

C. L'intervalle de confiance à 2,5% centré sur le nombre moyen de poissons pêchés par le pêcheur après le passage des 100 poissons, est [4,56 ; 5,44].

Un autre pêcheur pêche en moyenne 1 poisson par heure,
Aides aux calculs pour D) et E) : e^{-1}= 0,37 ; $25e^{-5}$= 0,168 ; $5e^{-1}$= 1,8

D. La probabilité que ce second pêcheur pêche 2 poissons en une heure est de 0,084

E. La probabilité que ce second pêcheur attrape au moins 3 poissons par heure vaut 0,10.

Question 9 : ABE

A VRAI Décryptage de l'énoncé : Ici il faut voir que X suit une loi binomiale, en effet on a le répétition de n (100) épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité p (0,05). Maintenant il faut voir si cette loi binomiale peut être approximée par une loi normale. Il faut pour cela que n soit supérieur à 30, c'est le cas, que n x p ≥ 5, et c'est le cas, et que n x q = 100 x 0,95 = 95 ce qui est supérieur à 5, donc cette loi binomiale B(100 ; 0,05) peut être approximée par une loi normale.
De même n étant supérieur à 50, p inférieur ou égal à 0,1 et n x p inférieur à 10, X peut être approximée par la loi de poisson de paramètre λ = n x p = 5.

B VRAI Il faut juste comprendre que l'on calcule la probabilité P(X=15) de deux manières différentes : par la formule de loi binomiale et par celle de la loi de poisson (son approximation).

→ Par la loi binomiale : formule : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ x p^k x $(1-p)^{n-k}$ avec ici n=100 k=15 p=0,05

Donc P(X=15) = $\frac{100!}{15!*85!}$ x $0,05^{15}$ x $0,95^{85}$

→ Par la loi de poisson : formule : $\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$ avec λ = 5 et k = 15

Donc P(X=15) = $\frac{e^{-5}*5^{15}}{15\,!}$

D'où $\frac{100!}{15!*85!}$ x $0,05^{15}$ x $0,95^{85} \approx \frac{e^{-5}*5^{15}}{15\,!}$

Et attention, c'est bien à peu près égal (≈) car la loi de poisson n'est qu'une approximation de la loi binomiale.

C FAUX On n'a pas d'échantillon donc on ne peut pas calculer d'intervalle de confiance ici ! (Vous l'aurez compris, la différence, si elle n'est pas évidente est très importante)

D FAUX Pour les items D)-E) on a rajouté une donnée de temps ; on connait un nombre moyen de poissons pêchés par heure. La variable aléatoire X est le nombre de poissons pêché par heure et suit une loi de poisson P(1)
Pour calculer la probabilité que le pêcheur attrape deux poissons par heure il suffit de reprendre la formule de la loi de poisson et de remplacer λ par 1 et k par 2.

Donc : P(Y=2) = $\frac{e^{-1}*1^2}{2\,!} = \frac{e^{-1}}{2}$= 0,37/2 = 0,185

E VRAI P(Y≥ 3) revient à dire que le pêcheur ne pêche ni 0 ni 1 ni 2 poissons, mais 3 ou plus, donc P(Y≥ 3) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)

= 1 - $\frac{e^{-1}*1^0}{0!} - \frac{e^{-1}*1^1}{1!} - \frac{e^{-1}*1^2}{2!}$

$= 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2}$

$= 1 - \frac{5e^{-1}}{2}$

= 1 - 1,8/2

= 1 - 0,9

= 0,1

Question 10 :

On sait que le taux sanguin T (en u/ml) d'hémoglobine est plus faible en moyenne chez les malades atteints de la maladie (notés : M) que chez les non malades (notés : NM). On veut se servir de la mesure de T pour aider au diagnostic de M. On suppose d'abord connaître parfaitement la distribution de T chez les malades M et les non malades NM : les deux suivent une loi normale, dont les paramètres respectifs sont répertoriés ci-dessous :

Non-malades NM $\mu_{NM} = 110$ $\sigma_{NM} = 10$

Malades M $\mu_M = 100$ $\sigma_M = 10$

A. Il y a 50 % des non-malades dont le taux est supérieur à 110
B. Il y a plus de 15% des non-malades dont le taux est compris entre 120 et 130
C. Il y a plus de 15 % des malades dont le taux est supérieur à 110
D. La valeur du taux de T dépassée par 10 % des sujets malades est inférieure à 113
E. La valeur du taux de T dépassée par 10 % des sujets malades est supérieure à 113

Question 10 : ACD

A VRAI Le taux sanguin chez les non-malades suit une loi normale de moyenne 110. Hors pour une loi normale, la moyenne et la médiane sont identiques. Donc on a bien 50% des nonmalades dont le taux est supérieur à 110.

B FAUX *Solution rapide :*

$120 = \mu_{NM} + \sigma_{NM}$

$130 = \mu_{NM} + 2\sigma_{NM}$

L'intervalle [120 ; 130], correspond donc à l'intervalle $[\mu_{NM} + \sigma_{NM} ; \mu_{NM} + 2\sigma_{NM}]$.

Or on sait que dans un intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$, on trouve 68 % de la population (car suit une loi normale). De plus, on sait que dans un intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$, on trouve 95% de la population. On en déduit donc qu'un intervalle $[\mu + \sigma ; \mu + 2\sigma]$ contient **13,5%** de la population.

Solution « classique » :

Soit Z le variable aléatoire représentant la valeur du taux chez les non-malades

On cherche $P(120 < Z < 130)$

On centre et on réduit : $P(120 < Z < 130) = P(\frac{120-10}{110} < \frac{Z-10}{110} < \frac{130-10}{110}) = P(1 < X < 2)$

$$P(1 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = P(X < 1) - P(X < 2) = \varphi(1) - \varphi(2)$$

On cherche les valeurs de $\varphi(1)$ et de $\varphi(2)$ dans la table I. On trouve respectivement :

$\varphi(1) = 0.8413$ et $\varphi(2) = 0.9772$

D'où $P(1 < X < 2) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359 < 0.15$

C VRAI Soit N la variable aléatoire représentant la valeur du taux chez les malades

$P(N > 110) = P(\frac{N-100}{10} > \frac{110-100}{10}) = P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \varphi(1)$
On cherche dans la table I la probabilité associée à 1, on trouve 0,8413.
Donc $P(X > 1) \ = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

D VRAI Soit N la variable aléatoire représentant la valeur du taux chez les malades On cherche la valeur t du taux telle que $P(N > t) = 0.1$.
On centre et on réduit : $P\ (\frac{N-\mu_M}{\sigma_M} > \frac{t-\mu_M}{\sigma_M}) = 0.1$ ou $P(X > z)$ avec $z = \frac{t-\mu_M}{\sigma_M}$
Donc $t = \mu_M + z\sigma_M$.
Dans la table II pour la valeur de z telle que $P(X > z) = 0{,}1$, on lit $z = 1{,}2816$
Donc $T = 100 + 1.2816 * 10 = 112.816$
Donc, la valeur t du taux dépassé par seulement 10% des sujets malades est 112,816.

E FAUX

Question 11 :

On considère l'école d'infirmière Rockefeller qui accueille 400 élèves. 20% de ces élèves sont des garçons. Soit G la variable aléatoire « nombre de garçons dans un échantillon de 100 élèves de l'école Rockefeller ».
Les individus constituant les échantillons sont considérés comme étant indépendants.

A. G suit une loi de Bernoulli de paramètres p = 0,2 et n = 100.
B. G suit une loi binomiale de paramètres p = 0,2 et n = 400.
C. G suit approximativement une loi normale de paramètres µ=20 et σ= 4.
D. P(G≥12) ≈ 97,7%.
E. La probabilité d'observer plus de garçons que de filles dans un échantillon est d'environ 5%.

Question 11 : CD

A et B FAUX G correspond à la répétition de 100 épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre p = 0,2, elle suit donc une loi binomiale de paramètres p = 0,2 et n = 100.

C VRAI Il faut vérifier les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale.
n = 100 > 30 ; np = 100 * 0,2 = 20 > 5 ; n(1-p) = 100 * 0,8 = 80 > 5
Les conditions sont vérifiées, on peut donc approximer la loi binomiale B(100, 0,2) par une loi normale N(np ; $\sqrt{npq}$) .
np = 100*0,2 = 20 ; $\sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0{,}2 * 0{,}8} = \sqrt{16} = 4$
G suit donc approximativement une loi normale de paramètres µ=20 et σ= 4.
D VRAI $P(G \geq 12) = P(\frac{G-20}{4} \geq \frac{12-20}{4}) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2)$ par symétrie de la loi normale par rapport à l'axe des ordonnées.
On lit ensuite la valeur dans la table de la loi normale pour z = 2.
P(G ≥ 12) = 0,9772 ≈ 97,7%

E FAUX Observer plus de garçons que de filles signifie avoir plus de 50 garçons dans l'échantillon :

$P\ (G \geq 50) = P(\frac{G-20}{4} \geq \frac{50-20}{4}) = P\ (Z \geq 7{,}5) = 1 - P(Z \leq 7{,}5)$

La table de la loi normale ne va que jusqu'à z = 4, mais on voit bien que pour une valeur supérieure à 4, la probabilité va tendre vers 1, donc $1-P(Z\leq 7{,}5)\approx 0$.

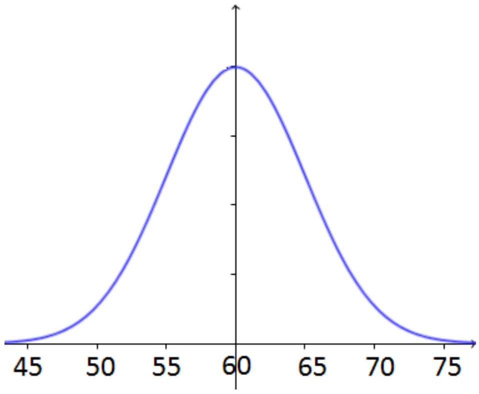
Question 12 :

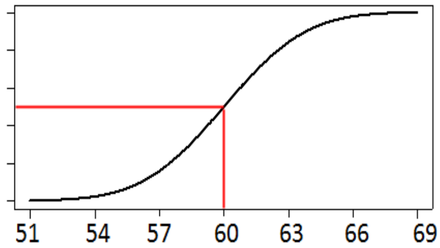
La ville de Paris souhaite déterminer le nombre de pigeons au mètre carré présents dans ses rues. Elle découvre dans la littérature scientifique que les villes de Lyon et Bordeaux ont déjà mené des études en parallèle sur le même sujet. Le nombre de pigeons au mètre carré dans chacune des villes, modélisé par les variables aléatoires X et Y respectivement, suit une loi normale de paramètres :

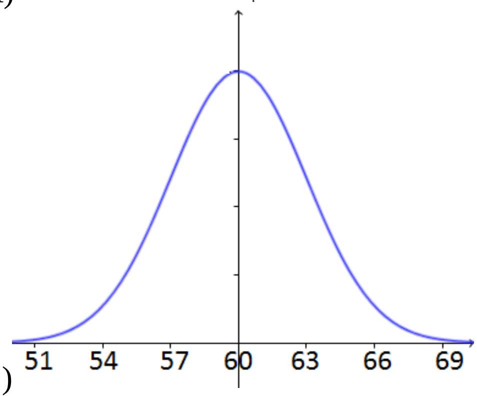
	Lyon	Bordeaux
Moyenne	10	15
Ecart-type	1	2

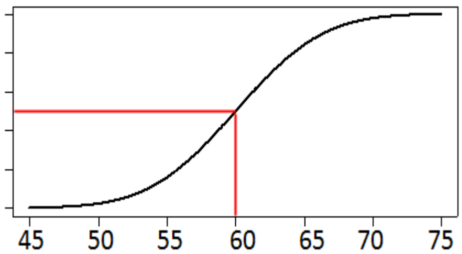
La variable aléatoire Z modélisant le nombre de pigeons au mètre carré dans la ville de Paris peut être obtenue par combinaison linéaire de celui des villes de Lyon et Bordeaux : Z = 3X + 2Y.
Les variables X et Y sont considérées comme indépendantes.
Quelle est la courbe qui représente la densité de probabilité de Z ?

Aide au calcul : $\sqrt{11} \approx 3$

A) 

B) 

C) 

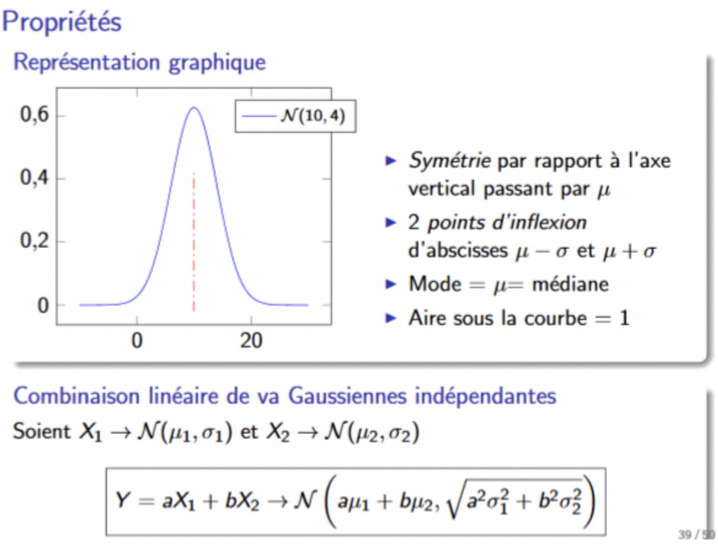
D) 

E) Il manque des informations pour répondre à la question.

Question 12 : A

Les courbes B et C ne correspondent pas à des densités de probabilité mais à des fonctions de répartition de la loi normale (c'est-à-dire l'intégrale de la densité de probabilité). On peut donc les éliminer : **B et C FAUX**.

Il s'agit ici de chercher les paramètres de la loi normale que suit Z :



Z suit donc une loi normale de moyenne $\mu_Z = 3\mu_x + 2\mu_y$ et d'écart- type $\sigma_z = \sqrt{3^2 * \sigma_X{}^2 + 2^2 * \sigma_Y{}^2}$.

$\mu_Z = 3*10+15*2=60$

$\sigma_Z = \sqrt{3^2 * 1^2 + 2^2 * 2^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Z suit une loi normale N(60 , 5).
/!\ On ne sait combiner des variables aléatoires que si celles-ci sont indépendantes /!\
Il faut ensuite déterminer quelle courbe correspond à la densité de probabilité de la loi N(60 , 5).

La courbe doit être centrée sur 60, ce qui est le cas des réponses A et D et ne permet pas de les départager. On sait qu'on a environ 95% de la distribution dans l'intervalle [μ-2σ ; μ+2σ]. Ici, entre 50 et 70, on a clairement plus de 95 % des données sur le graphe D. En revanche, cela paraît plausible pour le graphe A.

Donc **A VRAI** et **D FAUX**

Question 13 :

Lyon accueille deux services de chirurgie cardiaque réputés. Dans le premier, 10 infections nosocomiales surviennent en moyenne chaque mois. Dans le deuxième, qui accueille 50 patients tous les mois, 20% des patients subissent une infection nosocomiale.
Soit X : « nombre de patients attrapant une infection nosocomiale dans le service n°1 en un mois ».
Soit Y : « nombre de patients attrapant une infection nosocomiale dans le service n°2 en un mois ».
Aide aux calculs : $e^{-1} \approx 0{,}37$; $e^{-10} \approx 4{,}5*10^{-5}$; $\sqrt{8} \approx 3$

A. X suit une loi de poisson P(10).
B. Y suit une loi binomiale B(50 ; 0,2)

C. La loi de Y peut être approximée par une loi de poisson P(10).
D. La loi de Y peut être approximée par une loi normale N(10 ; 3)
E. La probabilité d'avoir strictement moins de 2 infections nosocomiales en un mois est plus élevée dans le service n°1 que dans le service n°2.

