Université Claude Bernard Lyon 1

Tutorat Lyon Est

Unité d’Enseignement 3

BANQUE DE QCM

2013-2022

Probabilités

QUESTIONS et REPONSES

2013 - 2021

Question 1 :

En France, la probabilité d'être allergique aux chats est de 10% tandis que 5% de la population présente une allergie aux fruits de mer. De plus, 3% de la population est allergique aux chats et au pollen. La probabilité d'être allergique au pollen ou aux fruits de mer est de 0,335.
On considère que les évènements « être allergique aux chats » et « être allergique au pollen » sont indépendants. De même, les évènements « être allergique aux chats » et « être allergique aux fruits de mer » sont indépendants.

A. La probabilité d'être allergique au pollen est égale à 0,3.
B. 40% de la population présente une allergie aux chats ou au pollen.
C. La probabilité d'être allergique au pollen et aux fruits de mer est de 1,5%.
D. Les évènements concernant ces 3 allergies sont indépendants deux à deux.
E. Parmi les personnes allergiques aux chats, il y a 6 fois plus de personnes allergiques au pollen que de personnes allergiques aux fruits de mer.

Question 1 : ACDE

On note les évènements suivants :

- A : « être allergique aux chats »
- B : « être allergique aux fruits de mer »
- C : « être allergique au pollen »

Les informations de l'énoncé sont les suivantes :
P(A) = 0,1 P(B) = 0,05 P(A∩C) = 0,03 $P(B \cup C) = 0{,}335$
A et C sont indépendants, de même que A et B.

A VRAI On cherche P(C). On sait que A et C sont des évènements indépendants donc :
$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{C})$ donc $P(C) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{P(A)}$

$$P(C) = \frac{0{,}03}{0{,}1} = 0{,}3$$

B FAUX On cherche $P(A \cup C)$:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$P(A \cup C) = 0{,}1 + 0{,}3 - 0{,}03 = 0{,}37 = 37\%$$

C VRAI On cherche $P(B \cap C)$:
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ donc $P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C)$

$$P(B \cap C) = 0{,}05 + 0{,}3 - 0{,}335 = 0{,}015 = 1{,}5\%$$

D VRAI Ils sont indépendants 2 à 2 si et seulement si : A et B indépendants, A et C indépendants, B et C indépendants.
On sait grâce à l'énoncé que A et B sont indépendants et que A et C sont indépendants.
Il reste à savoir si B et C sont indépendants donc si $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$.
$P(B \cap C) = 0{,}015$ et $P(B) \times P(C) = 0{,}05 \times 0{,}3 = 0{,}015$
Donc B et C sont indépendants donc A, B et C sont indépendants deux à deux.

E VRAI On cherche à comparer $P_A(C)$ et $P_A(B)$.
Comme A et C sont indépendants : $P_A(C) = P(C) = 0{,}3$.
Comme A et B sont indépendants : $P_A(B) = P(B) = 0{,}05$.
Et 0,05 x 6 = 0,3 donc $P_A(B) \times 6 = P_A(C)$ donc parmi les personnes allergiques aux chats, il y a 6 fois plus de personnes allergiques au pollen que de personnes allergiques aux fruits de mer.

Question 2 :

On étudie le service des urgences d'un hôpital. Les personnes de plus de 65 ans représentent 20% des patients tandis que les moins de 20 ans représentent 25% des patients admis aux urgences.

On constate que 18,5% des consultations sont dues à des fractures. De plus, 5% des patients sont des enfants avec une fracture.
Enfin, on considère que la probabilité d'avoir une fracture sachant qu'on a plus de 65 ans est de 0,4.
Pour cet exercice, on définit les évènements suivants :

E = être un enfant = avoir moins de 20 ans
A = être une personne âgée = avoir plus de 65 ans
N = être un adulte = avoir entre 20 et 65 ans
F = avoir une fracture

A. La probabilité qu'un patient ait une fracture sachant que c'est un enfant est de 0,3.
B. 5,5% des patients aux urgences sont des adultes avec une fracture.
C. Parmi les adultes aux urgences, 15% ont une fracture.
D. 20% des patients aux urgences sont des enfants sans fracture.
E. Les évènements « avoir moins de 65 ans » et « ne pas avoir une fracture » ne sont pas indépendants.

Question 2 : BDE

Attention, dans cet exercice, il ne faut pas confondre « intersection » et « probabilité conditionnelle ». Il faut aussi être vigilant lorsqu'on passe des pourcentages aux probabilités et inversement afin de ne pas confondre les 2.
On commence par résumer les informations données dans l'énoncé :
$P(A) = 0,2$ $P(E) = 0,25$ $P(F) = 0,185$ $P(E \cap F) = 0,05$ $P_A(F) = 0,4$

A FAUX On cherche $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$.

$$P_E(F) = \frac{0,05}{0,25} = 0,2 \text{ (définition d'une probabilité conditionnelle)}$$

B VRAI On cherche $P(N \cap F)$. On sait que $P(F) = 0,185$ et selon la formule des probabilités totales,
$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap N) + P(F \cap A) = 0,185$
Donc $P(N \cap F) = P(F) - P(F \cap E) - P(F \cap A)$
$P(N \cap F) = 0,185 - 0,05 - P_A(F) \times P(A)$
$P(N \cap F) = 0,185 - 0,05 - 0,4 \times 0,2 = 0,185 - 0,05 - 0,08 = 0,185 - 0,13 = 0,055 = 5,5\%$

C FAUX On cherche $P_N(F)$,

$$P_N(F) = \frac{P(N \cap F)}{P(N)}$$

Or, ne pas être un adulte, cela équivaut à être un enfant ou une personne âgée (N, E et A forment un système complet d'évènements), donc :

$$P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - (P(A) + P(E)) = 1 - 0,2 - 0,25 = 0,55$$

Donc $P_N(F) = \frac{0,055}{0,55} = 0,1$

D VRAI On cherche $P(E \cap \overline{F})$.
$P(E \cap \overline{F}) = P_E(\overline{F}) \times P(E) = (1 - P_E(F)) \times P(E) = (1 - 0,2) \times 0,25 = 0,8 \times 0,25 = 0,2 = 20\%$

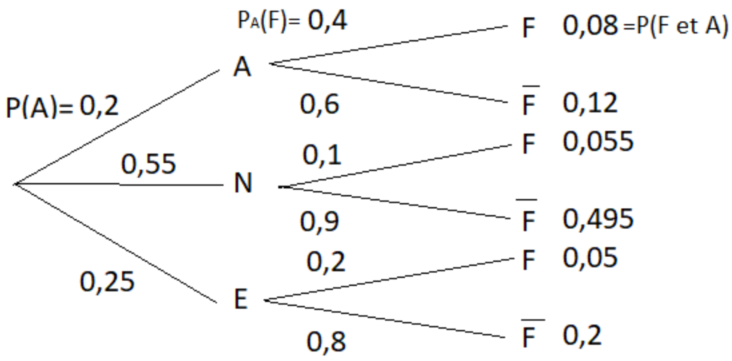
E VRAI On cherche à savoir si $\overline{A}$ et $\overline{F}$ sont indépendants ou non. Cependant, rechercher si $\overline{A}$ et $\overline{F}$ sont indépendants revient au même que rechercher si A et F sont indépendants, ou si A et $\overline{F}$ sont indépendants, ou si $\overline{A}$ et F sont indépendants.
Pour P(A) et P(F) non nulles, A et F sont indépendants si et seulement si $P_A(F) = P(F)$:

$$P_A(F) = 0,4 \neq P(F) = 0,185.$$

A et F ne sont donc pas indépendants donc $\overline{A}$ et $\overline{F}$ ne sont pas indépendants non plus.

N.B : On passe par les évènements A et F pour nous faciliter la tâche car les probabilités les concernant sont données dans l'énoncé mais il est tout à fait possible de calculer les probabilités concernant $\overline{A}$ et $\overline{F}$.

Une autre manière de répondre à ce QCM est de réaliser un arbre de probabilité :



Question 3 :

On considère qu'une femme est de grande taille quand elle mesure au moins 170 cm tandis qu'un homme est de grande taille quand il mesure au moins 180 cm. On s'intéresse à la probabilité qu'un enfant soit grand (quelque soit son sexe) à l'âge adulte.
La mère a une probabilité de 0,1 d'être de grande taille tandis que le père a une probabilité de 0,2 d'être de grande taille.
Si le père est de grande taille et pas la mère, la probabilité que l'enfant soit de grande taille est de 0,6.
Si la mère est de grande taille et pas le père, la probabilité que l'enfant ne soit pas de grande taille est de 0,5.
Si les deux parents ne sont pas de grande taille, la probabilité que l'enfant ne soit pas de grande taille est de 0,8.
Si les deux parents sont de grande taille, l'enfant est dans 70% des cas de grande taille.
La probabilité que le père et la mère soient tous les deux grands est de 0,02.

A. Les évènements « le père est de grande taille » et « la mère est de grande taille » sont indépendants.
B. La probabilité que l'enfant soit de grande taille est de 0,4.
C. La probabilité que le père soit de grande taille et que l'enfant ne soit pas de grande taille est égale à 0,078.
D. La probabilité que les deux parents ne soient pas de grande taille et que l'enfant soit de grande taille est de 0,144.
E. La probabilité que la mère soit de grande taille sachant que l'enfant est de grande taille est égale à 0,3.

Question 3 : ACD

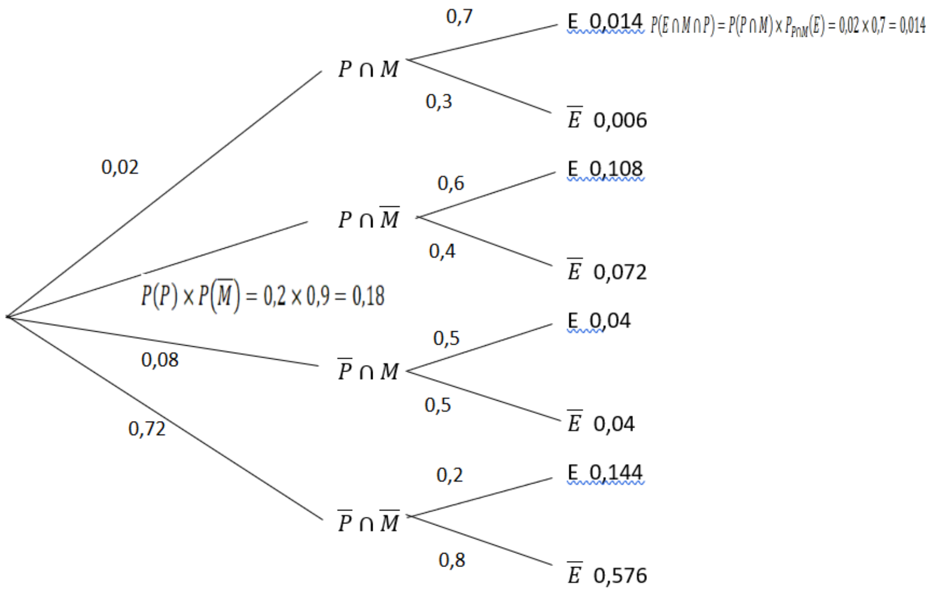
On définit les évènements suivants :

- P : « le père est de grande taille »
- M : « la mère est de grande taille »
- E : « l'enfant est de grande taille »

Dans l'énoncé, on dispose des données suivantes :

P(M) = 0,1 P(P) = 0,2 $P_{P\cap\overline{M}}(E) = 0,6$ $P_{\overline{P}\cap M}(\overline{E}) = 0,5$ $P_{\overline{P}\cap\overline{M}}(\overline{E}) = 0,8$
$P_{P\cap M}(E) = 0,7$ $P(P \cap M) = 0,02$

A VRAI Les évènements P et M sont indépendants si et seulement si $P(P \cap M) = P(P) \times P(M)$. Or $P(P) \times P(M) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$ et $P(P \cap M) = 0,02$ donc $P(P \cap M) = P(P) \times P(M)$ donc les évènements P et M sont indépendants.
Pour les items suivants, il est possible, pour rester organisé, de réaliser un arbre de probabilités :



B FAUX On cherche P(E). On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{P\ et\ M\}, \{\overline{P}\ et\ M\}, \{P\ et\ \overline{M}\}, \{\overline{P}\ et\ \overline{M}\}$.

$$P(E) = P(E \cap M \cap P) + P(E \cap \overline{M} \cap P) + P(E \cap M \cap \overline{P}) + P(E \cap \overline{M} \cap \overline{P})$$
$$P(E) = P(M \cap P) \times P_{M\cap P}(E) + P(\overline{M} \cap P) \times P_{\overline{M}\cap P}(E) + P(M \cap \overline{P}) \times P_{M\cap\overline{P}}(E) + P(\overline{M} \cap \overline{P}) \times P_{\overline{M}\cap\overline{P}}(E)$$
$$P(E) = 0,02 \times 0,7 + 0,18 \times 0,6 + 0,08 \times 0,5 + 0,72 \times 0,2 = 0,014 + 0,108 + 0,04 + 0,144$$
$$P(E) = 0,306$$

C VRAI On cherche $P(P \cap \overline{E})$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements M et $\overline{M}$.

$$P(P \cap \overline{E}) = P(P \cap \overline{E} \cap M) + P(P \cap \overline{E} \cap \overline{M})$$
$$P(P \cap \overline{E}) = P(P \cap M) \times P_{M\cap P}(\overline{E}) + P(\overline{M} \cap P) \times P_{\overline{M}\cap P}(\overline{E})$$
$$P(P \cap \overline{E}) = 0,02 \times 0,3 + 0,18 \times 0,4 = 0,006 + 0,072 = 0,078$$

D VRAI On cherche $P(\overline{P} \cap \overline{M} \cap E)$. On utilise la formule des probabilités composées.

$$P(\overline{P} \cap \overline{M} \cap E) = P(\overline{M} \cap \overline{P}) \times P_{\overline{M}\cap\overline{P}}(E) = 0,72 \times 0,2 = 0,144$$

E FAUX On cherche $P_E(M)$.

$$P_E(M) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{P(E \cap M \cap P) + P(E \cap M \cap \overline{P})}{P(E)}$$
$$P_E(M) = \frac{0,014 + 0,04}{0,306} = \frac{0,054}{0,306} \approx \frac{0,05}{0,30} \approx \frac{1}{6} \approx 0,167 \neq 0,3$$

Question 4 :

Chaque année, en France, l'épidémie de grippe touche des millions de personnes. Il est possible de distinguer dans la population deux groupes de personnes : les personnes à risque, principalement les personnes âgées et les nourrissons, qui représentent 20% de la population, et les personnes qui ne sont pas à risque. Les personnes à risque sont susceptibles de développer des complications après

une infection par le virus de la grippe. La probabilité de développer des complications chez les personnes à risque malades est de 0,5.
Grâce à un plan national de prévention, la moitié des personnes à risque sont vaccinées. Au total, dans la population générale, 30% de la population est vaccinée.
La probabilité de ne pas tomber malade chez les personnes vaccinées est de 0,95 tandis que la probabilité de tomber malade chez les personnes non vaccinées est de 0,25, et ce indépendamment du statut « à risque » de la personne.

A. Parmi les personnes qui ne sont pas à risque, 20% d'entre elles sont vaccinées.
B. 19% de la population est atteinte de grippe lors d'une épidémie.
C. Parmi les personnes vaccinées, deux tiers sont des personnes à risque.
D. 3% de la population est malade et à risque de développer des complications.
E. La probabilité d'être une personne à risque malade et de développer des complications est égale à 0,015.