Question 13 : ABD

A VRAI La loi de poisson modélise le nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle de temps ou d'espace donné. Ici, la loi de X nous donne la probabilité qu'un certain nombre d'infections nosocomiales surviennent durant un mois dans le service n°1, avec en moyenne 10 infections par mois : X suit donc une loi de Poisson P(10).

B VRAI Y modélise la répétition de 50 expériences indépendantes consistant à voir si le patient a ou non une infection nosocomiale, avec une probabilité 0,2 d'avoir une infection : Y suit donc une loi binomiale B(50 ; 0,2).

C FAUX Il faut vérifier les conditions d'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson : p = 0,2 > 0,1, les conditions d'approximation ne sont donc pas respectées.

D VRAI Il faut vérifier les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale : n=50>30 ; np =10>5 ; n(1-p)=40>5. Les conditions sont vérifiées, on peut donc maintenant calculer les paramètres de cette loi normale :
μ = np = 50 * 0,2 = 10
σ = √(npq) = √(50*0,2*0,8)=√(8)≈3
Donc Y suit approximativement une loi normale N(10 ; 3).

E FAUX Il s'agit de calculer la probabilité d'avoir strictement moins de 2 infections nosocomiales dans les 2 services (P(X ≤ 1) et P(Y ≤ 1)) puis de les comparer.
Pour le service n°1 :

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$\frac{e^{-10} * 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} * 10^1}{1!}$$

$$4{,}5 * 10^{-5} + 4{,}5 * 10^{-5} * 10$$

$$4{,}95 * 10^{-4}$$

Pour le service n°2 : On utilise l'approximation par la loi normale pour simplifier les calculs.

$P(Y \leq 1) = P(\frac{Y-10}{3} \leq \frac{1-10}{3}) = P(Z \leq -3)$

Dans le cours, on a la formule ϕ(-x) = 1−ϕ(x) : donc $P(X \leq -k) = 1 - P(X \leq k)$

Donc $P(Y \leq 1) = 1 - P(Z \leq 3)$

On lit la valeur dans la table de la loi normale : 0,99865.

Donc $P(Y \leq 1) = 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135 = 13{,}5 * 10^{-4}$

La probabilité d'avoir strictement moins de 2 infections nosocomiales en un mois dans le service n°1 est inférieure à celle dans le service n°2.

Question 14 :

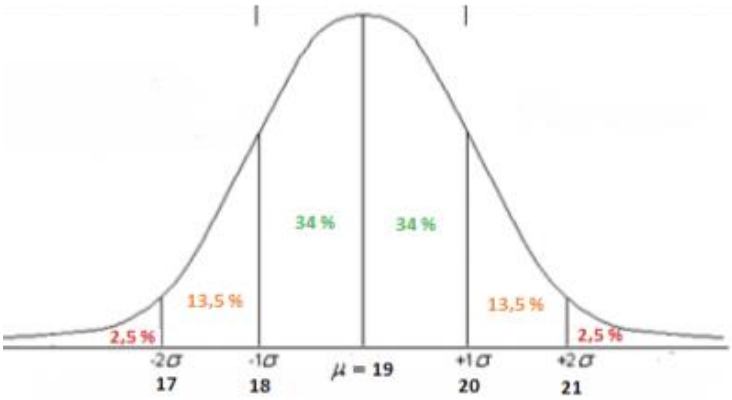
Soit X la variable aléatoire représentant l'âge des étudiants inscrits en PACES (P1). On sait que X suit une loi normale et moyenne $\mu_x = 19$ ans, et d'écart type $\sigma_x = 1$ an

A. La probabilité d'avoir plus de 20 ans est de 0,16.
B. La probabilité d'avoir entre 18 et 21 ans est de 0,88.
C. La probabilité d'avoir entre 18 et 21 ans est la même que la probabilité d'avoir entre 17 et 20 ans.
D. La probabilité d'avoir entre 16 et 19 ans est la même que la probabilité d'avoir entre 18 et 21 ans.
E. La probabilité d'avoir 19 ans est égale à 0,5.

Question 14 : AC

Données de l'exercice :

➢ Il est possible de représenter la densité de la variable aléatoire X, centrée autour des de sa moyenne (cf. schéma ci-dessous).



ÂGE DES P1

Cet exercice fait appel aux propriétés de la distribution de la loi Normale :

➢ La densité de probabilité de la loi Normale est symétrique par rapport à la moyenne μ.

➢ La probabilité que X appartienne à l'intervalle [μ- σ ; μ+ σ] est de 68 %

➢ La probabilité que X appartienne à l'intervalle [μ- 2*σ ; μ+ σ] est de 95 %

On peut représenter la distribution de valeurs de notre variable par un schéma comme celui-ci :

A VRAI D'après le schéma, on peut donc voir que la probabilité d'avoir plus de 20 ans = 0,135 + 0,025 = 0,16.

B FAUX Probabilité d'avoir entre 18 et 21 ans = 0,34 + 0,34 + 13,5 = 0,815.

C VRAI car $P(18 \leq X \leq 21) = P(X \leq 21) - P(X < 18) = P(X \geq 17) - P(X > 20) = P(17 \leq X \leq 20)$. Cette égalité est possible car la densité de probabilité d'une variable suivant une distribution normale est symétrique par rapport à sa moyenne (ici μ=19).

D FAUX $P(16 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(< 16)$. Or P(X ≤ 19) = 0,5 et P(X ≤ 16) >0. Donc : $P(16 \leq X \leq 19)$ < 0,5. La probabilité d'avoir entre 18 et 21 ans est égale à 0,815

E FAUX il s'agit d'une fonction continue donc ∀ k ∈ R, P(X=k)=0.

Il est possible dans cet exercice d'utiliser d'autres méthodes pour le résoudre (notamment la loi normale, qui est cependant beaucoup plus longue), celle-ci n'en étant qu'une parmi d'autres..

Question 15 :

On considère un échantillon de 25 étudiants en PACES. La proportion d'étudiants en PACES participant aux colles d'UE4 est de 80%. Soit la variable aléatoire X : « nombre d'étudiant en PACES participant à la colle d'UE4 dans l'échantillon ».

Aide aux calculs : $0,8^{25} \approx 0,004$; $0,8^{24} \approx 0,005$; $0,8^{23} \approx 0,006$

A. X suit une loi binomiale de paramètre n = 25 et p = 0,8.
B. X suit approximativement une loi normale N(20 ; 2).
C. X suit approximativement une loi de Poisson P(20).
D. La probabilité que tous les PACES de l'échantillon participent à la colle est nulle.
E. La probabilité que strictement plus de 22 PACES participent à la colle est d'environ 10,1%.

Question 15 : AE

A VRAI Il s'agit d'une répétition de 25 épreuves de Bernoulli indépendantes avec une probabilité de 0,8 de réalisation de l'événement « participer à la colle d'UE4 ». X suit donc une loi binomiale paramètres n = 25 et p = 0,8.

B FAUX On doit vérifier les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale. n = 25, ce qui est inférieur à 30, on ne peut donc pas effectuer l'approximation par la loi normale.

C FAUX De la même manière que pour l'item précédent, on ne peut pas approximer la loi binomiale par une loi de Poisson car l'échantillon est trop petit : n = 25, alors qu'il faudrait n>50.

D FAUX $P(X=25)= C_{25}^{25} * 0,8^{25} = 1 * 0,8^{25} \approx 0,004$

NB : Pour une variable binomiale, la probabilité que la variable prenne une valeur exacte n'est jamais strictement nulle.

E VRAI $P(X > 22) = P(X = 23) + P(X = 24) + P(X = 25)$

On utilise la formule de la loi binomiale : P(Y=k) = C_n^k x p^k x $(1-p)^{n-k}$ avec $C_n^k = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$

Donc $P(X=25)= C_{25}^{25} * 0,8^{25} = 1 * 0,8^{25} \approx 0,004$

$P(X=24) = C_{25}^{24} * 0,8^{24} * 0,2 \approx \frac{25!}{1! * 24!} * 0,005 * 0,2 \approx \frac{24! * 25}{24!} * 0,001 \approx 0,025$

$P(X = 23) = C_{25}^{23} * 0,8^{23} * 0,2^2 \approx \frac{25!}{2! * 23!} * 0,006 * 0,04 \approx \frac{23! * 24 * 25}{2 * 23!} * 0,006 * 0,04 \approx 300 * 0,04 * 0,006 \approx 12 * 0,006 \approx 0,072$

Donc $P(X > 22) \approx 0,004 + 0,025 + 0,072 \approx 0,101 \approx 10,1\%$

Question 16 :

La maladie de Parkinson est une maladie neurodégénérative se caractérisant par la mort des neurones dopaminergiques de la substance noire. A la date d'apparition des symptômes, 70% des neurones dopaminergiques sont détruits en moyenne, avec un écart-type de 5%. On considère un échantillon de 200 personnes atteintes de cette maladie, chez lesquelles on mesure le taux de destruction des neurones dopaminergiques à la date d'apparition de leurs symptômes.

Soit X la variable aléatoire « Pourcentage de neurones dopaminergiques détruits chez un patient ». Dans cet exercice, on supposera X Gaussienne.
Soit Y la variable aléatoire « avoir plus de 83% de neurones dopaminergiques détruits ».
Soit Z la variable aléatoire « nombre de personnes ayant plus de 83% de neurones dopaminergiques détruits dans l'échantillon ».

A. La probabilité d'avoir moins de 50% de neurones dopaminergiques détruits à la date d'apparition des symptômes est d'environ 2,5%.
B. $P(X \geq 0{,}83) \approx 0{,}5\%$
C. Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p = 0,7.
D. Z suit une loi binomiale de paramètres p = 0,83 et n=200.
E. Z suit approximativement une loi de Poisson de paramètre lambda = 1.

Question 16 : BE

Tout d'abord il faut bien se représenter la situation pour éviter de mélanger les variables :

La variable X « taux de destruction des neurones dopaminergiques » suit une loi normale de moyenne 70% et d'écart-type 5%.

A partir de ces données, on peut répondre aux 2 premiers items :

A FAUX $P\ (X \leq 50\%)\ =\ \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{50\%-70\%}{5\%}) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -4) = 1 - \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 4)$

On cherche dans la table de la loi Normale à la valeur z=4, et on trouve 0,99997.

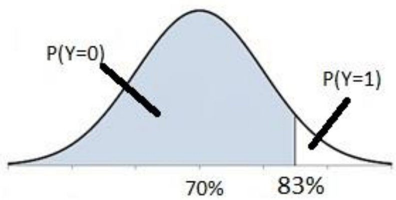
Donc $P(X \leq 50\%)\ = 1-0{,}99997 = 0{,}00003$.

B VRAI $P(X \geq 0{,}83)\ = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{0{,}83-0{,}7}{0{,}05}) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq 2{,}6)\ =\ 1\ -\ \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2{,}6)$

On cherche dans la table de la loi Normale à la valeur z=2,6 et on trouve 0,9953.

Donc $P(X \geq 0{,}83)\ = 1-0{,}9953 = 0{,}0047 \approx 0{,}005$.

C FAUX La variable Y correspond une discrétisation de la variable X :
- Y = 1 si X>83%
- Y = 0 si X<83%



La probabilité que Y soit réalisé (Y=1) est donc égale à la probabilité que X>83%. Or on a calculé cette probabilité à l'item précédent : $P(X \geq 0{,}83) \approx 0{,}5\%$. Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p=0,005 (0,5%).

D FAUX Z correspond ensuite à la répétition de 200 épreuves de Bernoulli Y de paramètre p = 0,005. Z suit donc une loi binomiale de paramètre n = 200 et p = 0,005.

E VRAI Il faut regarder si les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson sont vérifiées : n=200>50 ; np=1<10 ; p=0,005<0,1

Les conditions sont vérifiées, on peut donc approximer la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre lambda = np = 1.

Question 17 :

La maladie de Crohn est une maladie qui provoque l'inflammation et l'irritation d'une partie de l'appareil digestif. Induisant de fortes douleurs abdominales, des diahrées ainsi que des saignements rectaux et parfois de la fièvre.

Au Canada on estime sa prévalence à 20 / 100000.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes touchées par la maladie de Crohn sur un échantillon aléatoire de 1000 canadiens.

Aides au calcul : $e^{-0,2}$=0,8 ; $e^{-0,8}$=0,4

A. X suit une loi binomiale de paramètres n=1000 et p=2.10^{-5}
B. X suit une loi Bernoulli de paramètres 0,002
C. X suit une loi binomiale de paramètres n=1000 et p=0,0002
D. On peut approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre 0,2
E. La probabilité qu'il y ait un seul malade parmi notre échantillon est de 0,42

Question 17 : CD

A FAUX voir item C

B FAUX Une loi de Bernoulli modélise une expérience aléatoire qui a seulement 2 résultats possibles. Une variable aléatoire Y prenant la valeur 1 si l'individu est malades et 0 s'il ne l'est pas suit une loi de Bernoulli. Ici X =$\sum_{i=1}^{1000} Y_i$ avec les Y_i tous indépendants et de même loi de Bernoulli. Donc X→B(n;p)

NB : il s'agit d'un exemple pour comprendre la différence entre loi de Bernoulli et loi Binomiale

C VRAI il s'agit donc d'une loi binomiale de paramètre n (le nombre de répétition de l'expérience qui correspond ici au nombre de sujet de l'échantillon) et p (la prévalence, c'est-à-dire la probabilité qu'a chaque sujet d'être malade : n=1000 et p=2/10000=2.10^{-4}=0,0002

Donc X suit une loi binomiale B(1000 ; 2.10^{-4})

D VRAI les 3 conditions initiales sont remplies :
n=1000 > 50
p=0.0002 < 0.1
np =0,2 < 10
Le paramètre de la loi de Poisson est alors égal à np, soit λ=0.2
Ainsi on a P(0,2)

E FAUX On va calculer via la loi de Poisson (c'est plus simple)

P(X=k) = $\frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$

P(X=1) = $\frac{e^{-0,2}.0,2^1}{1!} = \frac{0,8.0,2}{1}$ = 0.16

On peut aussi effectuer ce calcul via la loi binomiale (si vous êtes sacrément fort en calcul mental :D → avec votre calculatrice qui est à présent autorisée !) mais c'est plus simple avec la loi de Poisson, de plus les aides au calcul orientaient sur la voie à suivre.

Question 18 :

Le syndrome du canal lombaire étroit se définit par une diminution du calibre du canal lombaire, entrainant une compression des racines nerveuses à l'origine de déficits sensitivomoteurs. Le traitement peut être médical à base d'antalgique et de repos mais peut aussi nécessiter une intervention chirurgicale : la laminectomie. On note une augmentation du nombre de laminectomies ces dernières années. A présent la laminectomie concerne 20% des patients traités pour un canal lombaire étroit. On constitue alors un échantillon de 60 personnes traitées pour un canal lombaire étroit.

Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de sujets ayant subi une laminectomie dans l'échantillon.

On admettra que : $\sqrt{9{,}6} \approx 3$ et $\sqrt{25{,}8} \approx 5$

A. Y suit une loi binomiale (60 ; 0,2).
B. On peut approximer la loi de Y par une loi normale (12 ; 3).
C. La loi normale utilisée pour approximer Y a une variance de 9.
D. La probabilité que moins de 10 personnes de notre échantillon soient traitées par laminectomie vaut 0,36, arrondi au centième.
E. La probabilité au sein de l'échantillon d'avoir entre 10 et 21 personnes traitées par laminectomie vaut 0,6926.