Question 4 : BDE

On définit les évènements suivants :

- R : « être une personne à risque »
- V : « être vacciné »
- M : « avoir la grippe »
- C : « développer des complications »

A partir de l'énoncé, on obtient les probabilités suivantes :

$P(R) = 0,2$ $\quad P_R(V) = 0,5$ $\quad P(V) = 0,3$

$P_V(\overline{M}) = 0,95$ $\quad P_{\overline{V}}(M) = 0,25$ $\quad P_{R\cap M}(C) = 0,5$

A FAUX On cherche $P_{\overline{R}}(V)$.

$$P_{\overline{R}}(V) = \frac{P(\overline{R}\cap V)}{P(\overline{R})}$$

Or $P(V) = P(\overline{R}\cap V) + P(R\cap V)$ donc $P(\overline{R}\cap V) = P(V) - P(R\cap V) = P(V) - P_R(V)\times P(R)$

$$P(\overline{R}\cap V) = 0,3 - 0,5\times 0,2 = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

Donc

$$P_{\overline{R}}(V) = \frac{P(\overline{R}\cap V)}{P(\overline{R})} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

B VRAI On cherche P(M). On utilise la formule des probabilités totales.

$$P(M) = P(M\cap V) + P(M\cap \overline{V}) = P_V(M)\times P(V) + P_{\overline{V}}(M)\times P(\overline{V})$$

$$P(M) = 0,05\times 0,3 + 0,25\times 0,7 = 0,015 + 0,175 = 0,19$$

C FAUX On cherche $P_V(R)$.

$$P_V(R) = \frac{P(V\cap R)}{P(V)} = \frac{P_R(V)\times P(R)}{P(V)} = \frac{0,5\times 0,2}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

D VRAI On cherche $P(M\cap R)$.

$$P(M\cap R) = P(R\cap V\cap M) + P(R\cap \overline{V}\cap M) = P_{R\cap V}(M)\times P(R\cap V) + P_{R\cap\overline{V}}(M)\times P(R\cap\overline{V})$$

$P(R\cap V) = 0,1$ $\qquad P(R\cap\overline{V}) = P(R)\times P_R(\overline{V}) = 0,2\times 0,5 = 0,1$

Etant donné que la probabilité d'être malade ou non malade chez les personnes vaccinées ou non vaccinées est indépendante du statut « à risque », on peut dire que :

$$P_{R\cap V}(M) = P_V(M) = 0,05 \quad \text{et} \quad P_{R\cap\overline{V}}(M) = P_{\overline{V}}(M) = 0,25$$

Donc $P(M \cap R) = 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}005 + 0{,}025 = 0{,}03$.

Une deuxième possibilité était de faire le calcul suivant :

$$P(M \cap R) = P(R \cap V \cap M) + P(R \cap \overline{V} \cap M)$$

$$P(M \cap R) = P_V(M \cap R) \times P(V) + P_{\overline{V}}(M \cap R) \times P(\overline{V})$$

Or, $P_V(M \cap R) = P_V(M) \times P_V(R)$ et $P_{\overline{V}}(M \cap R) = P_{\overline{V}}(M) \times P_{\overline{V}}(R)$ (hypothèse d'indépendance donnée dans l'énoncé)

Donc $P(M \cap R) = P_V(M) \times P_V(R) \times P(V) + P_{\overline{V}}(M) \times P_{\overline{V}}(R) \times P(\overline{V})$

Avec $P_V(M) = 0{,}05$ (énoncé) ; $P_V(R) = 1/3$ (item C) ; $P(V) = 0{,}3$ (énoncé) ; $P_{\overline{V}}(M) = 0{,}25$ (énoncé) ; $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 0{,}7$; $P_{\overline{V}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P_R(\overline{V}) \times P(R)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}5 \times 0{,}2}{0{,}7} = \frac{1}{7}$

$$P(M \cap R) = 0{,}05 \times \frac{1}{3} \times 0{,}3 + 0{,}25 \times \frac{1}{7} \times 0{,}7 = 0{,}03$$

E VRAI On cherche $P(R \cap M \cap C)$.

$$P(R \cap M \cap C) = P_{R \cap M}(C) \times \ P(M \cap R) = 0{,}5 \times 0{,}03 = 0{,}015$$

Question 5 :

On sait que le soir de Noël certains enfants laissent un cookie et du lait pour remercier le Père Noël de sa venue. Or on sait d'après ses lutins, que la probabilité que le Père Noël soit malade après avoir mangé seulement un cookie est de 0,6 ; que la probabilité qu'il soit malade après avoir bu seulement un verre de lait est de 0,7 et que la probabilité d'être malade après avoir bu un verre de lait et mangé un cookie est de 0,9. Si le Père Noël ne mange rien, il n'est pas malade. La probabilité de présence des gourmandises laissées dans une maison est indépendante de la probabilité de présence des gourmandises laissées dans les maisons précédentes.
De plus, d'après une récente étude :
- 1 enfant sur 5 laisse uniquement un verre de lait au Père Noël.
- 2 enfants sur 5 laissent uniquement un cookie au Père Noël.
- 3 enfants sur 10 laissent un verre de lait et un cookie au Père Noël.
- 1 enfant sur 10 ne laisse rien au Père Noël.

Nous admettons que lorsque le Père Noël rentre dans une maison il est en bonne santé et que sa gourmandise l'oblige à manger/boire ce que les enfants lui ont laissé ; sachant cela :

A. La probabilité que le Père Noël mange un cookie en entrant dans une maison est de : 0,7.
B. La probabilité que le Père Noël mange un cookie dans 3 maisons consécutives est de : 0,21.
C. La probabilité que le Père Noël ne boive pas de lait dans 2 maisons consécutives est de : 0,25.
D. La probabilité que le Père Noël reparte malade d'une maison est de : 0,65.
E. Il y a moins de 5% de chance que le Père Noël rentre dans une maison où il y a un verre de lait, un cookie et qu'il reparte sain.

Question 5 : ACDE

On notera :
P(M) La probabilité d'être malade.
P(C) La probabilité d'entrer dans une maison dans laquelle il y a un cookie.
P(L) La probabilité d'entrer dans une maison dans laquelle il y a un verre de lait.

A VRAI On utilise la formule des probabilités totales :

P(C) = P(C $\cap$ $\overline{L}$) + P(C $\cap$ L)
= 0,4 + 0,3
= 0,7

B FAUX P(C∩C∩C) = P(C) x P(C) x P(C) car les 3 maisons sont indépendantes
= 0,7 x 0,7 x 0,7
= 0,343

C VRAI On utilise la formule des probabilités totales :
P(L) = P(L $\cap \bar{C}$) + P(L ∩ C)
= 0,2 + 0,3
= 0,5
Donc P($\bar{L}$) = 0,5

P($\bar{L} \cap \bar{L}$) = P($\bar{L}$) x P($\bar{L}$)
= 0,5 x 0,5
= 0,25

D VRAI P(M) = P(M ∩ C ∩ L) x + P(M ∩ C $\cap \bar{L}$) + P(M $\cap \bar{C} \cap$ L) + P(M $\cap \bar{C} \cap \bar{L}$)
= P(M/C ∩ L) x P(C ∩ L) + P(M/C $\cap \bar{L}$) x P(C $\cap \bar{L}$) + P(M/$\bar{C} \cap$ L) x P($\bar{C} \cap$ L) + P(M/$\bar{C} \cap \bar{L}$) x P($\bar{C} \cap \bar{L}$) *(formule des probabilités totales)*
= 0,9 x 0,3 + 0,6 x 0,4 + 0,7 x 0,2 + 0
= 0,27 + 0,24 + 0,14
= 0,65

E VRAI P($\bar{M}$ ∩ L ∩ C) = P($\bar{M}$ / L ∩ C) x P(L ∩ C)
= (1 – P(M / L ∩ C)) x P(L ∩ C)
= (1 – 0,9) x 0,3 = 0,03

Question 6 :

Dans un amphi, la probabilité d'avoir un rhume est de 40% et la probabilité d'avoir la grippe est de 25%. Sachant qu'il est possible d'avoir les deux maladies en même temps.
On notera : P(R) la probabilité d'avoir un rhume
P(G) la probabilité d'avoir la grippe
On précise également que les événements « avoir un rhume » et « avoir la grippe » sont indépendants.

A. La probabilité d'avoir un rhume est plus grande que la probabilité de n'avoir aucune maladie.
B. La probabilité d'avoir les deux maladies vaut 0,065.
C. Avoir un rhume est un événement complémentaire d'avoir la grippe.
D. La probabilité d'avoir un rhume mais pas la grippe est deux fois plus élevée que la probabilité d'avoir la grippe mais pas de rhume.
E. Sachant qu'un individu est vacciné contre la grippe (en supposant que l'efficacité du vaccin soit de 100%), sa probabilité d'être malade vaut 0,3.

Question 6 : D

A FAUX P(R)=0,4 et P($\bar{R} \cap \bar{G}$) = P($\bar{R}$) x P($\bar{G}$) = 0,6 x 0,75 = 0,45
On peut utiliser P($\bar{R} \cap \bar{G}$) = P($\bar{R}$) x P($\bar{G}$) car les événements « avoir un rhume » et « avoir la grippe » sont indépendants.

B FAUX P(R∩G)= P(R) x P(G)= 0,4 x 0,25 = 0,1.

C FAUX En effet il est précisé qu'il est possible d'avoir la grippe ET un rhume, les événements ne sont donc pas complémentaires.

D VRAI P(R$\cap \bar{G}$)= P(R) x P($\bar{G}$) = 0,4 x 0,75 = 0,3
P($\bar{R} \cap$G) = P($\bar{R}$) x P(G) = 0,6 x 0,25 = 0,15

E FAUX La probabilité pour qu'il soit malade est donc la probabilité qu'il ait un rhume, soit 0,4.

Question 7 :

On s'intéresse à la relation qu'il existe entre la consommation d'alcool des parents et la fréquence d'apparition des migraines chez les enfants.

-Si le père est un consommateur mais pas la mère la probabilité que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,2

-Si la mère est une consommatrice mais pas le père la probabilité que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,3

-Si le père et la mère sont des consommateurs, la probabilité que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,4

-Si aucun des parents ne consomme d'alcool la probabilité que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,1

-On suppose que le père, a une probabilité de 0,5 de consommer de l'alcool, et que la mère, ayant l'intention d'avoir un enfant, a une probabilité de 0,3 de consommer de l'alcool. De plus, les événements « le père consomme de l'alcool » et « la mère consomme de l'alcool » sont indépendants.

A. La probabilité que les deux parents consomment de l'alcool vaut 0,4.
B. La probabilité pour que le père consomme de l'alcool et que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,13.
C. La probabilité pour que la mère consomme de l'alcool et que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,045.
D. La probabilité que l'enfant soit atteint de migraines est de 0,27.
E. La probabilité que la mère consomme de l'alcool sachant que l'enfant est atteint de migraines est de 0,5.

Question 7 : BE

On utilisera : P(M) la probabilité que la mère consomme de l'alcool
P(P) la probabilité que le père consomme de l'alcool
P(I) la probabilité que l'enfant soit atteint de migraines

A FAUX On peut utiliser la formule : $P(M \cap P) = P(M) \times P(P)$ car les événements « le père consomme de l'alcool » et « la mère consomme de l'alcool » sont indépendants.

$$P(M \cap P) = P(M) \times P(P) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$$

B VRAI Ici on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(I \cap P) = P(I \cap P \cap M) + P(I \cap P \cap \overline{M})$$
$$= P(I/P \cap M) \times P(P \cap M) + P(I/P \cap \overline{M}) \times P(P \cap \overline{M})$$
$$= 0,4 \times 0,15 + 0,2 \times 0,35 = 0,06 + 0,07 = 0,13$$

C FAUX Ici on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(I \cap M) = P(I \cap P \cap M) + P(I \cap \overline{P} \cap M)$$
$$= P(I/P \cap M) \times P(P \cap M) + P(I/\overline{P} \cap M) \times P(\overline{P} \cap M)$$
$$= 0,06 + 0,3 \times 0,15 = 0,06 + 0,045 = 0,105$$

D FAUX Ici on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(I) = P(I \cap P \cap M) + P(I \cap \overline{P} \cap M) + P(I \cap P \cap \overline{M}) + P(I \cap \overline{P} \cap \overline{M})$$
$$= 0,06 + 0,045 + 0,07 + P(I/\overline{P} \cap \overline{M}) \times P(\overline{P} \cap \overline{M})$$
$$= 0,06 + 0,045 + 0,07 + 0,1 \times 0,35 = 0,21$$

E VRAI Ici on utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(M/I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,105}{0,21} = 0,5$$

Question 8 :

On s'intéresse à une maladie autosomique dont les chercheurs ont décrit l'allèle B3 comme étant responsable de la maladie. La prévalence de cet allèle dans la population est de 0,4. Il existe 3 autres allèles pour ce gène : B1, B2, B4, ayant tous une prévalence identique. La pénétrance de la maladie est de 80% pour un individu B3B3, elle est de 75% dans les cas d'un individu B1B3 ou B2B3 et est de 50% dans le cas d'un individu B3B4, la probabilité est nulle pour les autres génotypes. La présence d'un allèle n'influence jamais la probabilité de présence d'un autre allèle. On arrondira tous les résultats au centième.

A. La probabilité d'avoir au moins un allèle B3 est de 0,64.
B. La probabilité d'avoir un génotype B3B3 et d'être malade est de 0,13.
C. La probabilité d'être malade et d'avoir un génotype B3B4 est de 0,04.
D. La probabilité d'être malade est de 0,45.
E. La majeure partie des malades est de génotype B3B3.

Question 8 : ABD

Dans un premier temps il faut bien noter que :
P(Génotype B1B3) = P(« B3B1 ») = P(B3∩B1) + P(B1∩B3) = 2 x P(B3) x P(B1)

A VRAI Au total nous avons : 4 génotypes ayant au moins un allèle B3 : B1B3, B2B3, B3B3, B4B3.
Que l'on notera sous forme de probabilité P(≪ B3B1 ≫) = P(B1∩B3) + P(B3∩B1)
P(≪ B3B2 ≫) = P(B2∩B3) + P(B3∩B2)
P(≪ B3B3 ≫) = P(B3∩B3)
P(≪ B3B4 ≫) = P(B3∩B4) + P(B4∩B3)
Soit P = P(≪ B3B3 ≫) + P(≪ B3B1 ≫) + P(≪B3B2 ≫) + P(≪ B3B4 ≫)
= P(≪ B3B3 ≫) + 3 x P(≪ B3B1 ≫) car P(B1) = P(B2) = P(B4) = 1/3 x (1-0,4) = 0,2
= P(B3) x P(B3) + 3 x 2 x P(B3) x P(B1)
= 0,4 x 0,4 + 6 x 0,4 x 0,2
= 0,16 + 6 x 0,08
P = 0,64

B VRAI On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :
P(M ∩ ≪ B3B3 ≫) = P(M/ ≪ B3B3 ≫) x P(≪ B3B3 ≫)
= 0,8 x 0,16
= 0,13

C FAUX On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :
P(M ∩ ≪ B3B4 ≫) = P(M/ ≪ B3B4 ≫) x P(≪ B3B4 ≫)
= P(M/ ≪ B3B4 ≫) x 2 x P(B3) x P(B4)
= 0,5 x 2 x 0,4 x 0,2
= 0,08

D VRAI On utilise la formule des probabilités totales dans le cas d'un système complet d'évènements:
P(M) = P(M ∩ ≪ autre génotype ≫) + P(M ∩ ≪ B3B4 ≫) + P(M ∩ ≪ B3B3 ≫) + P(M ∩ ≪ B3B2 ≫) + P(M ∩ ≪ B3B1 ≫)
= 0 + P(M ∩ ≪ B3B4 ≫) + P(M ∩ ≪ B3B3 ≫) + 2 x P(M ∩ ≪ B3B1 ≫) *car P(B1) = P(B2) et la probabilité d'être malade avec un autre génotype que ceux comprenant l'allèle B3 est nulle*
= 0,08 + 0,13 + 2 x P(M/ ≪ B3B1 ≫) x P(≪ B3B1 ≫)
= 0,08 + 0,13 + 2x P(M/ ≫B3B1 ≫) x 2 x P(B3) x P(B1)
= 0,21 + 2 x $\frac{3}{4}$ x 2 x 0,4 x 0,2 = 0,21 + 0,24 = 0,45

E FAUX En effet, P(M ∩ ≪ B3B3 ≫) = 0,13 et P(M) = 0,45
La question revient à calculer P(≪ B3B3 ≫/M) = $\frac{0,13}{0,45}$
Soit environ 1/3 des malades. La majeure partie des malades ont donc un génotype différent de

B3B3.