Question 18 : ABC

A VRAI Soit X la VA prenant la valeur 1 si la personne a subi une laminectomie et 0 sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $(\frac{1}{5})$. Y= $\sum_{i=1}^{60} X_{\text{i}}$ avec les X_{i} tous indépendants et de même loi de Bernoulli. Y suit donc une loi binomiale de paramètre n=60 et p=$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ = 0,2

B VRAI Les conditions sont respectées :

n=60 $\geq$ 30
np=12 $\geq$ 5
n(1-p)= 48 $\geq$ 5
On peut approximer la loi de Y par une loi normale de paramètre µ=np et σ=$\sqrt{n\rho q}$.
On calcule µ =np = 60 * 0,2 = 12
Et σ= $\sqrt{n\rho q}$ = $\sqrt{60 * 0{,}2 * 0{,}8}$ = $\sqrt{9{,}6}$ = 3 (on l'admet comme dit dans l'énoncé)
Ainsi approximativement Y →N(12 ; 3)

C VRAI La variance correspond au carré de l'écart-type qui vaut ici 3, donc la variance vaut 9.

D FAUX On cherche ici P(Y≤10) avec Y→N(12 ; 3). Afin de pouvoir lire la probabilité dans la table de la loi normale centrée réduite, nous allons centrer et réduire Y :
P(Y≤10) =P($\frac{Y-12}{3}$≤$\frac{10-12}{3}$)
=P(Z≤$\frac{-2}{3}$) avec Z→N(0;1)
=Φ(-0,66)
Ici z≤0 on ne peut donc pas lire la valeur dans la table. Or on sait que Φ(-z)=1-Φ(z)
Donc P(Y≤10) =1-Φ(0,66) (table 1 on a z et on cherche p)
=1-0,7454
=0,2546

E FAUX Ici on cherche à calculer P(10≤Y≤21). Comme dans l'item précédent on commence par centrer réduire (toujours dans l'optique d'utiliser la table de la loi normale centrée réduite) :

$P(10 \leq Y \leq 21) = P(\frac{10-12}{3} \leq \frac{Y-12}{3} \leq \frac{21-12)}{3}$

$= P(\frac{-2}{3} \leq Z \leq 3)$

$= \Phi(3) - \Phi(\frac{-2}{3})$ (cf diapo 42 du cours)

$= 0{,}99865 - 0{,}2546$ (lecture dans la table 1)

$= 0{,}744$

NB : Dans cet exercice on ne s'est pas préoccupé de la correction de continuité (hors programme) qu'on devrait appliquer lorsqu'on approxime une loi discrète (binomiale) par une loi continue (normale). De même nous n'avons volontairement pas imposez une inégalité stricte ou large. Voir la diapo 48 du cours pour plus d'infos.

Question 19 :

Les immunoglobulines de type G (IgG) sont les principales immunoglobulines du sérum humain. Elles ont un rôle très important dans la prévention des infections notamment grâce à leur capacité à former des complexes immuns. Les personnes présentant un déficit en IgG1 (principal type d'IgG) sont plus susceptibles de présenter une infection. Dans la population générale la prévalence de ce déficit est de 20%.

Nous notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes atteintes d'un déficit en IgG1 dans un échantillon aléatoire de 25 personnes.

Aides au calcul : $0{,}8^{25} = 3{,}8.\ 10^{-3}$; $0{,}8^{24} = 4{,}7.\ 10^{-3}$; $0{,}8^{23} = 5{,}9.\ 10^{-3}$

A. X suit une loi binomiale de paramètres n = 25 et p = 0,2.
B. X suit une loi normale de paramètres μ = 5 et σ = 2.
C. X suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ = 5.
D. La probabilité que 20 personnes soient atteintes d'un déficit en IgG1 dans notre échantillon est très faible.
E. La probabilité que strictement moins de 3 personnes soient atteintes d'un déficit en IgG1 dans notre échantillon est d'environ 0,3.

Question 19 : AD

A VRAI Il s'agit bien d'une loi binomiale, on répète n=25 épreuves de Bernoulli de paramètre p=0,2.

B FAUX Premièrement les conditions d'applications de la loi normale ne sont pas remplies,

n = 25 < 30

np = 5 ≥ 5

n(1-p) = 20 ≥ 5

Deuxièmement dans le cas où les conditions auraient été remplies on aurait dû dire : X suit approximativement une loi normale.

C FAUX Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ne sont pas remplies,

n = 25 < 50

p = 0,2 > 0,1

np = 5 < 10

On ne peut donc pas approximer notre loi binomiale ni par une loi normale ni par une loi de Poisson. Ce qui aurait pour but de simplifier grandement les calculs :D

D VRAI Il n'y a même pas besoin de poser de calcul. Pour un échantillon de 25 personnes et avec une prévalence de 20%, on s'attend à trouver en moyenne 5 personnes atteintes. Ainsi la probabilité que

20 personnes soient atteintes du déficit est vraiment très faible, cela correspondrait à 80% de l'échantillon.
Voici tout de même le calcul :
P(X=k) = $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} * p^k * (1-p)^{n-k}$
P(X=20) = $\frac{25!}{5!*20!} * 0{,}2^{20} * 0{,}8^5 = \frac{1{,}55.10^{25}}{1{,}88.10^{20}} * 10^{-14} * 3{,}28.10^{-1}$
$\approx 2{,}7.10^{-10}$
Il s'agit bien d'une probabilité très faible. Il faut toujours bien réfléchir avant de se lancer dans des calculs aussi compliqués.

E FAUX La loi binomiale est une loi discrète donc la probabilité que X soit strictement inférieur à 3 revient à additionner les probabilités que X soit égale à 0, 1 et 2.
P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)
Il faut connaitre la formule suivante : P(X=k) = $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} * p^k * (1-p)^{n-k}$
-P(X=0) = $\frac{25!}{25!} * 0{,}2^0 * 0{,}8^{25}$ = 1* 1* $3{,}8.10^{-3}$ = $3{,}8.10^{-3}$
-P(X=1) = $\frac{25!}{1!*24!}$ * $0{,}2^1$ * $0{,}8^{24}$ = 25 * 0,2 * $4{,}7.10^{-3}$ = 5 * $4{,}7.10^{-3}$ = $2{,}4.10^{-2}$
-P(X=2) = $\frac{25!}{2!*23!} * 0{,}2^2 * 0{,}8^{23} = \frac{25*24}{2} * 4.10^{-2} * 5{,}9.10^{-3}$ = 12 * $5{,}9.10^{-3}$ = $7{,}1.10^{-2}$
Ainsi P(X<3) = $3{,}8.10^{-3}$ + 24.10^{-3} + 71.10^{-3}
= $97{,}8.10^{-3}$
$\approx 0{,}1$
La probabilité que strictement moins de 3 personnes soient atteintes d'un déficit en IgG1 dans notre échantillon est d'environ 0,1. En effet même avec un certain nombre d'approximations on reste loin de 0,3.

Question 20 :

Dans la population, 25 % des individus sont porteurs sains du staphylocoque doré. De vieux documents semblent indiquer que cette proportion soit augmentée chez certaines populations notamment en Amérique du Sud. Des chercheurs souhaitent vérifier ces informations pour des études ultérieures. Pour cela ils constituent un échantillon de 400 personnes de la région d'Endor au Mexique.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de porteurs sains sur un échantillon aléatoire de 400 personnes habitant Endor.
On admettra que $\sqrt{125} \approx 11$ et $\sqrt{75} \approx 8$

A. X suit une loi de Poisson de paramètre 0,025
B. X suit une loi binomiale de paramètres n=400 et p=0,25
C. On peut approximer X par une loi normale de paramètres µ = 100 et σ = 8
D. La probabilité que plus de 132 personnes soient porteuses saines vaut 0,00003
E. La probabilité que 400 personnes soient porteuses saines est nulle.

Question 20 : BCD

A FAUX l'évènement n'est pas assez rare pour suivre une loi de Poisson. De plus, ici, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire est {0, 1, 2, …, 400}. Or, dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire est l'ensemble des entiers naturels.

B VRAI X suit bien une loi binomiale, on répète 100 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p=0,25

C VRAI Les conditions sont respectées :

$n=400 \geq 30$

$np=100 \geq 5$

$n(1-p)=300 \geq 5$

la loi de X peut bien être approximée par une loi normale de paramètre :

$\mu = np = 100$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 * 0{,}25 * 0{,}75} = \sqrt{75} \approx 8$

Donc X suit approximativement N(100 ; 8).

D VRAI On cherche $P(X \geq 132)$. On va réaliser le calcul en utilisant l'approximation par une loi normale. La première étape est de centrer et réduire la variable afin de pouvoir faire une lecture dans la table de la loi normale centrée réduite. De plus on sait que $P(X \geq 132) = 1 - P(X < 132)$, on écrit donc :

$P(X \geq 132) = 1 - P(\frac{X-100}{8} < \frac{132-100}{8})$

$= 1 - P(Z < 4)$

$= 1 - 0{,}99997$

$= 0{,}00003$

E FAUX Cette probabilité sera très faible mais elle n'est pas nulle car X suit une loi discrète.

Question 21 :

La fréquence cardiaque FC correspond au nombre de battements cardiaques par unité de temps, c'est un outil diagnostique très important en santé. Elle peut varier avec l'âge, la fatigue, le stress, la température ou l'activité physique. On s'intéresse ici à la variation de la FC entre l'effort et l'état de repos.

La FC des personnes adultes en France, mesurée en battements par minute (BPM) est modélisée par une variable aléatoire Gaussienne, dont les paramètres pendant un effort physique et au repos sont respectivement :

$\mu_e = 59{,}8 \qquad \sigma_e = 6{,}0$

$\mu_r = 71{,}0 \qquad \sigma_r = 10{,}5$

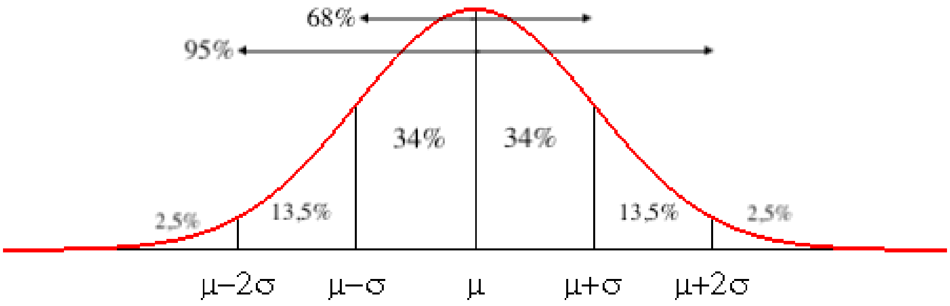
On considère un adulte au repos en tachycardie, lorsque sa FC est supérieure à 100 BPM, et en bradycardie lorsqu'elle est inférieure à 50 BPM.

A. La proportion d'adultes au repos qui ont une FC comprise entre 60,5 et 71 BPM est d'environ 38%.
B. La proportion d'adultes durant un effort qui ont une FC comprise entre 47,8 et 53,8 est d'environ 13,5%.
C. Environ 2,5% des valeurs des fréquences cardiaques au repos correspondent à une bradycardie.
D. La probabilité qu'un adulte au repos ai une FC égale à 50 BPM est de 0,9772.
E. L'espérance correspond à la médiane pour une variable aléatoire Gaussienne, ainsi on peut dire que 50% des valeurs de FC à l'effort sont supérieures à 59,8.

Question 21 : BCE

Pour ce QCM il fallait avoir en tête la courbe de Gauss, et se souvenir qu'environ 68% des valeurs sont comprises entre [μ-σ ; μ+σ] et environ 95% entre [μ-2σ ; μ+2σ].

On peut utiliser la loi normale et rechercher les valeurs dans la table mais cette technique n'est pas nécessaire et est bien plus longue pour cet exercice.



A FAUX L'intervalle [60,5 ; 71] correspond à [μ_r-σ_r ; μ_r], ainsi on peut lire sur le graphique que cet intervalle contient 34% des valeurs.

B VRAI L'intervalle [47,8 ; 53,8] correspond à [μ_e-2σ_e ; μ_e-σ_e], donc il contient 13,5% des valeurs.

C VRAI Les valeurs de FC au repos correspondant à une bradycardie sont inférieures ou égales à 50. P($FC_r \leq$ 50) = P($FC_r \leq \mu_r$-2σ_r) = 0,025 d'après le schéma.

D FAUX La variable aléatoire modélisant la fréquence cardiaque au repos est continue et Gaussienne. P(FC_r =k) = 0.

E VRAI

Question 22 :

Le cholestérol, étant un précurseur de nombreuses hormones, est un lipide essentiel à notre organisme. Cependant il existe un « mauvais cholestérol », qui correspond au LDL. Un taux élevé en LDL entraîne le dépôt de l'excès de cholestérol sur la paroi des vaisseaux et est donc lié à l'augmentation du risque cardio-vasculaire. En France, la prévalence de l'hypercholestérolémie est de 10% chez les femmes et de 13% chez les hommes. Parmi les hommes atteints d'hypercholestérolémie, 20% subissent un infarctus du myocarde.

On a un échantillon de 100 femmes (atteintes ou non d'hypercholestérolémies) et un autre échantillon de 64 hommes atteints d'hypercholestérolémie, venant de la ville de Bordeaux.

Soit X la variable aléatoire « nombre de femmes souffrant d'hypercholestérolémie dans l'échantillon de 100 femmes ».
Soit Y la variable aléatoire « proportion d'hommes qui ont eu un infarctus du myocarde parmi les hommes qui souffrent d'hypercholestérolémie ».

A. Les variables aléatoires X et Y suivent toutes deux une loi binomiale.
B. X suit une loi binomiale de paramètres p=0.1 et n=100.
C. On peut approximer la loi de X par la loi normale, N (10 ; 3).
D. Les conditions d'approximation de la loi de X par la loi normale ne sont pas vérifiées.
E. Y suit approximativement une loi normale de paramètres μ=0,2 σ=0,05.

Question 22 : BCE

A FAUX X suit bien une loi Binomiale, B(0,1 ; 100). En effet, on peut définir une variable aléatoire Z telle que
- Z=0 si la femme est atteinte d'hypercholestérolémie.

- Z=0 si la femme n'est pas atteinte d'hypercholestérolémie.
Z suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,1.
On peut alors définir X = $\sum_{i=1}^{i=100} Z_i$, où les Z_i sont toutes indépendantes et de même loi de Bernoulli.
X suit donc une loi binomiale de paramètres n=100 et p=0,1

En revanche, Y ne suit pas une loi binomiale. En effet, on peut définir une variable aléatoire W suivant une loi de Bernoulli de paramètre p=0,2, modélisant le fait de faire un infarctus. On peut alors définir la variable aléatoire Sn modélisant le nombre d'homme ayant fait un infarctus parmi les hommes qui souffrent d'hypercholestérolémie dans un échantillon de 64 hommes En suivant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on déduit que Sn suit une loi binomiale de paramètres n=64 et p=0,2. La variable Y modélise une proportion, elle peut s'écrire Sn/n. Elle ne suit pas une loi classique.
On peut aussi voir facilement que Y ne suit pas une loi binomiale : les valeurs possibles pour une variables suivant une loi binomiale sont entière. Or, les valeurs possibles pour Y sont des rationnels : 1/64, 2/64, ….

B VRAI voir A.

C VRAI Les conditions sont vérifiées : n_f≥30, $n_f p_f$≥5 et n_f(1- p_f)≥5.
On approxime donc la loi de X par la loi normale N($n_f p_f$; $\sqrt{n_f p_f q_f}$). L'espérance μ_X=0,1x100=10 et l'écart-type σ_X=$\sqrt{100 \text{x} 0{,}1 \text{x} 0{,}9}$=3

D FAUX voir C.