Question 9 :

La grippe est une maladie très observée en hiver, mutant d'une année à l'autre, c'est-à-dire qu'un vaccin fait à une année X n'a aucun effet sur la grippe à l'année X+1, et que d'avoir la grippe à une année X n'a aucun effet sur la probabilité d'avoir la grippe à une année X+1. On estime que la probabilité d'avoir la grippe est de 0,4 et que cette probabilité est diminuée de moitié par la vaccination par le vaccin de l'année en cours.

A. Les évènements : ≪ avoir la grippe en 2016 ≫ et ≪ avoir la grippe en 2017 ≫ sont des évènements indépendants.
B. La probabilité d'avoir la grippe en 2016 et en 2017 pour un individu ne s'étant jamais fait vacciné est de 0,4.
C. La probabilité d'avoir la grippe en 2017 mais pas en 2016 sachant que l'individu s'était fait vacciné en 2016 et en 2017 est deux fois plus faible que s'il ne s'était fait vacciné qu'en 2016.

Pour les items D et E uniquement, on utilisera P(V) = 0,3 la probabilité d'être vacciné pour l'année en cours.

D. La probabilité d'être vacciné et atteint de la grippe en 2016 est de 0,06.
E. La probabilité pour un individu d'avoir la grippe en 2017 sachant qu'il était vaccine en 2017 est de 0,3.

Question 9 : ACD

On notera P(M2016) la probabilité d'être malade de la grippe en 2016.
P(M2017) la probabilité d'être malade de la grippe en 2017.
P(V2016) la probabilité d'être vacciné contre la grippe en 2016.
P(V2017) la probabilité d'être vacciné contre la grippe en 2017.

D'après l'énoncé :
P(M2016) = P(M2017) = 0,4
P(M2016/V2016) = P(M2017/V2017) = 0,2

On en déduit :
P($\overline{M}$2016/V2016) = P($\overline{M}$2017/V2017) = 0,8

A VRAI L'énoncé précise que le fait d'avoir la grippe une année n'influe pas sur la probabilité de l'avoir pour les années futures. C'est à dire que P(M2017/M2016) = P(M2017). Les événements sont donc indépendants.

B FAUX P(M2016∩M2017/ $\overline{V}$2016∩$\overline{V}$2017) = P(M2016/$\overline{V}$2016) x P(M2017/$\overline{V}$2017)
= 0,4 x 0,4
= 0,16

C VRAI P($\overline{M}$2016∩M2017 / V2016∩V2017) = P($\overline{M}$2016/V) x P(M2017/V)
= 0,8 x 0,2
= 0,16
Et P($\overline{M}$2016∩M2017 / V2016∩$\overline{V}$2017) = P(M2016∩$\overline{M}$2017 / $\overline{V}$2016∩V2017) = 0,32
Donc P($\overline{M}$2016∩M2017 / V2016∩$\overline{V}$2017) = 2 x P($\overline{M}$2016∩M2017 / V2016∩V2017)

D VRAI P(M2016 ∩ V2016) = P(M2016/V) x P(V) = 0,2 x 0,3 = 0,06

E FAUX P(M2017/V2017) = 0,2. C'est une donnée de l'énoncé, la probabilité de tomber malade de la grippe sachant que l'individu est vacciné pour l'année en cours est de 0,2.

Question 10 :

Une étude s'intéresse à la probabilité de développer un cancer de la gorge suite à un tabagisme actif, et plus particulièrement aux probabilités en fonctions du nombre d'années de tabagisme actif. On constituera donc pour cette étude, uniquement des groupes avec des individus fumeurs. On a inclus au total 600 individus représentatifs de la population des fumeurs étudiée. Parmi eux, à la date de début du cancer (ou à la date de l'étude pour les individus non malades) :

- 300 individus sont fumeurs depuis plus de 5 ans ou plus.
- 200 individus sont fumeurs depuis 3 à 5 ans.
- 100 individus sont fumeurs depuis 3 ans ou moins.

Grace à cette étude nous apprenons que :
La probabilité de développer un cancer sachant que l'individu est un fumeur depuis 5 ans ou plus est de 0,8.
La probabilité de développer un cancer sachant que l'individu est un fumeur depuis 3 à 5 ans est de 0,6.
La probabilité de développer un cancer sachant que l'individu est un fumeur depuis 3 ans ou moins est de 0,2.
Nous considérons que la probabilite d'avoir un cancer de la gorge sans être fumeur est nulle.

A. La probabilité de développer un cancer et d'être fumeur depuis 5 ans ou plus est de 0,4.
B. La probabilité de développer un cancer et d'être fumeur depuis 3 ans ou moins est de 0,3.
C. La probabilité de développer un cancer et d'être fumeur est de $\frac{2,2}{3}$.
D. La probabilité d'être fumeur depuis 5 ans ou plus sachant qu'on a développé un cancer est de $\frac{1,2}{1,9}$.
E. La probabilité d'être fumeur depuis moins de 5 ans et de ne pas avoir de cancer est de 2/3.

Question 10 : AD

On notera :
P(5+) la probabilité d'être fumeur depuis 5 ans ou plus = 0,5.
P(≪ 3-5≫) la probabilité d'être fumeur depuis 3 à 5 ans = 1/3.
P(3-) la probabilité d'être fumeur depuis 3 ans ou moins = 1/6.
P(M) la probabilité d'être malade.
Dans cet exercice, on travaille uniquement sur la population des fumeurs : les évènements ≪ 3- ≫, ≪ 3-5 ≫ et ≪ 5+ ≫ forment donc un système complet d'évènements.

A VRAI P(M ∩ 5+) = P(M/5+) x P(5+) = 0,8 x 0,5 = 0,4

B FAUX P(M ∩ 3-) = P(M/3-) x P(3-) = 0,2 x $\frac{1}{6} = \frac{0,2}{6} = \frac{0,1}{3}$

C FAUX P(M) = P(M ∩ 3-) + P(M ∩ 4) + P(M ∩ 5+) *On utilise ici la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements « 3- », « 3-5 » et « 5+ ».*

= $\frac{0,1}{3}$ + P(M/4) x P(4) + 0,4

= $\frac{0,1}{3}$ + 0,6 x $\frac{1}{3}$ + 0,4 = $\frac{0,1}{3} + \frac{0,6}{3} + \frac{1,2}{3} = \frac{1,9}{3}$

D VRAI P(5+/M) = $\frac{P(M \cap 5+)}{P(M)} = \frac{0,4}{\frac{1,9}{3}} = \frac{1,2}{1,9}$

E FAUX On notera P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫) = P(3-) + P(≪ 3-5 ≫).
Par conséquent, P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫ ∩ $\overline{M}$) = P(3- ∩ $\overline{M}$) + P(≪ 3-5 ≫ ∩ $\overline{M}$)
P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫ ∩ $\overline{M}$) = P($\overline{M}$/3-) x P(3-) + P($\overline{M}$/ ≪ 3-5 ≫) x P(≪ 3-5 ≫)
P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫ ∩ $\overline{M}$) = $0,8 \times \frac{1}{6} + 0,4 \times \frac{1}{3}$
P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫∩ $\overline{M}$) = $\frac{0,4}{3} + \frac{0,4}{3}$

P(≪ fumeur depuis moins de 5ans ≫ ∩ $\overline{M}$) = $\frac{0,8}{3}$

Question 11 :

On s'intéresse à la relation entre alcool, tabac et cancer de la gorge.
L'étude montre que :
- Si le sujet est fumeur mais ne consomme pas d'alcool, la probabilité qu'il développe un cancer de la gorge est de 0,4.
- Si le sujet consomme de l'alcool mais ne fume pas, la probabilité qu'il développe un cancer est de 0,25.
- Si le sujet consomme de l'alcool et est fumeur, la probabilité qu'il développe un cancer est de 0,6.
- Chez un sujet qui ne consomme ni tabac, ni alcool, cette probabilité est de 0,05. (Attention, un sujet sain n'est pas malade, il n'a pas de cancer).