E VRAI Pour répondre à cette question, il faut poursuivre le raisonnement détaillé pour l'item A. On a vu que Y=Sn/n où Sn suit une loi binomiale de paramètres n=64 et p=0,2.
n_h≥30, n_hxp_h= 12,8 > 5, n_hx(1-p_h)= 51,2 > 5
Les conditions d'approximation de la loi binomiale suivie par Sn par une loi normale sont respectées.

Ses paramètres sont alors μ_Y=p_h=0,2 et σ_Y=$\sqrt{\frac{p_h q_h}{n_h}}$ = $\sqrt{\frac{0{,}2 \text{x} 0{,}8}{64}}$ = $\sqrt{\frac{0{,}16}{64}}$ = $\frac{0{,}4}{8}$ = 0,05

Question 23 :

On s'intéresse à une variable aléatoire T = -2X + Y. On connaît les espérances de X et Y qui sont respectivement μ_X = 2 et μ_Y = 8, ainsi que leurs écarts-types σ_X = 3 et σ_Y = 1.
X et Y sont deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes.

Aide au calcul : $\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$

A. L'espérance de T vaut 12.
B. P (T ≤ 13) = 0,0668
C. L'écart-type de T vaut environ 6.
D. P (4 < Y < 10) = P (Y < 10) – P (Y > 12)
E. P (X ≥ 8) = 0,9772

Question 23 : CD

On a : T = aX + bY. X et Y sont deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes donc d'après les formules du cours : T suit N (aμ_X + bμ_Y ; $\sqrt{a^2{\sigma_X}^2 + b^2{\sigma_Y}^2}$)
On peut calculer l'espérance et l'écart-type de T en considérant a = -2 et b = 1.
μ_T = -2x2 + 8 = 4

$\sigma_T = \sqrt{(-2)^2.3^2 + 1^2.1^2} = \sqrt{4x9+1} = \sqrt{37} = \sqrt{36} = 6$
Les valeurs de l'espérance et de l'écart-type de T peuvent aussi être retrouvées en utilisant les formules du cours : E(aX+bY) = aE(X) + b(E(Y) et var(aX+bY) = a^2 var(X) + b^2 var(Y) si X et Y sont indépendantes.

A FAUX Voir calcul ci-dessus.

B FAUX Pour calculer cette probabilité, on va centrer et réduire T :
P (T≤13) = P ($\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{13-\mu_T}{\sigma_T}$) = P ($\frac{T-4}{6} \leq \frac{13-4}{6}$) = P (Z≤ $\frac{9}{6}$) = P (Z≤ $\frac{3}{2}$) = P (Z≤ 1,5).
On cherche maintenant dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, la probabilité pour z = 1,5, on trouve 0,9332. Donc P (T≤ 13) = 0,9332.
Attention c'est P (T≥ 13) qui vaut 0,0668 car P(T> 13) = 1 - P(T≤ 13).
On ne se préoccupe pas du fait que les inégalités soient larges ou strictes car T suit une loi normale (P(T=13)=0)

C VRAI Voir calcul plus haut.

D VRAI On sait que P (4 < Y < 10) = P (Y < 10) – P (Y < 4) .
Or Y est une variable aléatoire Gaussienne, elle est donc symétrique par rapport à l'axe vertical passant par μ_Y. Ainsi P (Y < 4) = P (Y > 12) car les valeurs 4 et 12 sont symétriques par rapport à la droite verticale passant par μ_Y . On aura donc la même aire sous la courbe pour l'intervalle]-∞ ; μ_Y – 4] et pour l'intervalle [μ_Y + 4 ; +∞[.

E FAUX On va centrer et réduire X :
P (X≥ 8) = P ($\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \geq \frac{8-\mu_X}{\sigma_X}$) = P ($\frac{X-2}{3} \geq \frac{8-2}{3}$) = P (Z≥ $\frac{6}{3}$) = P (Z≥ 2).
Or la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, nous donne les probabilités pour P (Z≤ z).
(Z≥ 2) est l'évènement complémentaire de (Z<2), donc P (Z≥ 2) = 1 - P (Z< 2) = 1 - P (Z≤ 2) car Z suit une loi normale.
Pour z = 2, on lit la valeur de la probabilité dans la table de la fonction de répartition (Table 1). On trouve la valeur 0,9772.
Donc P (X≥ 8) = 1 – 0,9772 = 0,0228.

Question 24 :

On s'intéresse à Mme X, atteinte de diabète de type 2 depuis de nombreuses années. Cette pathologie est souvent associée à une rétinopathie, alors appelée rétinopathie diabétique. Cela s'explique par l'excès de sucre qui fragilise les capillaires des vaisseaux rétiniens. Chez les patients atteints de diabète de type 2, la prévalence du développement d'une rétinopathie est de 30%.

Soit X une variable aléatoire modélisant l'atteinte de Mme X par la rétinopathie diabétique.
Soit Y une variable aléatoire modélisant le nombre de patients atteints de rétinopathie diabétique dans un échantillon de 60 patients diabétiques de type 2.

A. Y suit une loi binomiale B (60, 0,3).
B. Les lois suivies par X et Y sont des lois continues.
C. Les conditions d'approximation de la loi de X par la loi normale sont vérifiées.
D. La probabilité de n'avoir aucun patient atteint de rétinopathie diabétique dans notre échantillon est P (Y=0) = $0{,}7^{60}$.
E. Y peut être approximé par la loi de Poisson avec comme paramètre λ = 18.

Question 24 : AD

X suit une loi de Bernoulli car il y a 2 issues possibles, X ne peut prendre que 2 valeurs : 0 (Mme X n'est pas atteinte) ou 1 (Mme X est atteinte). Son paramètre est p = 0,3, qui correspond à la probabilité d'être atteint de rétinopathie.
Y suit une loi binomiale car cette variable aléatoire modélise le nombre de patients atteints de rétinopathie dans un échantillon. Ainsi on a une répétition de n épreuves de Bernoulli, avec n = 60 (nombre de patients diabétiques).

A VRAI On a vu que Y suit une loi binomiale. Ses paramètres sont n = 60, le nombre de patients de l'échantillon, et p = 0,3, la probabilité qu'un patient soit atteint de rétinopathie.

B FAUX Les lois suivies par X et Y sont respectivement la loi de Bernoulli et la loi binomiale, or ces deux lois sont des lois discrètes.

C FAUX La loi suivie par X est la loi de Bernoulli. X n'a que 2 valeurs possibles, il n'est pas du tout possible d'approximer une loi de Bernoulli par une loi normale.

D VRAI On utilise la formule de la loi binomiale : P(Y=k) = C_n^k x p^k x $(1-p)^{n-k}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
On commence par calculer $C_{60}^0 = \frac{60!}{0!(60-0)!} = \frac{60!}{1 \text{ x } 60!} = 1$
On pouvait aussi savoir, pour aller plus vite, que dans tous cas si k=0, on aura C_n^k = 1.
Ainsi on a : P (Y=0) = 1 x $0,3^0$ x $(1-0,3)^{60-0}$ = 1 x 1 x $(0,7)^{60}$ = $(0,7)^{60}$
E FAUX On vérifie les conditions d'approximation de loi binomiale par la loi de Poisson, qui sont n>50, p≤0,1 et np<10. On a bien n=60>50, cependant p=0,3>0,1 et np=18>10. Les conditions ne sont pas vérifiées, on ne peut pas approximer la loi de Y par la loi de Poisson.

Question 25 :

Le virus de l'hépatite B (VHB) est un gros problème de santé publique. Une infection par ce virus peut causer chez le sujet atteint une hépatite aigue, chronique et dans de rares cas, fulminante. L'hépatite fulminante est une urgence et nécessite une transplantation hépatique. En France on estime qu'environ 0,1% des infections par le VHB provoquent une hépatite fulminante chez le patient.
Notons Z la variable aléatoire qui représente le nombre de cas d'hépatites fulminantes détectés sur un échantillon de 2000 patients infectés par le VHB.

Aides aux calculs : $\sqrt{1,998} \approx \sqrt{2}$ $\quad e^{-4} = 0,02$ $\quad e^{-2} = 0,14$

A. Z peut être approximée par une loi normale de paramètres μ = 2 et σ = $\sqrt{2}$.
B. Z peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre λ = 0,2.
C. Dans la loi de Poisson la variance est égale à 2 fois l'espérance.
D. La variance est ici égale à 0,4.
E. La probabilité d'observer seulement 1 cas d'hépatite fulminante est de 28%.

Question 25 : E

Notre variable Z suit une loi binomiale, on répète n=2000 épreuves de Bernoulli de paramètre p=0,001 (attention 0,1%).

A FAUX Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale ne sont pas respectées. Pour rappel il y a 3 conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. Or ici $np = 2.10^3.1.10^{-3} = 2$. On ne peut donc pas utiliser la loi normale.

B FAUX Les conditions d'approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson sont en revanche bien remplies. Il y a là aussi 3 conditions : $n > 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 10$. Le paramètre λ correspond alors à $\lambda = np = 2.10^3 .1.10^{-3} = 2$.

C FAUX Dans la loi de Poisson l'espérance et la variance sont égales. On a :

$$E(Z) = \lambda$$
$$var(Z) = \lambda$$
$$\sigma_Z = \sqrt{\lambda}$$

D FAUX Comme dit précédemment $var(Z) = \lambda$. Donc la variance est égale à 2.

E VRAI Pour calculer cette probabilité on peut utiliser l'approximation par la loi de Poisson que l'on va détailler ici mais il est tout à fait possible d'utiliser la loi binomiale (Il est souvent plus rapide et facile d'utiliser les approximations par la loi de Poisson ou par la loi normale lors des calculs).
La probabilité d'observer un cas d'hépatite fulminante dans l'échantillon vaut :

$$P\ (Z = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

$$P\ (Z = 1) = \frac{e^{-2}.2^1}{1!} = \frac{0{,}14\,.\,2}{1} = 0{,}28$$

Question 26 - Bigleux :

L'astigmatisme est un défaut de la vision qui nécessite une correction de la vue.
En France, on estime sa prévalence à 1 français sur 4.
On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de personnes astigmates sur les 2000 PACES de LE.
Aides aux calculs : $375 \approx 400 \quad 850 \approx 900 \quad 93{,}75 \approx 100$

A. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètres p=0,25
B. On peut approximer X par une loi normale de paramètres $\mu = 500\ et\ \sigma = 20$
C. On observe en moyenne sur tous les P1 de LE 500 astigmates.

Pour les items D et E, on s'intéresse aux 500 P1 de l'amphi A :

D. la probabilité d'avoir au moins 100 personnes astigmates vaut $1 - P(Z \leq 20)$ soit est inférieure à 2.10^{-5}
E. La probabilité qu'il y ait entre 100 et 150 P1 astigmates vaut environ 98,8%

Question 26 : BCE

A FAUX ARCHI FAUX, c'est un classique pour que vous fassiez la différence entre la loi de Bernoulli et la loi binomiale.
X suit une loi binomiale de paramètres n=2000 et p=0,25 car X correspond à n=2000 fois la répétition d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle un succès correspond à l'évènement « la personne est astigmate », de probabilité p=0,25.

B VRAI X suit une loi binomiale de paramètres n=2000 et p=0,25.
Vérifions les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale.
$n \geq 30\,; np \geq 5\ et\ n(1-p) = nq \geq 5$
Ici : $n = 2000 \geq 30$;
$np = 2000 * 0{,}25 = 500 \geq 5$;
$n(1-p) = nq = 2000 * 0{,}75 = 1500 \geq 5$

Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale sont bien respectées donc : on peut faire l'approximation que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500\ et\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 * 0{,}75} = \sqrt{375} \approx \sqrt{400} \approx 20$

C VRAI Il y a n=2000 personnes dans l'échantillon de P1 de LE. La prévalence de l'astigmatisme est p=0,25.
On cherche la moyenne du nombre de personnes astigmates dans cet échantillon, soit l'espérance E(X).
L'espérance d'une loi binomiale vaut $E(X) = np = 2000 * 0{,}25 = 500$
Il y a donc en moyenne sur les 2000 P1 de LE, 500 astigmates.

D FAUX Ici, on considère le cas de l'amphi A (beeest), pour lequel n=500.
Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de personnes astigmates sur les 500 PACES de l'amphi A. Y suit une loi binomiale de paramètres n=500, p=0,25.
On cherche $P(Y \geq 100)$
Pour répondre à cette question, le plus simple est d'approximer la variable aléatoire Y par la loi normale, si c'est possible.

Vérifions donc les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale.
$n \geq 30\ ;\ np \geq 5\ et\ n(1-p) = nq \geq 5$
Ici : $n = 500 \geq 30$;
$np = 500 * 0{,}25 = 125 \geq 5$;
$n(1-p) = nq = 500 * 0{,}75 = 375 \geq 5$
Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale sont bien respectées donc : on peut faire l'approximation que Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 125\ et\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{125 * 0{,}75} = \sqrt{93{,}75} \approx \sqrt{100} \approx 10$

On cherche maintenant $P(Y \geq 100)$ car on veut AU MOINS 100 P1 de l'amphi A astigmates.
$P(Y \geq 100) = 1 - P(Y < 100) = 1 - P(Y \leq 100)$ → on fait ici une approximation de la loi de Y par une loi continue.
On passe par la loi normale centrée réduite pour lire dans la table

$$\begin{aligned} P(Y \geq 100) &= 1 - P(Y \leq 100) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{100 - 125}{10}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{-25}{10}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq -2{,}5) \\ &= 1 - P(Z \geq 2{,}5) \\ &= 1 - [1 - P(Z \leq 2{,}5)] \\ &= P(Z \leq 2{,}5) \\ &= 0{,}9938 \end{aligned}$$

Donc environ la probabilité d'avoir AU MOINS 100 P1 astigmates dans l'amphi A (=la proba d'avoir plus de 100 P1 astigmates dans l'amphi A) vaut environ 99%.

NB : le résultat proposé était celui trouvé si on considérait n= 2000 personnes et qu'on utilisait les paramètres de la loi normale trouvées en B.

E VRAI On réutilise l'approximation de la question D : Y suit **approximativement** une loi normale de paramètres $\mu = 125\ et\ \sigma \approx 10$

On cherche $P(100 \leq Y \leq 150)$:

$$
\begin{aligned}
P(100 \le Y \le 150) &= P(Y \le 150) - P(Y \le 100)\\
&= P\left(Z \le \frac{150-125}{10}\right) - P\left(Z \le \frac{100-125}{10}\right)\\
&= P(Z \le 2{,}5) - P(Z \le -2{,}5)\\
&= P(Z \le 2{,}5) - P(Z \ge 2{,}5)\\
&= P(Z \le 2{,}5) - [1 - P(Z \le 2{,}5)]\\
&= P(Z \le 2{,}5) - 1 + P(Z \le 2{,}5)\\
&= 2.P(Z \le 2{,}5) - 1\\
&= 2.0{,}9938 - 1\\
&= 0{,}9876 \approx 98{,}8\%
\end{aligned}
$$

Donc la proba qu'il y ait entre 100 et 150 P1 astigmates vaut environ 98,8%.

Question 27 – La maladie du baiser :

On s'intéresse à la mononucléose, maladie du baiser pour les intimes.

La présence d'anticorps Ig anti-EBNA (UI/L) dans le sang détermine le stade de la maladie : Mononucléose en cours (MNI_C) / Mononucléose ancienne (MNI_A)

Le taux de ces anticorps Ig anti-EBNA suit une distribution Gaussienne dont les paramètres dépendent du stade de la maladie :

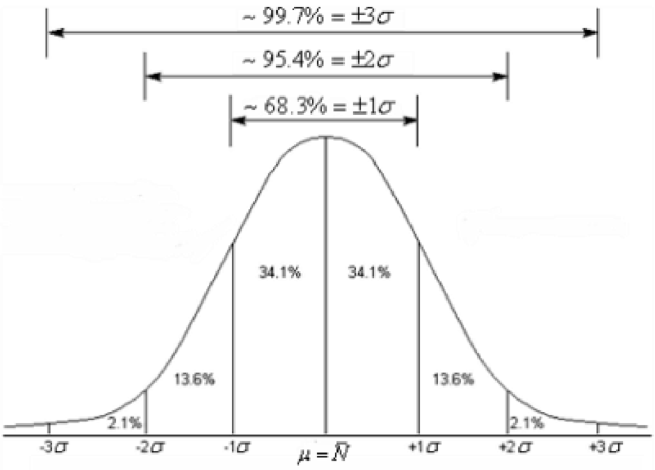
- MNI_C $\mu_C = 10$; $\sigma_C = 2$
- MNI_A $\mu_A = 300$; $\sigma_A = 20$

A. 50% des malades MNI_C ont un taux d'Ig anti-EBNA supérieur à 10 UI/L.
B. Environ 34% des malades MNI_A ont un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 300 et 320 UI/L.
C. Moins de 10% des malades MNI_A ont un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 320 et 340 UI/L.
D. La valeur d'Ig anti-EBNA dépassée par seulement 7% des malades MNI_A est inférieure à 330 UI/L
E. Il y a autant de cas de MNI_C avec un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 8 et 14 UI/L que de cas avec un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 6 et 12 UI/L.

Question 27 : ABDE

Mot important de l'énoncé : distribution Gaussienne = comme la Loi Normale

Pour ce QCM, 2 méthodes de résolution sont possibles : en s'aidant du graphique et des propriétés de la loi normale ou par le calcul.



A VRAI Chez les patients MNI_C, $\mu_C = 10$; $\sigma_C = 2$. Or la moyenne μ_C est aussi, du fait de la symétrie de la loi normale la médiane. Elle partage donc l'échantillon en 2 sous-groupes de même effectif.

Ainsi 50% des patients MNI_C ont un taux d'Ig anti-EBNA supérieur à 10 UI/L et 50% ont un taux d'Ig anti-EBNA inférieur à 10 UI/L.

B VRAI On est chez les patients $MNI_{A.}$
L'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ (ici [280-320]) comporte 68% des valeurs. Or comme la courbe est symétrique l'intervalle $[\mu;\ \mu+\sigma]$, (ici [300-320]) comportera 68/2=34% des valeurs.
Par le cacul, on centre et on réduit :
Soit Y la VA qui compte le taux d'Ig anti-EBNA chez les patients MNI_A

$$P(300\leq Y\leq 320)=P\left(\frac{300-300}{20}\leq Z\leq\frac{320-300}{20}\right)=P(0\leq Z\leq 1)=P(Z\leq 1)-P(Z\leq 0)$$
$$=\mathbf{0,8413-0,5=0,3413}\ \approx\mathbf{34\%}$$

C FAUX On est chez les patients $MNI_{A.}$
L'intervalle $[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$ (ici [260-340]) comporte 95% des valeurs. Or
L'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ (ici [280-320]) comporte 68% des valeurs.
Par soustraction, l'intervalle $[\mu+\sigma;\ \mu+2\sigma]$, (ici [320-340]) comportera (95%-68%)/2 =13,5% des valeurs.
Donc 13,5%>10%, plus de 10% des malades MNI_A ont un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 320 et 340 UI/L.
Par le calcul, on centre et on réduit :
Soit X la VA qui compte le taux d'Ig anti-EBNA chez les patients MNI_A

$$P(320\leq X\leq 340)=P\left(\frac{320-300}{20}\leq Z\leq\frac{340-300}{20}\right)=P(1\leq Z\leq 2)=P(Z\leq 2)-P(Z\leq 1)$$
$$=0{,}9772-0{,}8413=0{,}1359\ \geq 0{,}1$$

D VRAI On est dans le cas où $P(Z\geq z)=x$ chez les patients MNI_A. On connaît $x=0{,}07$
On cherche le petit z qui vérifie cette condition, soit quel est le **taux t** d'Ig anti-EBNA dépassé par 7% des malades MNI_A.
Soit X la VA qui compte le taux d'Ig anti-EBNA chez les patients MNI_A

$$P(X\geq t)=0{,}07$$
$$P\left(\frac{X-300}{20}\geq\frac{t-300}{20}\right)=0{,}07$$
$$P\left(Z\geq\frac{t-300}{20}\right)=0{,}07$$

Ainsi on a

$$z=\left(\frac{t-300}{20}\right)$$

$t=z*20+300$ avec z à lire dans la table pour p=0,07 → z=1,4758

$$t=1{,}4758*20+300=329{,}5$$

Donc la valeur 329,5 UI/L est dépassée par 7% des malades MNI_A.

E VRAI On est chez les patients $MNI_{C.}$
Avec les propriétés de la courbe :
L'intervalle $[\mu-2;\mu+\sigma]$ (ici [8-12]) comporte 68% des valeurs. Donc l'intervalle $[\mu-\sigma;\mu]$ (ici [8-10]) comporte 34% des valeurs.
L'intervalle $[\mu-2\sigma;\mu+\sigma 2]$ (ici [6-14]) comporte 95% des valeurs. Donc l'intervalle $[\mu;\mu+2\sigma]$ (ici [10-14]) comporte 47,5% des valeurs.
Par addition, l'intervalle $[\mu-\sigma;\ \mu+2\sigma]$, (ici [8-14]) comportera 47,5%+34% =81,5% des valeurs.

De même,
L'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ (ici [6-14]) comporte 95% des valeurs. Donc l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu]$ (ici [6-10]) comporte 47,5% des valeurs.
L'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ (ici [8-12]) comporte 68% des valeurs. Donc l'intervalle $[\mu ; \mu + \sigma]$ (ici [10-12]) comporte 34% des valeurs.
Par addition, l'intervalle $[\mu - 2\sigma ;\ \mu + \sigma]$, (ici [6-12]) comportera 47,5%+34% =81,5% des valeurs.

Il y a autant de cas de MNI$_C$ avec un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 8 et 14 UI/L que de cas avec un taux d'Ig anti-EBNA compris entre 6 et 12 UI/L.
Par le calcul, on centre et on réduit :
Soit Y la VA qui compte le taux d'Ig anti-EBNA chez les patients MNI$_C$

$$P(8 \leq Y \leq 14) = P\left(\frac{8-10}{2} \leq Z \leq \frac{14-10}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2)$$
$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = 0{,}9772 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}8185$$
$$P(6 \leq Y \leq 12) = P\left(\frac{6-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1)$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}8185$$

Question 28 :

En France, la prévalence du papillomavirus chez les jeunes femmes est de 0,01. On considère un échantillon de 400 jeunes filles. Soit X la variable aléatoire qui modélise le nombre de jeunes filles qui sont infectées par le papillomavirus.
Aides aux calculs : $e^{-4} \approx 0{,}02$ $\qquad e^{-1} \approx 0{,}4$

A. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètres n=400 et p=0,01.
B. On peut approximer X par une loi normale de paramètres $\mu = 4\ et\ \sigma = \sqrt{4 * 0{,}99} \approx \sqrt{4}$.
C. On peut approximer X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 40$.
D. La probabilité d'observer un seul cas vaut 0,1.
E. On ne peut pas calculer la probabilité d'observer un seul cas car la variable aléatoire X suit une loi continue donc $P(X = k) = 0$.

Question 28 : RIEN (attention il n'est plus possible d'avoir aucun item juste sur sides)

A FAUX ARCHI FAUX, c'est un classique pour que vous fassiez la différence entre la loi de Bernoulli et la loi binomiale.
X suit une loi binomiale de paramètres n=400 et p=0,01 car X correspond à n=400 fois la répétition d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle un succès correspond à l'évènement « la jeune fille est infectée par le papillomavirus », de probabilité p=0,01.

B FAUX X suit une loi binomiale de paramètres n=400 et p=0,01.
Vérifions les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale.
$n \geq 30$; $np \geq 5\ et\ n(1-p) = nq \geq 5$
Ici : $n = 400 \geq 30$;
$np = 400 * 0{,}01 = 4 < 5$;
Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi normale NE sont PAS respectées donc on NE peut PAS faire l'approximation de la loi de X par une loi normale.

C FAUX X suit une loi binomiale de paramètres n=400 et p=0,01.

Vérifions les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
$n \geq 50$; $p \leq 0{,}1$ et $np < 10$
Ici : $n = 400 \geq 50$;
$p = 0{,}01 \leq 0{,}1$
$np = 400 * 0{,}01 = 4 < 10$;
Les conditions d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson sont respectées donc on peut faire l'approximation de X par une loi de Poisson, de paramètre $\lambda = np = 4$

D FAUX On utilise la loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(X = 1) = \frac{4^1 * e^{-4}}{1!} = 4 * 0{,}02 = 0{,}08$$

NB j'avais mis ce calcul pour celles & ceux qui ont confondu les k et λ dans la formule.

Vous pouvez encore le faire avec le calcul via la loi binomiale !

E FAUX La variable aléatoire X suit une loi binomiale qui est une loi DISCRETE donc $P(X = k) \neq 0$

Question 29 - Variables aléatoires, vous les fumez :

D'après la fédération française de cardiologie, la consommation quotidienne de cigarettes chez les jeunes de 18-19 ans est inquiétante.
Soit X la variable aléatoire qui modélise la consommation quotidienne de cigarettes d'une fille quelconque de 18-19 ans et Y la variable aléatoire qui modélise la consommation quotidienne de cigarettes d'un garçon quelconque de 18-19 ans.
Les variables aléatoires X et Y suivent des lois gaussiennes de paramètres respectifs : $\mu_X = 10$; $\sigma_X = 1$ et $\mu_Y = 12$; $\sigma_Y = 2$
Soit W la variable aléatoire qui modélise la consommation quotidienne de cigarettes d'un jeune, quelque soit son sexe, de 18-19 ans.
On suppose qu'il y a autant de filles que de garçons dans cette classe d'âge et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Aides aux calculs : $\sqrt{5} \approx 2$

A. La variable aléatoire W suit une loi Gaussienne de paramètres $\mu_W = 11$; $\sigma_W = 1{,}5$
B. La probabilité qu'un jeune tiré au sort consomme moins de 8 cigarettes par jour est inférieure à $2 * 10^{-3}$
C. La probabilité qu'un jeune tiré au sort consomme plus de 13 cigarettes par jour vaut 0,0228
D. Plus des 5/8 des jeunes consomment entre 9 et 12 cigarettes par jour
E. La probabilité qu'un jeune tiré au sort consomme 11 cigarettes par jour vaut 0,5

Question 29 : BCD

A FAUX On utilise la formule du cours :

Combinaison linéaire de va Gaussiennes indépendantes

Soient $X_1 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$

$$\boxed{Y = aX_1 + bX_2 \rightarrow \mathcal{N}\left(a\mu_1 + b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)}$$

La VA W est nb cigarettes consommées par une fille*P(fille) + nb cigarettes consommées par un garçon*P(garçon).
Or il y a autant de filles que de garçons dans l'échantillon.
Donc on peut écrire la combinaison linéaire en fonction de X et Y : $W = 0{,}5X + 0{,}5Y$ avec X et Y indépendantes (pas de notion de covariance).
W suit une loi gaussienne de paramètres $\mu_W = 0{,}5\mu_X + 0{,}5\mu_Y = 0{,}5 * 10 + 0{,}5 * 12 = 11$

$$\sigma_W = \sqrt{0{,}5 * 0{,}5 * \sigma_X * \sigma_X + 0{,}5 * 0{,}5 * \sigma_Y * \sigma_Y} = \sqrt{0{,}25 * 1 + 0{,}25 * 4} = \sqrt{\frac{5}{4}} \approx \frac{2}{2} \approx 1$$

NB : on trouvait $\sigma_W = 1{,}5$ si on faisait simplement la moyenne des deux sigmas.

B VRAI On cherche $P(W < 8)$
$P(W < 8) = P(Z < \frac{8-11}{1})$ on centre et on réduit
$= P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135 < 2 * 10^{-3}$
La probabilité qu'un jeune tiré au sort consomme moins de 8 cigarettes par jour est inférieure à $2 * 10^{-3}$

C VRAI On cherche $P(W > 13)$
$P(W > 13) = P(Z > \frac{13-11}{1})$ on centre et on réduit
$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$
La probabilité qu'un jeune tiré au sort consomme plus de 13 cigarettes par jour vaut 0,0228

D VRAI On cherche $P(9 < W < 12)$
$P(9 < W < 12) = P(\frac{9-11}{1} < Z < \frac{12-11}{1})$ on centre et on réduit
$= P(-2 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 2)]$
$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}8185$
Or, 5/8 = 0,625 et 0,8185 > 0,635 donc plus des 5/8 des jeunes consomment entre 9 et 12 cigarettes par jour.

E FAUX ARCHI FAAAAAAAUX !!! Ici, on cherche $P(W = 8)$, or W suit une loi gaussienne qui est une loi CONTINUE donc P(W = k) = 0 (car la loi a une infinité de valeurs possibles donc la probabilité de tomber sur une valeur précise est extrêmement faible, quasi nulle).

Question 30 – La simplicité comme on aime !!!! :

Le Centre international de Recherche sur le Cancer (CIRC) a classé le tabagisme comme cancérogène pour le développement des adénocarcinomes pulmonaires. Le nombre de cigarettes fumées par jour pour une femme suit approximativement une loi normale de moyenne égale à 16 *cig.j*$^{-1}$ et d'écart-type égal à 7 *cig.j*$^{-1}$. Au-delà de 20 *cig.j*$^{-1}$, la cigarette devient un facteur de risque conséquent pour le développement d'adénocarcinome. On note X la variable aléatoire modélisant le nombre de cigarettes fumées par jour pour une femme. De plus, dans un échantillon de 2500 femmes qui fument, on modélisera la proportion de femmes à risque élevé d'adénocarcinome par la variable aléatoire Y.

Aides aux calculs : $1{,}372^2 \approx 1{,}4$; $9{,}8 \approx 10$; $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$; $0{,}28 \times 0{,}72 \approx \frac{1}{5}$; $\frac{690}{\sqrt{500}} \approx 30{,}86$

A. Pour faire partie des 8,5% de femmes qui fument le moins, il faut fumer moins de 26 cigarettes par jour.
B. La variable aléatoire X suit une loi Binomiale.
C. La probabilité d'être une femme à risque élevé d'adénocarcinome est environ 28%.
D. On peut approximer la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres

$\mu_Y = 0{,}28 \; et \; \sigma_Y = \sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{2500}}$

E. La probabilité d'avoir plus de 10 femmes à risque est supérieur à 0,99998.

<u>Question 30 – La simplicité comme on aime !!!! :</u> CDE

Ce sont des valeurs fictives choisies pour l'exercice, en réalité, la HAS donne une moyenne 12,3 cigarettes fumées par jour par les femmes en 2010. De même, la cigarette est un facteur de risque pour le développement d'adénocarcinome avant 20 cigarettes par jour.

A FAUX

- **1ère méthode :** On cherche $\boldsymbol{P(X < t) = 0,085}$.