De plus on sait que la probabilité de fumer est de 0,5 et la probabilité de consommer de l'alcool est de 0,4. On considèrera, dans cette étude, que les évènements ≪ consommer de l'alcool ≫ et ≪ fumer ≫ sont indépendants (même si cette hypothèse est discutable).

A. La probabilité d'être fumeur et consommateur d'alcool est de 0,45.
B. La probabilité d'être uniquement fumeur et d'avoir un cancer de la gorge est de 0,15.
C. La probabilité de consommer uniquement de l'alcool et d'avoir un cancer de la gorge est de 0,05.
D. La probabilité d'avoir un cancer de la gorge est d'environ 0,3.
E. La probabilité de boire de l'alcool sachant que le sujet a un cancer de la gorge est supérieure à 0,5.
F. La probabilité de fumer sans boire d'alcool sachant que le sujet a un cancer de la gorge est égale a 0,4.

Question 11 : CDEF

On notera : P(F) la probabilité de fumer.
P(A) la probabilité de consommer de l'alcool.
P(M) la probabilité d'avoir un cancer de la gorge.

A FAUX P(F ∩ A) = P(F) x P(A) car les évènements F et A sont indépendants
= 0,5 x 0,4 = 0,2

B FAUX « être uniquement fumeur » signifie « être fumeur et ne pas boire d'alcool ».
P(F ∩ $\overline{A}$ ∩ M) = P(M/ F ∩ $\overline{A}$) x P(F ∩ $\overline{A}$)
= 0,4 x P(F) x P($\overline{A}$)
= 0,4 x 0,5 x 0,6 = 0,12

C VRAI « consommer uniquement de l'alcool » signifie « consommer de l'alcool et ne pas fumer »
P(A ∩ $\overline{F}$ ∩ M) = P(M/ A ∩ $\overline{F}$) x P(A ∩ $\overline{F}$)
= 0,25 x P(A) x P($\overline{F}$)
= 0,25 x 0,4 x 0,5 = 0,05

D VRAI On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements ≪ A ∩ F ≫, ≪ A ∩ $\overline{F}$ ≫, ≪ $\overline{A}$ ∩ F ≫, et ≪ $\overline{A}$ ∩ $\overline{F}$ ≫.

P(M) = P(M ∩ A ∩ F) + P(M ∩ A ∩ $\overline{F}$) + P(M ∩ $\overline{A}$ ∩ F) + P(M ∩ $\overline{A}$ ∩ $\overline{F}$)
= P(M/A ∩ F) x P(A ∩ F) + P(M/A ∩ $\overline{F}$) x P(A ∩ $\overline{F}$) + P(M/$\overline{A}$ ∩ F) x P($\overline{A}$ ∩ F) + P(M/$\overline{A}$ ∩ $\overline{F}$) x P($\overline{A}$ ∩ $\overline{F}$)
= P(M/A ∩ F) x P(A) x P(F) + P(M/A ∩ $\overline{F}$) x P(A) x P($\overline{F}$) + P(M/$\overline{A}$ ∩ F) x P($\overline{A}$) x P(F) + P(M/$\overline{A}$ ∩ $\overline{F}$) x P($\overline{A}$) x P($\overline{F}$)
= 0,6 x 0,5 x 0,4 + 0,05 + 0,12 + 0,05 x 0,6 x 0,5 = 0,12 + 0,05 + 0,12 + 0,015 = 0,305 ≈ 0,3

E VRAI P(A/M) = $\frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{P(A\cap F\cap M)+P(A\cap \overline{F}\cap M)}{P(M)} = \frac{0,12+0,05}{0,3} = \frac{0,17}{0,3} > 1/2$

F VRAI P($\bar{A}$ ∩ F/M) = $\frac{P(\bar{A}\cap F\cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$

Question 12 :

Le diabète de type 2 est une maladie qui touche en France 5% de la population. On sait qu'il existe un lien entre le développement de cette maladie et un indice de masse corporel élevé.
On souhaite calculer le risque exact de déclencher un diabète type 2 en cas de surcharge pondérale dépassée et plus particulièrement dans le cas de l'obésité.
On sait qu'aujourd'hui en France 15% de la population est en situation d'obésité. On sait également que 41% des hommes ont leur IMC en surcharge pondérale ou plus (donc en surcharge pondérale ou en obésité) contre 24% des femmes.
Or on sait également que 85% des malades ont leur IMC au-delà de la surcharge pondérale (en surcharge pondérale ou obésité) et que 55% de malades sont plus spécifiquement dans une situation d'obésité.

Données :

- En France, il y a 48% d'hommes
- $\frac{0{,}0425}{0{,}3216} = 0{,}1321$
- $\frac{0{,}0425}{0{,}1968} = 0{,}2160$
- $0{,}41 \times 0{,}48 = 0{,}1968$
- $0{,}24 \times 0{,}52 = 0{,}1248$
- IMC compris entre 25 et 30 = surcharge pondérale
- IMC au-delà de 30 = obésité

A. La probabilité d'être en surcharge pondérale sans être obèse sachant que l'on est atteint de diabète de type 2 est de 0,45.
B. La probabilité d'être atteint du diabète de type 2 lorsqu'on est obèse est inférieur à $\frac{0{,}015}{0{,}15} = 10\%$.
C. La probabilité d'être atteint du diabète de type 2 lorsqu'on est au moins en surcharge pondérale est inférieur à 0,15.
D. Il y a environ 32% de personnes en surcharge pondérale ou obèse en France.
E. Il est impossible de calculer le nombre de diabétiques de type 2 parmi les femmes.

Question 12 : CDE

O: $\textit{être obese}$
D: $\textit{être diabetique}$
H: $\textit{être un homme}$
S: $\textit{être en surcharge ponderal ou obese}$ (IMC > 25)
$P(O|D) =$ 55%

A FAUX On sait que 85% des malades sont au moins en surcharge pondérale mais aussi que 55% des malades du diabète sont en situation d'obésité. Donc les patients atteint de surcharge pondérale mais sans être obèse représente 85 $- 55 = 30\%$ des malades.

La population de diabétiques de type 2 peut être repartie ainsi :

1) 15 % de personnes ayant un IMC inferieur a 25.
2) 30 % de personnes ayant une surcharge pondérale sans être en obésité.
3) 55% de personnes ayant atteint l'obésité.

B FAUX On cherche $P\ (D \mid O)$. Or on sait que $P(D \mid O) = \frac{P(D\cap O)}{P(O)}$.

On connait $P(O) = 0{,}15$ il nous manque $P(D \cap O)$. Or $P\ (D \cap O) = P(O \mid D) \times P(D)$.

Donc on obtient $P\ (D \cap O) = 0{,}55 \times 0{,}05 = 0{,}0275$.

D'où $P\ (D \mid O) = \frac{0{,}0275}{0{,}15}$, on trouve environ 0,18, ce qui est supérieur à 0,10.

C VRAI Ici on cherche $P(D|S)$. On peut à nouveau poser $P\ (D \mid S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)}$.

Or cette fois ci on ne connait pas P (S). Sauf que l'on connait $P\ (S \mid H)$ et $P\ (S \mid \overline{H})$ avec H et $\overline{H}$ formant un système complet. Donc on peut dire d'après la formule des probabilités totales que $P\ (S)$ $= P\ (S \mid H) \times P\ (H) + P\ (S \mid \overline{H}) \times P(\overline{H})$

$P\ (\overline{H})\ = 1 - P\ (H)$

D'où $P(S) = 0{,}41 \times 0{,}48 + 0{,}24 \times 0{,}52 = 0{,}3216$

Pour $P\ (D \cap S)$, on procède de même que pour la B. $P(D \cap S) = P(S \mid D) \times P(D)$.