La table nous donne des valeurs telles que P(Z>z)=p. On va donc chercher la valeur de :

$$\boldsymbol{P(X \geq t) = 0,085 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{t-16}{7}\right) = 0,085}$$

Soit $\boldsymbol{z = \frac{t-16}{7} = 1,3722 \approx 1,4 \Leftrightarrow t = z \times 7 + 16}$ avec z lu dans la table 2 :

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106

D'où $\boldsymbol{t = 1,4 \times 7 + 16}$ *(NB : attention ici, au niveau des aides aux calculs :* $\boldsymbol{1,4 \times 7 = 9,8}$ *et on indiquait que 9,8 ≈10*). Donc $\boldsymbol{t = 26}$

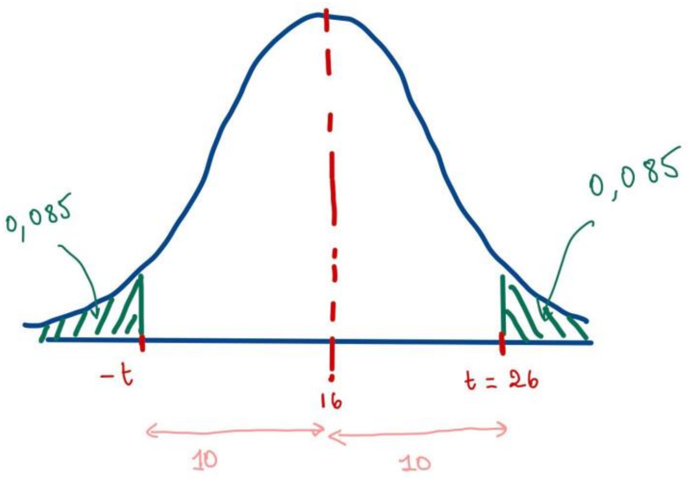
Il faut faire attention on utilise la table où à partir d'un p on cherche un z et cette table donne des valeurs uniquement pour $\boldsymbol{P(X \geq z) = p}$.

/ ! / il est impératif de bien savoir lire dans les différentes tables.

Or, on cherche $\boldsymbol{P(X < t) = 0,085}$, donc par symétrie en admettant 16 en moyenne, on a :

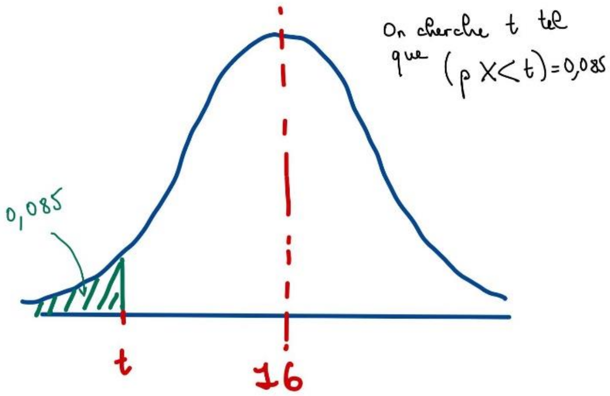
$\boldsymbol{26 - 10 = 16}$ et $\boldsymbol{16 - 10 = 6}$

Voici un schéma pour vous aider à visualiser :



Ainsi, la limite pour faire partie des 8,5% de femmes dont le nombre de cigarettes fumées par jour est le moins important vaut environ 6 *cig.j*$^{-1}$ et non 26 *cig.j*$^{-1}$ comme l'item l'indiquait.

- **2ème méthode : Résolution avec le schéma**



On voit bien que pour que la zone hachurée ait une aire de 0,085, t est forcément à gauche de la moyenne (la loi normale est symétrique, la moyenne est égale à la médiane donc P(X<16)= 0,5). *t* est donc forcément inférieur à 16, il n'y a pas besoin de faire le calcul pour voir que cela ne peut pas être égal à 26.

B FAUX Une variable qui suit une loi binomiale a un nombre fini de valeurs possibles. Ici, la liste des valeurs possibles n'est pas bornée, c'est l'ensemble des entiers naturels. De plus, on nous dit clairement dans l'énoncé que la variable suit une loi normale.

C VRAI Être une femme à risque élevé d'adénocarcinome revient à dire que l'on fume plus de 20 cigarettes par jour. On va donc chercher la probabilité de fumer plus de 20 cigarettes par jour :
$\boldsymbol{P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20)}$. (On a besoin de faire ça car la table nous donne des valeurs pour P(Z < z).)

$$\boldsymbol{P(X \geq 20) = 1 - P\left(X < \frac{20-16}{7}\right)}$$
$$\boldsymbol{P(X \geq 20) = 1 - P\left(X < \frac{4}{7}\right) = 1 - 0,7157}$$
$$\boldsymbol{P(X \geq 20) = 0,2843}$$

D VRAI La variable aléatoire Y compte la PROPORTION de femmes à risque ayant une consommation de 20 cigarettes par jour.

On peut définir une variable aléatoire W suivant une loi de Bernoulli de paramètre p = 0,28, modélisant, pour une femme, le fait qu'elle soit à risque de développement d'adénocarcinome ou non. Ensuite, on peut définir la variable aléatoire *Sn* modélisant le nombre de femmes à risque dans un échantillon de 2500 femmes qui fument.

Sn suit une loi binomiale de paramètres n = 2500 et p = 0,28.
Notre variable aléatoire Y modélisant une proportion dans un échantillon de 2500 femmes, s'écrit donc $\boldsymbol{\frac{Sn}{n}}$. Y ne suit pas une loi classique, cependant, dans certaines conditions, on pourra approximer la loi de Sn par une loi normale (et donc approximer la loi de Sn/n par une loi normale).
Les conditions d'applications pour approximer une loi binomiale par la loi normale sont : n > 30 ; np $\geq$5 ; nq $\geq$5.
n = 2500 > 30
np = 2500*0,28 = 700 > 5
nq = 2500*0,72 = 1800 > 5

Donc on peut dire que la variable aléatoire Y suit approximativement une loi normale de paramètres : $\mu_Y = \boldsymbol{p} = \mathbf{0,28}$ **et** $\sigma_Y = \sqrt{\frac{p*q}{n}} = \sqrt{\frac{0,28*0,72}{2500}}$

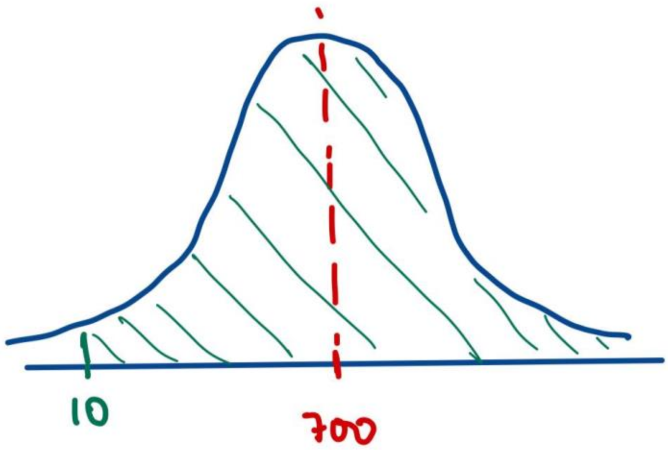
E VRAI On cherche $\boldsymbol{P(Sn > 10) = 1 - P(\ Sn \leq 10\ )}$
On utilise ici l'approximation normale (Cf. item D)

$$\boldsymbol{Sn \rightarrow N\left(np; \sqrt{npq}\right)}$$

Avec

$$\boldsymbol{np = 2500 \times 0,28 = 700}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{npq} = \sqrt{2500\ \times 0,28 \times 0,72} \approx \sqrt{500}}$$

Voici un petit schéma pour vous aider :



P (Sn>10) correspond à la zone hachurée. Sans faire de calcul, on voit que cette probabilité est très grande (largement supérieure à 0,5), donc l'item est **faux**.

- **2ème méthode** : avec le calcul

$$\boldsymbol{P(Sn > 10) = P\left(\frac{Sn - 700}{\sqrt{500}} > \frac{10 - 700}{\sqrt{500}}\right)}$$
$$\boldsymbol{P(Sn > 10) = P\left(Z > \frac{-690}{\sqrt{500}}\right) = P(Z > -30,86)}$$
$$\boldsymbol{1 - P(Z < -30,86) = 1 - \Phi(30,86) = 1 - \left(1 - \Phi(30,86)\right) = \Phi(30,86)}$$

$\boldsymbol{\Phi(30,86)}$ est supérieure à la plus grande valeur de la table 1.
Donc P(Sn>10) > 0,99998.

<u>Question 31 – Ô Variables ! :</u>

Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, d'espérances respectives $\mu_X = 12$ et $\mu_Y = 10$, et de variance respectives $var(X) = 1$ et $var(Y) = 10$.
On définit la variable : $Z = -2Y + 3X$
<u>Aide au calcul :</u> $1{,}96 \approx 2$

A. L'espérance de Z vaut 2.
B. La variance de Z vaut 7.
C. $P(11 \leq X \leq 14) \approx 0{,}11$.
D. Si $cov(X, Y) = 0$, A et B sont deux variables indépendantes.
E. L'intervalle de fluctuation au risque $\alpha = 5\%$ de X est [10 ;14].

Question 31 – Ô Variables ! : E

A FAUX Ici, Z est une combinaison linéaire de 2 variables aléatoires gaussiennes.

On vous remet la formule du cours :

$$Y = aX_1 + bX_2 \to N\left(a\mu_1 + b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)$$

Ici on a :

$$a = 3 \; et \; b = -2$$

On applique la formule :

$$\mu_Z = a\mu_X + b\mu_Y = 3 \times 12 + (-2) \times 10 = 36 - 20$$
$$\mu_Z = 16$$

B FAUX On cherche la variance de Z.

Soit :

$$var(Z) = \sigma_Z{}^2$$

Avec : $\sigma_Z = \sqrt{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2} = \sqrt{3^2 \times 1 + (-2)^2 \times 10} = \sqrt{9 + 40} = \sqrt{49} = 7$

Donc : $\sigma_Z{}^2 = 7^2 = 49$

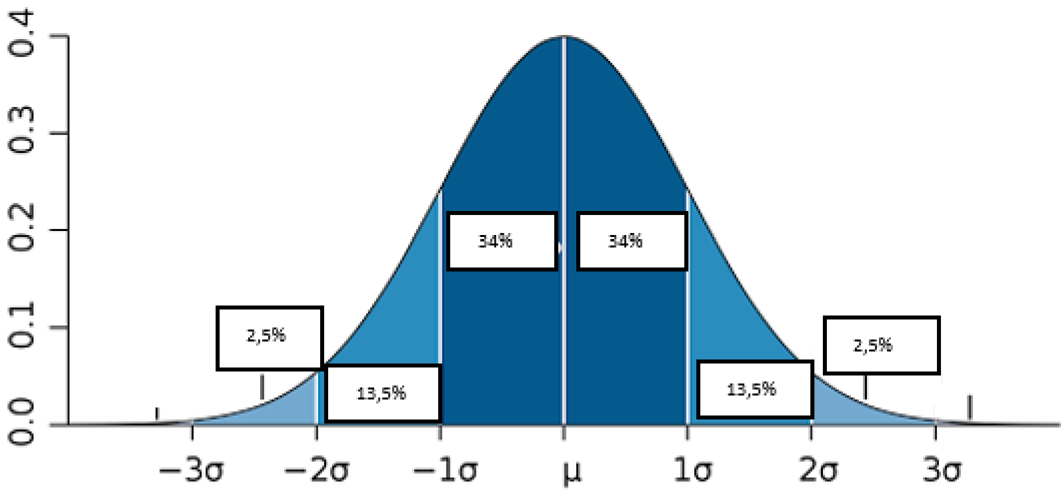
Une deuxième technique est possible :

$$var(aX + bY) = a^2 \times var(X) + b^2 \times var(Y)$$

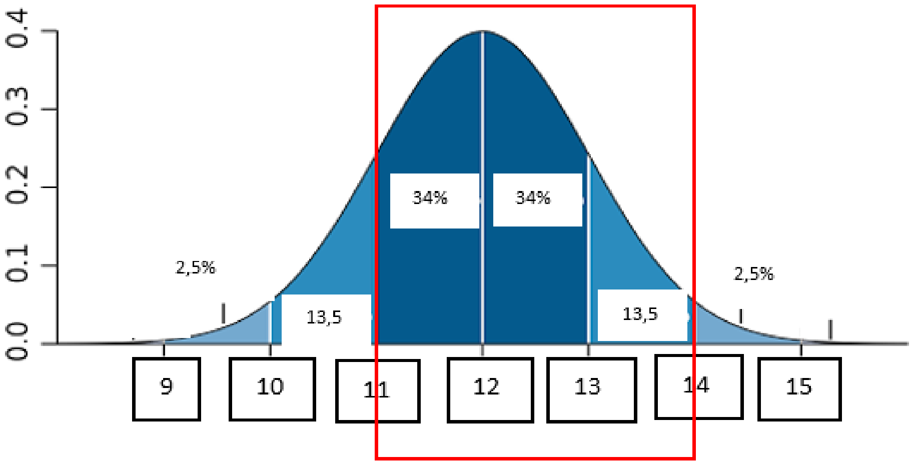
Ici, a = 3 et b = -2, donc :

$$var(Z) = 3^2 \times 1 + (-2)^2 \times 10$$
$$var(Z) = 9 + 40$$
$$var(Z) = 49$$

C FAUX Pour aller plus vite, on peut résoudre cette question en utilisant le graphique ci-dessous.



On remplace avec nos valeurs :



On s'intéresse à la zone encadrée en rouge. De ce fait, on peut dire que :

$$P(11 \leq X \leq 14) \approx 0{,}34 + 0{,}34 + 0{,}135 \approx 0{,}815$$

Bien évidemment, vous pouvez poser le calcul avec la formule,

$$P(11 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 11)$$

Mais vous perdrez plus de temps ! Il faut en effet centrer et réduire la variable aléatoire X, on appellera la nouvelle variable (centrée réduite) W.

$$W = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 12}{1} = X - 12$$

Ainsi, $P(X \leq 14) - P(X \leq 11) = P(W \leq 2) - P(W \leq -1)$

On n'a pas accès à P(W< -1) dans la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, mais par symétrie, on a P(W< -1) = P(W>1) = 1 – P(W<1).

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une valeur de z donnée, la table donne la probabilité $P(Z \leqslant z)$.

Exemple d'utilisation de la table

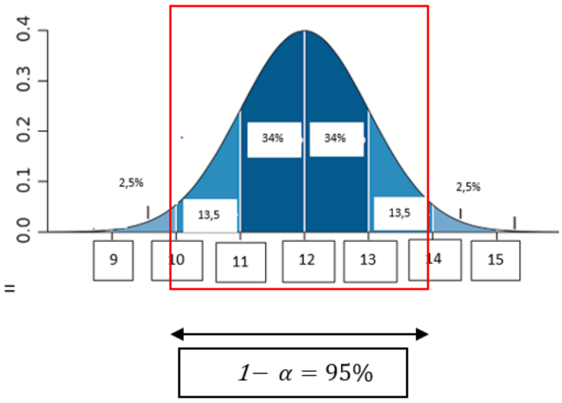
Considérons $z = 1{,}55$: la probabilité $P(Z \leqslant 1{,}55) = 0{,}9394$ est lue à l'intersection de la ligne « 1,5 » et de la colonne « 0,05 ».

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0.7580	0.7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0.7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0.9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0.9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0.9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890

On lit dans la table et on a :

P (W < - 1) = 0,1587 et P (W < 2) = 0,9772
Dernière étape :
$P(X \leq 14) - P(X \leq 11) = P(W \leq 2) - P(W \leq -1) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185$ (c'est donc très très proche de ce qu'on avait trouvé avec le graphique).
D FAUX C'est du cours : Si X et Y sont deux variables indépendantes alors $cov(A, B) = 0$. La réciproque est fausse !
E VRAI Il s'agit du même raisonnement que celui de l'item C.

Au risque de 5% :



$$If_{0,95}(X) = [\mu_X - 2\sigma;\ \mu_X + 2\sigma] = [12 - 2; 12 + 2] = [10; 14]$$

On peut utiliser la formule telle qu'elle est écrite dans le cours aussi :

$$If_{0,95}\,(X) = \mu_X \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_X = 12\ \pm 2\ \times 1 = [10; 14]$$

Question 32 – PASS EN FUSIONN ‼ :

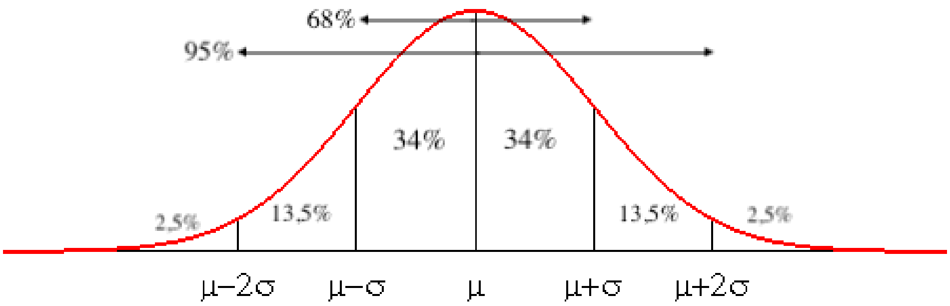
Fadi et Samir deux jeunes PASS curieux décident de réaliser une expérience qui permet de doser leur taux de Transferrine qui est une protéine responsable du transport du fer dans le plasma. En cas de déficit de fer, le taux de transferrine est augmenté. En France, le taux de transferrine dans le sang suit une loi normale de paramètre $\mu = 1200\ \mu g.mL^{-1}$ et $\sigma = 500\mu g.mL^{-1}$. On confirme un diagnostic d'anémie sévère quand le taux de Transferrine est supérieur à 1600 $\mu g.mL^{-1}$. Dans un échantillon de 400 individus dont font partie Fadi et Samir, on note T la variable aléatoire représentant le taux transferrine dans le sang, et M la variable aléatoire modélisant le taux moyen de transferrine estimé au sein de l'échantillon.

A. La variable aléatoire T est une variable aléatoire continue et peut prendre un nombre infini indénombrable de valeurs.
B. La probabilité d'avoir un taux de transferrine supérieur à 1700 $\mu g.mL^{-1}$ vaut environ 0,135.
C. M suit une loi normal de paramètres $\mu_M = 1200\ \mu g.mL^{-1}$ et $\sigma = 25\ \mu g.mL^{-1}$.
D. La probabilité pour que M soit compris entre 1175$\mu g.mL^{-1}$ et 1225 $\mu g.mL^{-1}$ vaut 0,68.
E. Lorsqu'on est face à un grand nombre de variables aléatoires indépendantes Xi suivant une même loi de probabilité, on peut définir une variable Sn, correspondant à la somme des variables Xi, qui suit approximativement une loi normale.

Question 32 – PASS EN FUSIONN ‼ : ACDE

A VRAI La variable aléatoire T suit une loi normale de paramètres μ = 1200 $\mu g.mL^{-1}$ et σ = 500$\mu g.mL^{-1}$. Elle est donc une variable aléatoire continue et par définition une variable aléatoire continue prend un nombre infini indénombrable de valeurs.

B FAUX



On peut calculer cette probabilité par la méthode classique ou on peut la lire sur la courbe de la loi normale (ci-dessus).

- Par le calcul :

La probabilité que $P(T > 1700) = 1 - P(T \leq 1700)$

$$P(T > 1700) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1700-1200}{500}\right)$$

$$P(T > 1700) = 1 - P\left(Z \leq \frac{500}{500}\right)$$

$$P(T > 1700) = 1 - P(Z \leq 1)$$

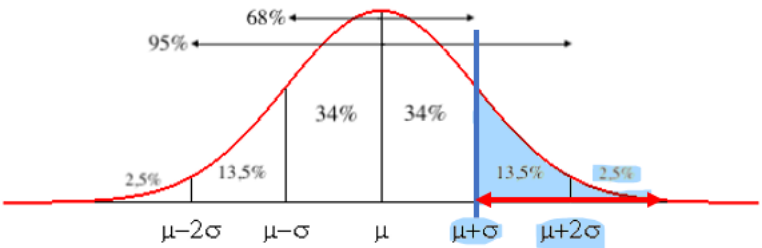
$$P(T > 1700) = 1 - 0{,}8413$$

$$P(T > 1700) = 0{,}1587 \approx 0{,}16$$

- En utilisant la courbe de loi normale :

1700 = 1200+ 500 = μ + σ

Donc P(T≥ 1700)=P(T > μ + σ)≃0,135+0,025 (cf schéma)



Soit P(T>=1700)≃0,16

Mais je tiens à préciser que cette méthode ne donne qu'une valeur approximative. Elle permet de déduire approximativement la valeur de certaines probabilités (les valeurs remarquables gaussiennes). Néanmoins, dans des cas comme celui-ci, c'est une méthode qui peut être utile.

C VRAI M correspond à l'estimateur de la moyenne.

$$\boxed{M \sim N\left(\mu_M = \mu_x\,;\sigma_M = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$M = \sum \frac{Xi}{n}$$

Les Xi suivent des lois normales, par conséquent, M suit aussi une loi normale. Ses paramètres sont les suivants :

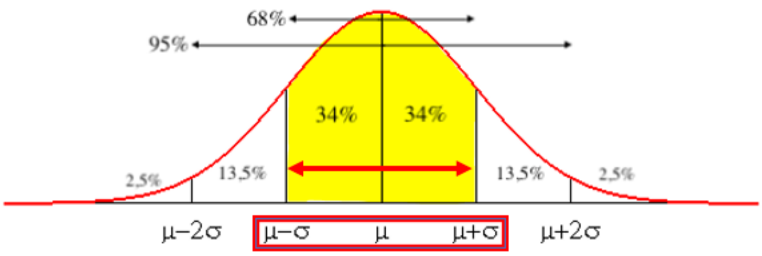
$\mu_X = \mu_M = 1200\ \mu g.mL^{-1}$ et $\sigma_M = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{500}{\sqrt{400}} = \frac{500}{20} = 25$

D VRAI Comme pour l'item B on peut calculer cette probabilité par la méthode classique ou on peut la lire sur la courbe de la loi normale.

- Par le calcul :

$$\begin{aligned} P(1175 \leq M \leq 1225) &= P\left(\frac{1175-1200}{25} \leq Z \leq \frac{1225-1200}{25}\right) \\ &= \boldsymbol{P(-1} \leq Z \leq 1) \\ &= \phi(1) - \phi(-1) \\ &= 2 * \phi(1) - 1 \\ &= \mathbf{2 * 0,8413 - 1} \\ &= \mathbf{1,6826 - 1} \\ &= \mathbf{0,6826} \approx 68\% \end{aligned}$$

- En utilisant la courbe de la loi normale :



E VRAI C'est ce qu'on appelle le Théorème de la limite centrale.

Question 33 – THE Voice (La seule et L'unique) :

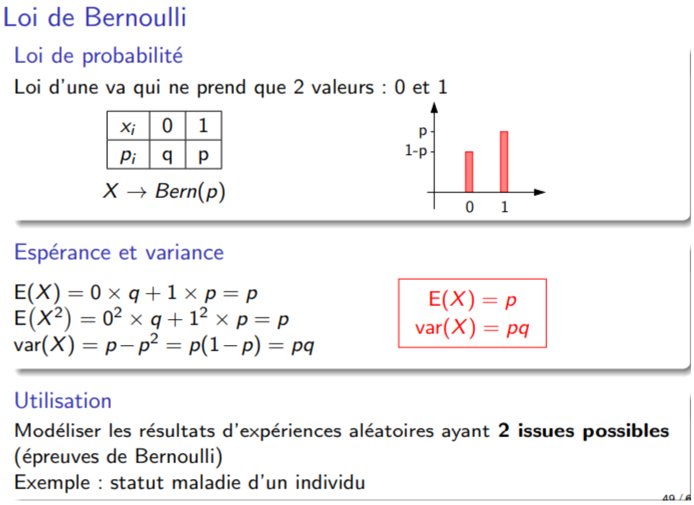
Lors d'une réunion très sérieuse du tutorat, nous surprenons Kiki en train de chanter à notre arrivée. Etonnamment, elle chantait vraiment bien et en bon matheux que nous sommes, nous décidons alors de mettre en place l'expérience « Sing Kiki ». Pour cette expérience, Kiki doit chanter « Good 4 u », et

si la première note est juste, on attribue à la variable aléatoire K un 1, si elle est fausse on attribue 0. On considère que la probabilité p que la première note soit juste vaut 0,75.
Tous charmés par la voix de Kiki, nous décidons de faire l'expérience « T'auras plus de voix demain Kiki » qui consiste à répéter l'expérience « Sing Kiki » 40 fois, de manière indépendante. On note G la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Kiki a chanté juste la première note.
Aides au calcul : 1/16 = 0,0625   40 × (1/16) = 2,5   30 × (1/16) = 1,875

A. La variable aléatoire K suit une loi de Bernoulli.
B. La variance de K vaut 0,1875.
C. G suit une loi binomiale de paramètres n=40 et p=0,75.
D. La variance de G vaut 1,875.
E. On peut dire que G suit approximativement une loi normale N(30,$\sqrt{1{,}875}$).

Question 33 – THE Voice (La seule et L'unique) : ABC

A VRAI K suit bien une loi de Bernoulli, l'expérience n'a que 2 issues : 0 ou 1, ce qui correspond à la définition de la loi de Bernoulli. Voici la diapositive du cours qui présente la loi de Bernoulli :



B VRAI Lorsque la variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, sa variance vaut *p × q* soit :

0,75 × 0,25 = ¾ × ¼ = 3/16 = 3 × (1/16) = 3 × 0,0625 = 0,1875

On a 30 x 1/16 dans les aides au calcul, il suffit donc de diviser par 10 le résultat pour aller plus vite.

C VRAI L'expérience est ici un schéma de Bernoulli, donc G suit bien une loi binomiale, les paramètres cités sont justes.

D FAUX La variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, vaut *npq* soit :

40 × 0,75 × 0,25 = 7,5

(Vous pouvez retrouver facilement le résultat car $40 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 4 \times 10 \times \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5$)

(Je ne vous ai pas mis d'aide au calcul mais on est quand même loin de 1,875 donc je pense que vous n'en aviez pas besoin pour voir que c'était faux).

E FAUX On approxime par une loi normale *N(np, $\sqrt{npq}$)*. Or on a vu juste au-dessus que *npq* vaut 7,5 donc c'est faux. Par contre, chose très importante à ne surtout pas oublier de vérifier : les conditions sont-elles remplies ? et bien oui car n=40 > 30, np=30 >5 et nq=10 > 5.

Question 34 – La décision collégiale :

Après 7 jours de débat intense, les tuteurs ont finalement décidé de créer un examen blanc avec seulement des exercices sur les variables aléatoires. Ils mènent une petite recherche sur les performances au sein d'un échantillon de 100 PASS qui possèdent tous une prépa, qu'ils compareront plus tard à un autre échantillon d'étudiants qui ne travaillent qu'avec le Tutorat (ce ne sera pas fait dans cet exercice.).

La moyenne des notes obtenues dans l'échantillon est estimée à 17 et l'écart type à 2.

A la fin de leur étude, ils obtiennent un intervalle de confiance de μ au risque α inconnu : $ic_{1-\alpha}(\mu) = [16{,}484; 17{,}516]$.

En effet, au cours de la communication des résultats aux tuteurs, certaines valeurs ont été mystérieusement effacées.

Aide au calcul : $1{,}96 \approx 2$ $1{,}645 \approx 1{,}6$ $2{,}5758 \approx 2{,}58$

A. Pour cet intervalle de confiance, le risque α est à 5%
B. Pour cet intervalle de confiance, le risque α est à 10%
C. Pour cet intervalle de confiance, le risque α est à 1%
D. Pour obtenir une précision de 0,258 sans changer le risque α, il faut multiplier le nombre de sujets par 4.
E. Pour obtenir une précision de 0,258 sans changer le risque α, il faut multiplier le nombre de sujets par 2.

Question 34 – La décision collégiale : CD

Analyse du sujet : il faut qu'on cherche le risque α, à partir d'un intervalle donné.

- On sait que :

La précision : $i = \frac{1}{2}(borne\ supérieure - borne\ inférieure) = z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

On manipule la formule, pour avoir $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{s} \times i = \frac{\sqrt{n}}{s} \times \frac{1}{2}(borne\ supérieure - borne\ inférieure)$$

Application numérique :

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{100}}{2} \times \frac{1}{2}(17{,}516 - 16{,}484) = \frac{10}{2} \times \frac{1}{2} \times 1{,}032 = 5 \times 0{,}516 = 2{,}58$$

Vous pouvez aussi choisir de lire la demi-largeur grâce à l'intervalle donné dans l'énoncé : il suffit de soustraire la moyenne à la borne supérieure pour avoir la valeur de $z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$. Ici, c'est 17,516 – 17 = 0,516 Au final, vous avez :

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}516 \quad soit\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}516 \times \frac{\sqrt{n}}{s} = 0{,}516 \times \frac{\sqrt{100}}{2} = 0{,}516 \times \frac{10}{2} = 0{,}516 \times 5 = 2{,}58$$

Avec la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite on lit $P(Z \leq z)$:

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une valeur de z donnée, la table donne la probabilité $P(Z \leq z)$

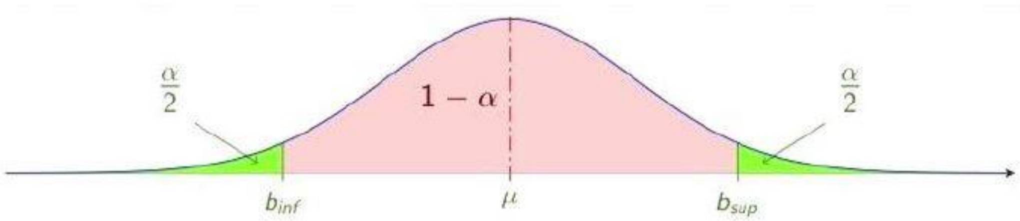
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964

On voit que P(Z ≤ 2,58) = 0,9951, or cela correspond à $1 - \frac{\alpha}{2}$ oui, mais je pense que sans dessin, ça va être dur à comprendre pour vos camarades… (mais je me trompe peut-être)

Donc : $\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9951 = 0{,}0049 \approx 0{,}005$

$\alpha = 2 \times 0{,}005 = 0{,}01$ = 1%

On vous remet le schéma du cours pour mieux visualiser :



On peut aussi utiliser la table 2 :

Au lieu de lire comme d'habitude dans la table, on regarde cette fois les valeurs qui sont dans les cases de la table et on cherche celle qui est la plus proche de 2,58. On trouve la valeur 2,5758.

Cette valeur 2,5758 est telle que P(Z> 2,5758)=0,005

donc α /2=0,005 et α = 0,01.

Loi normale centrée réduite

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une probabilité p donnée, la table donne la valeur z telle que $P(Z > z) = p$

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408

L'item C est vrai.

- Pour l'item D et E, on n'a pas besoin de passer par les calculs avec les valeurs numériques.

On remarque que pour n_1 = 100, i_1= 0,516.

Pour : $i_2 = 0{,}258 = \frac{0{,}516}{2} = \frac{i_1}{2}$

Avec :

$$i_1 = z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n_1}}$$
$$\sqrt{n_1} = z_{\frac{\alpha}{2}} \times s \times \frac{1}{i_1}$$
$$n_1 = {z_{\frac{\alpha}{2}}}^2 \times s^2 \times \frac{1}{{i_1}^2}$$

Donc :

$$i_2 = z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n_2}}$$
$$\frac{i_1}{2} = z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n_2}}$$
$$\sqrt{n_2} = z_{\frac{\alpha}{2}} \times s \times \frac{2}{i_1}$$
$$n_2 = {z_{\frac{\alpha}{2}}}^2 \times s^2 \times \frac{1}{{i_1}^2} \times 4 = 4n_1$$

Pour conclure : il faut bien multiplier le nombre de sujets par 4 si la précision est divisée par 2.