Donc on obtient $P\ (D \cap S) = 0{,}85 \times 0{,}05 = 0{,}0425$

D'ou $P\ (D \mid S) = \frac{0{,}0425}{0{,}3216}$.
Le calcul est dans les données : 0,1321, ce qui est inférieur à 0,15.

D VRAI D'après les calculs effectués pour l'item C, on peut dire que P(S) environ = 32%.

E VRAI N'ayant pas d'informations sur la répartition du diabète entre les sexes autres que pour la population ayant au moins une surcharge pondérale, il nous manque au moins une information pour obtenir un système complet.
Par le calcul on cherche $P\ (D \mid F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)}$.

On connait $P\ (F) = P(\overline{H})$ puisque les évènements « être une femme » et « ne pas être un homme » sont les mêmes.

Mais pas $P\ (D \cap F)$ et puisqu'on ne connait pas non plus $P\ (F \mid D)\ ni\ P\ (D \cap H)$.
En clair il nous manque au moins une donnée pour pouvoir trouver P (D | F).

Si on avait $P\ (F|\overline{S})$ on pourrait alors trouver la réponse.

Question 13 :

La maladie de Tay-Sachs est une maladie neurodégénérative qui affecte le plus souvent les jeunes enfants et les nourrissons. La répartition de l'âge d'apparition de la maladie est connue :

Age	Probabilité
De 0 à 2 ans	0,80
De 2 à 8 ans	0,15
Après 8 ans	0,05

La probabilité de décès du patient dépend de l'âge de l'apparition de la maladie.
On considère que :

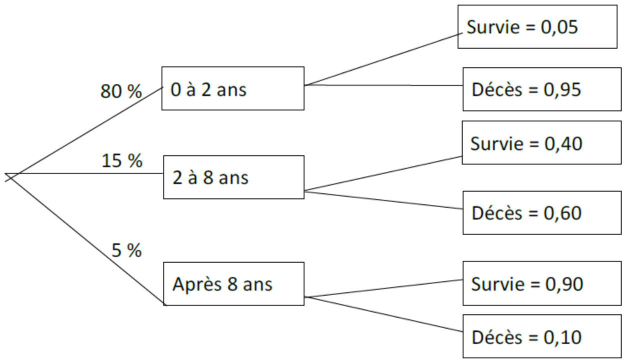
La probabilité de survie à la maladie avec une apparition entre 0 et 2 ans est de 0,05.
La probabilité de survie à la maladie avec une apparition entre 2 et 8 ans est de 0,40.
La probabilité de survie à la maladie avec une apparition après 8 ans est de 0,90.

A. La probabilité qu'un malade décède de la maladie est de 0,855.
B. La probabilité qu'un malade décède de la maladie est de 0,145.
C. Les évènements « survivre » et « avoir eu la maladie entre 0 et 2 ans » sont deux évènements indépendants.

D. Parmi les malades qui survivent à la maladie, la probabilité d'avoir eu la maladie entre 2 et 8 ans est de $\frac{0,06}{0,145}$.

E. Parmi les malades qui survivent à la maladie, la probabilité d'avoir eu la maladie entre 0 et 2 ans est de $\frac{0,04}{0,145}$.

<u>Question 13 :</u> ADE



A VRAI On cherche $P\ (D)$. Attention donc à ne pas prendre la survie ici les items portent bien sur les décès. On lit sur l'arbre la solution pour l'item A et B. On retrouve cette lecture grâce à la formule des probabilités totales detaillée dans l'item E.
On fait : $P\ (D)$ = 0,80 × 0,95 + 0,15 × 0,6 + 0,05 × 0,10 = 0,76 + 0,09 + 0,005 = 0,855

B FAUX Voir la correction de l'item A.

C FAUX Deux évènements (A et B) sont indépendants s'ils répondent à la formule du cours : $P(A|B) = P(A)$.

Dans notre cas le plus simple est de prendre : $P\ (Survivre|\text{Apparition2à8}) = P(Survivre)$?
La probabilité de décès provient des items A et B.

Donc $P\ (Survivre) = 1 - P\ (Décès) = 1 - 0{,}855 = 0{,}145$

$$P\ (Survivre|\text{Apparition2à8}) = \frac{\text{P(Survivre ∩ Apparition2à8)}}{P(Apparition2à8)}$$

$P\ (Apparition2à8) = 0{,}15$ d'après l'énoncé

Et $P\ (Survivre \cap Apparition2à8) = 0{,}40 \times 0{,}15$ après lecture dans l'arbre.

Ainsi $P\ (Survivre \cap Apparition2à8) = 0{,}06$ donc $P\ (Survivre|\text{Apparition2à8}) = \frac{0,06}{0,15} = 0{,}4$.
Or 0,4 est différent de 0,145 donc l'égalité n'est pas vérifiée. On en conclut qu'il n'y a pas indépendance entre les deux évènements.

D VRAI Ici on nous demande $P(Apparition2à8|\text{Survivre})$.

Pour cela on pose $P(Apparition2à8|\text{Survivre}) = \frac{P(Apparition2à8 \cap Survivre)}{P(Survivre)}$.
La probabilité de survie a déjà été calculée : 0,145.
L'intersection aussi : 0,06.

Donc on obtient : $\frac{0,06}{0,145} = 0{,}4137931$

Donc $P(Apparition2à8|\text{Survivre}) = 0{,}4137931$.

E VRAI On procède de la même manière que pour la D sauf qu'ici on ne connait pas notre intersection.

On pose $P(Apparition0à2|\text{Survivre})= \frac{P(Apparition0à2 \cap Survivre)}{P(Survivre)}$.
La probabilité de survie a déjà été calculée : 0,145.
L'intersection doit être calculée, pour cela on peut s'aider de l'arbre.

On peut lire sur l'arbre : $P\ (Apparition0à2\ \cap\ Survivre) = 0{,}8 \times 0{,}05 = 0{,}04$

Cette lecture vient de la formule telle que :

$P\ (Apparition0à2\ \cap\ Survivre) = P\ (Apparition0à2) \times P(\text{Survivre}|\text{Apparition0à2})$

Dans l'énoncé, on nous donne $P(\text{Survivre}|\text{Apparition0à2})$et $P\ (Apparition0à2)$ respectivement égales à 0,05 et 0,8.

Ainsi on trouve bien $P\ (Apparition0à2\ \cap\ Survivre) = 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}04$

Donc on obtient : $\frac{0{,}04}{0{,}145}= 0{,}27586207.$

Donc $P(Apparition0à2|\text{Survivre}) = 0{,}27586207.$

Question 14 :

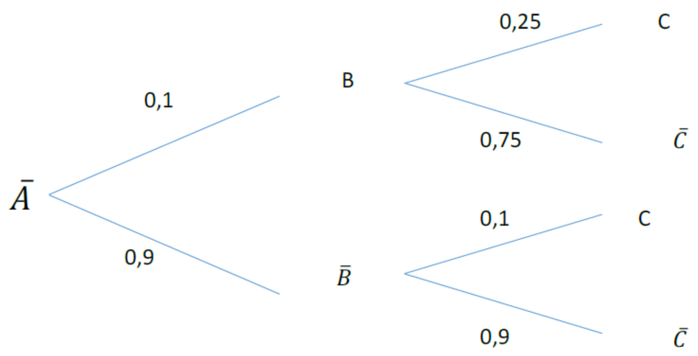
La probabilité de développer un cancer du sein pour la première fois chez les femmes est de 10 %. Parmi la population de femme ayant déjà eu un cancer du sein, on considère que chaque année, 25% de ces femmes développent un nouveau cancer du sein.
De plus, avoir de nouveau un cancer ne modifie plus le risque d'en subir encore un autre l'année suivante (il y a autant de risque de développer un cancer l'année N+1 que N+2 si un cancer s'est développé l'année N).
On note A l'évènement avoir eu un cancer du sein en 2014, B l'évènement avoir eu un cancer du sein en 2015, et C l'évènement avoir eu un cancer du sein en 2016.
On admet que la probabilité d'avoir eu un cancer avant 2014 est un évènement impossible.
0,25 * 0,25 = 0,0625

A. $P(B \cap C|\overline{A}) = 2{,}5\%$.
B. $P(B \cup C|\overline{A}) = 19\%$.
C. Dans le cas où l'évènement A a lieu, on peut considérer que les évènements B et C sont indépendants.
D. Toutes les réponses sont vraies.
E. $P((\overline{B} \cap \overline{C})|A) = 6{,}25\%$.