Question 35 – pas de titre, pas d'histoire, que des calculs (désolée) :

On pose la variable aléatoire X, qui suit une loi normale de paramètres μ=10 et σ=2.

On pose également la variable aléatoire Y, qui suit une loi binomiale B(25 ;0,5).

A. P(X>11) ≈ 0,31
B. P(8<X<12) ≈ 0,95
C. 25% des valeurs de X sont supérieures à environ 11,35.
D. 97,5 % des valeurs de X sont inférieures à environ 13.
E. La variable aléatoire Y suit approximativement la loi normale N (12,5 ; 2,5)

Aide au calcul : $\sqrt{6{,}25}$= 2,5

Question 35 – pas de titre, pas d'histoire, que des calculs (désolée) : AC

A VRAI

On commence par centrer et réduire : on nomme Z la variable aléatoire suivant la loi N(0 ;1).

Ainsi, on a $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-10}{2}$

Donc $P(X > 11) = P\left(Z > \frac{11-10}{2}\right) = P(Z > 0{,}5)$

Or, la table de la fonction de répartition nous donne les valeurs pour P(Z<z) donc on on ne peut pas chercher directement P(Z>0,5) :

$$P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5)$$

On peut alors chercher dans la table :

Table I – *Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite*

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une valeur de z donnée, la table donne la probabilité $P(Z \leqslant z)$.

Exemple d'utilisation de la table

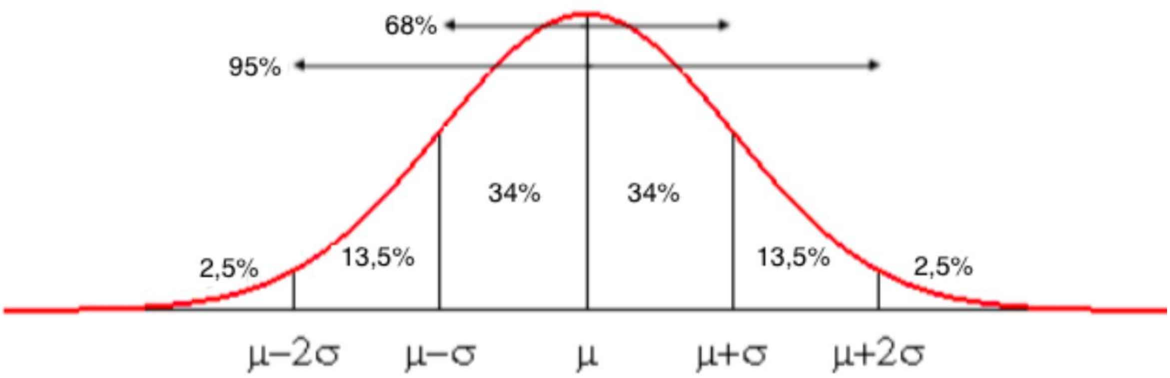
Considérons $z = 1{,}55$: la probabilité $P(Z \leqslant 1{,}55) = 0{,}9394$ est lue à l'intersection de la ligne « 1,5 » et de la colonne « 0,05 ».

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0.6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Donc $P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085 \approx 0{,}31$

B FAUX

Vous pouvez remarquer tout de suite que l'intervalle proposé correspond à µ± σ dans ce cas, vous pouvez utiliser le schéma du cours :



Ainsi, P(8<X<12) ≈0,68

Néanmoins, si vous avez calculé, on a :

P(8<X<12) = P(X<12) – P(X<8) = P(Z<1) – P(Z<-1)

Maintenant on va chercher P(Z<1) dans la table :

Table I – *Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite*

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une valeur de z donnée, la table donne la probabilité $P(Z \leqslant z)$.

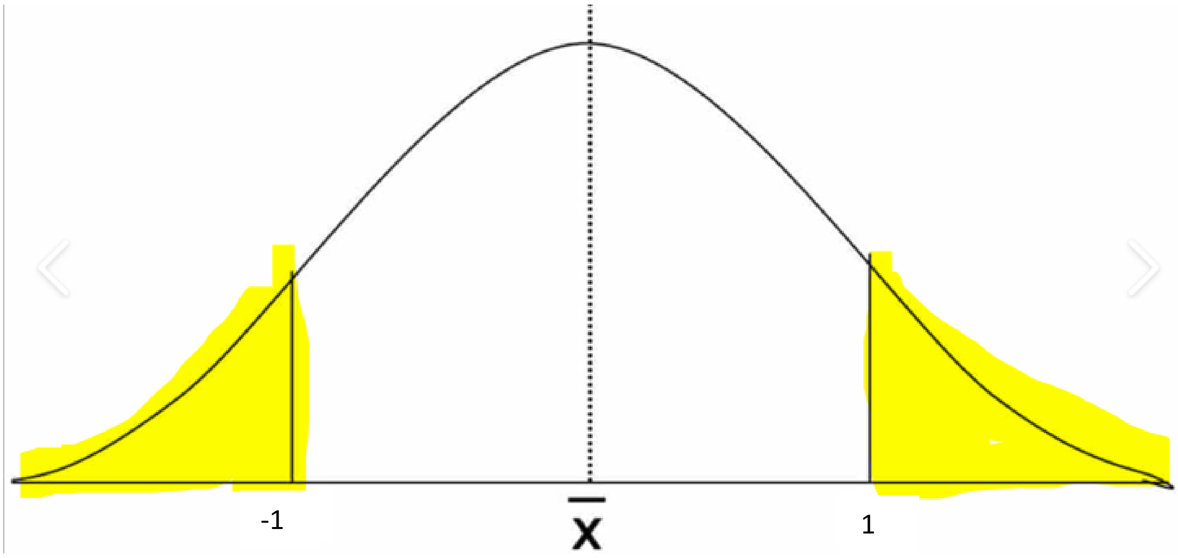
Exemple d'utilisation de la table

Considérons $z = 1{,}55$: la probabilité $P(Z \leqslant 1{,}55) = 0{,}9394$ est lue à l'intersection de la ligne « 1,5 » et de la colonne « 0,05 ».

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	$\boxed{0{,}8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Ainsi, P(Z<1)=0,8413

Pour P(Z<-1), on doit trouver une autre méthode car on ne l'a pas directement dans la table. Pour ça, on utilise la symétrie : on voit sur la courbe de Gauss que P(Z<-1) = P(Z>1)



Ainsi, on peut calculer que P(Z<-1) = p(Z>1) = 1 – P(Z<1) = 1 – 0,8413 *(on l'a lu juste avant)* = 0,1587

Ou alors vous vous souvenez de la formule du cours : P(Z< -1)= ϕ(-Z)=1 - ϕ (Z)

On peut enfin faire notre calcul :

P(8<X<12) = P(X<12) – P(X<8) = P(Z<1) – P(Z<-1) = 0,8413 – 0,1587 = 0,6826

C VRAI

On utilise cette fois la deuxième table : en effet, cette fois, on cherche P(Z>z) = 0,25

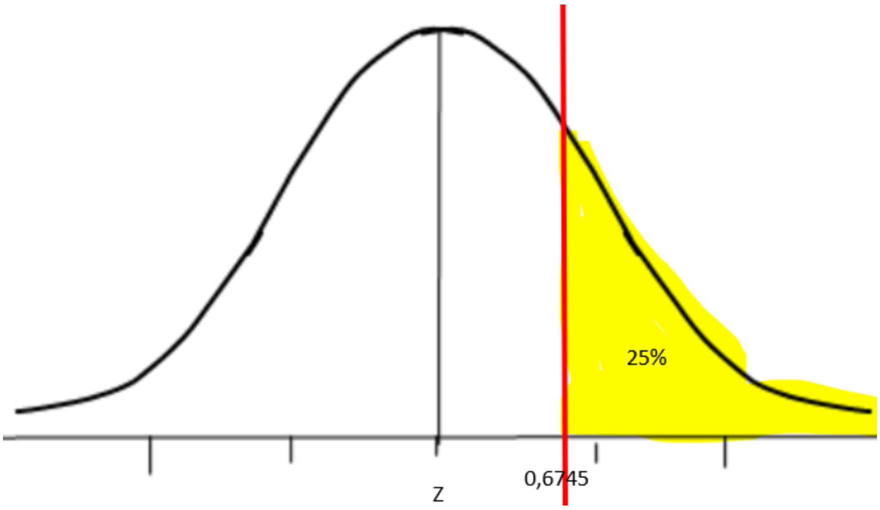
On peut le lire facilement :

Loi normale centrée réduite

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une probabilité p donnée, la table donne la valeur z telle que $P(Z>z)=p$

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745
$\boxed{0,25}$	$\boxed{0,6745}$	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433
0,26	[illegible]	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244

Ainsi, on sait que P(Z>0,6745)=0,25 soit schématiquement :



Maintenant, il faut qu'on fasse le chemin inverse de quand on a centré et réduit pour retrouver la valeur de X :

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-10}{2}\, donc\ x = z \times 2 + 10$

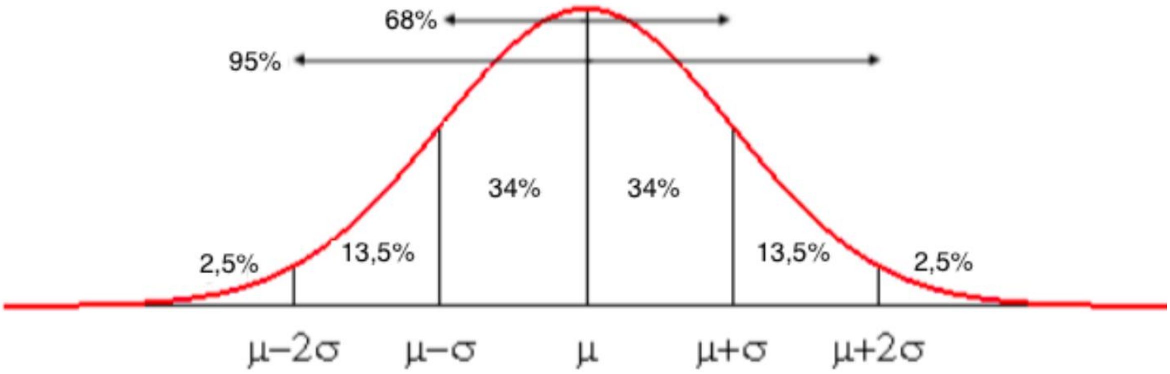
Donc ici, on fait 0,6745 ×2 + 10 = 11,3490 ≈11,35

On peut aussi calculer **P(X > 11,35).** Dans ce cas, on doit lire P(Z>$\frac{11,35-10}{2}$)= P(Z>0,675).

0,675 n'est pas dans la table, mais on voit que ϕ (0,67)=0,7486 et ϕ(0,68)=0,7517. ϕ (0,675) étant entre les 2, il est raisonnable d'arrondir le probabilité à 0,75. Ainsi, P(Z<0,675) = 0,75 donc P(Z>0,675) = 1 – P(Z<0,675) = 0,25

D FAUX

Vous pouvez une nouvelle fois réfléchir grâce à la courbe de Gauss :



Ici, on voit bien que 97,5 % des valeurs de X sont inférieures à μ+ 2σ soit 10 + 2 × 2 = 14 .

Vous pouviez aussi le calculer :

2 options s'offrent à vous, soit vous cherchez la valeur de P(X<13), soit vous cherchez P(X<x)=0,975

⇨ **Option 1 : chercher P(X<13)**

P(X<13) = P(Z<1,5) = 0,9332

Exemple d'utilisation de la table

Considérons $z = 1{,}55$: la probabilité $P(Z \leqslant 1{,}55) = 0{,}9394$ est lue à l'intersection de la ligne « 1,5 » et de la colonne « 0,05 ».

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	$\boxed{0,9332}$	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]	[illegible]	[illegible]

⇨ **Option 2 : chercher P(X<x) = 0,975**

Cela revient à chercher P(Z>z) = 0,025

Loi normale centrée réduite

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une probabilité p donnée, la table donne la valeur z telle que $P(Z > z) = p$

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	$\boxed{1,9600}$	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051

Donc z = 1,9600

On doit maintenant remonter à la valeur de X : $X = Z \times 2 + 10$

Donc ici, on a 1,96 x 2 + 10 = 13,92 ≈ 14

E FAUX

Ici, on veut approximer une loi binomiale par une loi normale, il faut donc vérifier les conditions d'approximations :

Par la loi normale : si **n > 30**, **np ≥ 5** et **n (1-p) ≥ 5**

On peut alors approximer avec N (np, $\sqrt{npq}$)

n>30 n'est déjà pas remplie ! Pas besoin d'aller plus loin, l'item est faux.

Question 36 – Nous aussi, on part ! :

Res, Po et leur Daronne veulent suivre les P1 car elles ont besoin d'une petite pause après une année de travail dur et intense. Ayant pris la décision à la dernière minute, elles n'ont trouvé qu'un train qui part à 6h du matin. Pendant le trajet, au lieu de dormir, elles ont décidé d'observer les gens dormir. Elles savent que le nombre de passagers qui dorment dans un wagon suit une loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 5.

A. La probabilité d'avoir 35 passagers qui dorment dans un wagon quelconque est de 0,35.
B. La probabilité qu'il y ait entre 25 et 45 passagers qui dorment est de 95% environ.
C. Plus le niveau de confiance est élevé, plus l'intervalle de confiance est large.
D. L'intervalle de fluctuation est centré sur la valeur théorique.
E. $IF_{0,95}(X) = [\,25,2\,;44,8]$.

Question 36 – Nous aussi, on part ! : BCDE

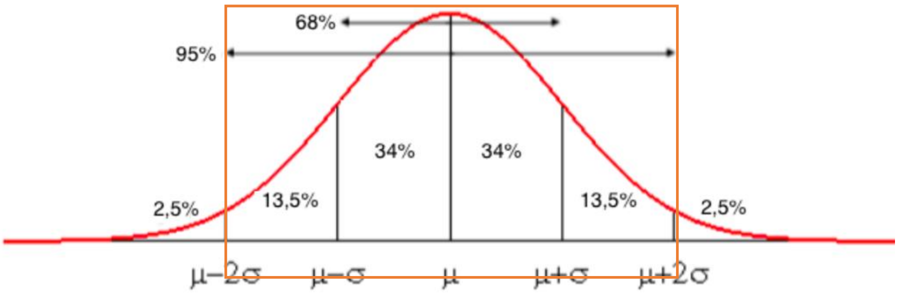
Soit X la loi Normale $X \to N(35\,;\;5)$.

A FAUX La loi Normale est une loi continue.

$$p(X = 35) = 0$$

B VRAI Il y a deux méthodes : soit la méthode classique où l'on va utiliser la table pour calculer, soit la méthode simplifiée en utilisant les propriétés de la symétrie de la courbe de Gauss.

$$p(25 < X < 45) = p(35 - 2\sigma\,;35 + 2\sigma) = 95\%$$



C VRAI C'est du cours !

D VRAI C'est du cours !

E VRAI Nous possédons dans la consigne la valeur théorique de la moyenne et de l'écart-type, nous pouvons donc bien utiliser un intervalle de fluctuation dans ce contexte, qui contiendra donc les valeurs que l'on peut trouver dans notre échantillon. Trouver $z_{\frac{0,05}{2}}$ revient à trouver *z* telle que P(Z>*z)* = 0,025. Grâce à la table de la loi normale centrée réduite, on obtient : z = 1,96

Loi normale centrée réduite

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour une probabilité *p* donnée, la table donne la valeur *z* telle que $P(Z > z) = p$

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154

$$IF_{0,95}(X) = \mu \pm z_{\frac{0,05}{2}}.\sigma = 35 \pm 1{,}96.5 = 35 \pm 9{,}8 = [\,25{,}2\,;44{,}8]$$