Question 14 : ABC

La situation décrite dans ce QCM peut se modéliser par un arbre à 3 étages. Dans les différents items, on pourra se ramener à un arbre à 2 étages selon l'énoncé et la situation indiquée par l'item.
Pour les items A et B, on considère que la personne n'a pas eu de cancer en 2014 ($\overline{A}$) alors que pour les items C et E, on considère qu'elle en a eu un (l'évènement A est réalisé).

Arbre en considérant $\overline{A}$ réalisé valable pour les items A et B :



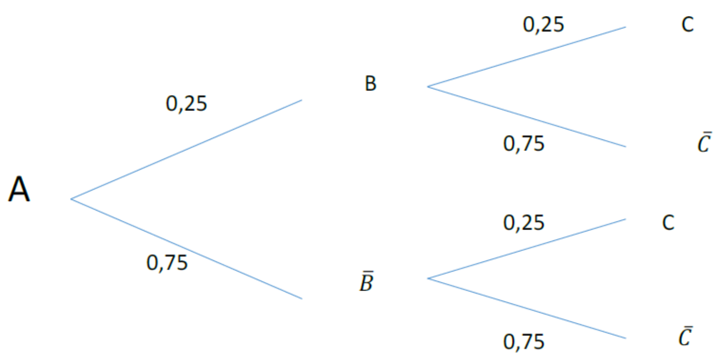
A VRAI Il s'agit de calculer la probabilité d'avoir un cancer du sein puis l'année suivante de récidiver. Ainsi il faut avoir le cancer pour la première fois : donc 10% de risque, puis l'avoir à nouveau l'année suivante (25%) ce qui nous donne $P(B \cap C|\bar{A}) = P(C|(B \cap \bar{A})) \times P(B|\bar{A}) = 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}025$ $= 2{,}5\%$.

B VRAI Soit on voit dans l'arbre les probabilités à calculer soit on passe par les formules :

$$P((B \cup C)|\bar{A}) = P(B|\bar{A}) + P(C|\bar{A}) - P((B \cap C)|\bar{A})$$
$$= P(B|\bar{A}) + P\left((B \cap C)|\bar{A}\right) + P\left((\bar{B} \cap C)|\bar{A}\right) - P((B \cap C)|\bar{A})$$
$$= P(B|\bar{A}) + P\left((\bar{B} \cap C)|\bar{A}\right)$$
$$= P(B|\bar{A}) + P(C|(\bar{A} \cap \bar{B})) \times P(\bar{B}|\bar{A})$$
$$= 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}19$$

Donc on trouve 19%.

Arbre en considérant la réalisation de A valable pour les items C et E :



C VRAI Soit on voit directement dans l'énonce l'indépendance : ≪ il y a autant de risque de développer un cancer l'année N+1 que N+2 si un cancer s'est développé l'année N ≫ donc la présence ou l'absence du cancer à l'année N+1 n'influence pas la probabilité de présence ou d'absence en N+2. Si A se réalise l'année N, alors par définition, les évènements B et C sont indépendants.

On peut par le calcul démontrer cette indépendance :

$$P(C|(A \cap B)) = 0{,}25$$

$P(C|A) = P(C|(A \cap B)) \times P(B|A) + P(C|(A \cap \bar{B})) \times P(\bar{B}|A)$ *d'après les probas totales.*

$= 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}25\ (0{,}25 + 0{,}75) = 0{,}25 \times 1 = 0{,}25$

Il y a donc bien indépendance.

D FAUX Voir la correction de l'item E.

E FAUX On cherche $P((\bar{B} \cap \bar{C})|A) = P(\bar{C}|(A \cap \bar{B})) \times P(\bar{B}|A) = 0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$.

Question 15 :

La bandelette urinaire au Nitrite permet de savoir si un patient souffre d'une infection urinaire sans pouvoir nous dire laquelle.
On veut calculer, avant de faire d'autres investigations, la probabilité qu'un malade de sexe masculin ait contracté différentes formes d'infection urinaire.
On sait que :
- Pour une pyélonéphrite, le patient aura de la fièvre et des douleurs à la miction.
- Pour une prostatite, le patient aura de la fièvre mais pas de douleurs à la miction.
- Pour une cystite, le patient n'aura pas de fièvre mais des douleurs à la miction.
- Pour une forme rare, le patient n'aura ni fièvre ni douleur à la miction.
- Le patient a 90% de chance d'avoir de la fièvre.
- La probabilité que le patient ait une prostatite est de 0.36.
- La probabilité que le patient n'ait pas de douleurs à la miction alors qu'il n'a pas de fièvre est de 0.1.

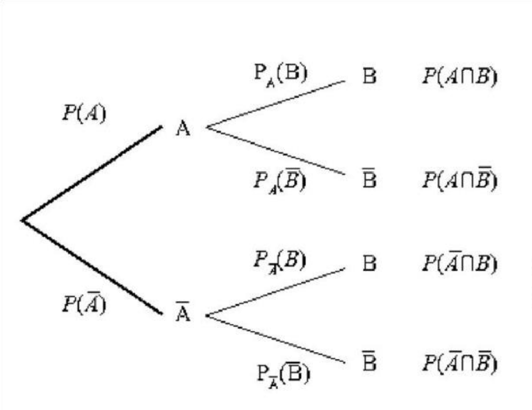
On notera la probabilité d'avoir de la fièvre P(F), ainsi que la probabilité d'avoir des douleurs à la miction P(D).

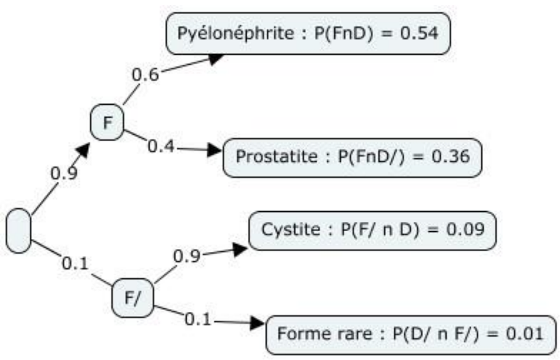
A. La probabilité que le patient ait des douleurs à la miction alors qu'il a de la fièvre est de 0.54.
B. Le patient a 9% de chance d'avoir une cystite.
C. La probabilité que le patient n'ait pas fièvre alors qu'il a des douleurs à la miction est d'1/6.
D. La probabilité que le patient n'ait pas de douleurs à la miction est de 0.37.
E. Il n'y a pas assez d'informations pour calculer la probabilité demandée en C.

Question 15 : BD

Il faut exprimer nos connaissances et nos hypothèses en les rapportant aux probabilités P(F) et P(D).
De plus, pour se clarifier l'esprit et gagner du temps, il est recommandé de faire un arbre de probabilités. Ça vous fera gagner beaucoup de temps dans la majorité des exercices sur les probabilités.

Principe de l'arbre de probabilités :





Ainsi d'après l'énoncé :

- $P(F) = 0.9$
- $P(F \cap \overline{D}) = 0.36$
- $P(\overline{D} \mid \overline{F}) = 0.1$

(dans l'arbre $\overline{D}$ sera noté D/)

A FAUX Probabilité que le patient ait des douleurs à la miction alors qu'il a de la fièvre : (P(D I F) = 0.6) $\neq$ probabilité que le patient ait des douleurs à la miction ainsi que de la fièvre (P(D ∩ F) = 0.9*0.6 = 0.54).

B VRAI P(Cystite) = P($\overline{F}$∩ $\overline{D}$) = 0.9 * 0.1 = 0.09.

C FAUX On cherche $P(\overline{F}\ I$ D). Or, on ne peut pas calculer cette probabilité directement dans l'arbre car la première ramification dépend de la fièvre. On utilise alors le théorème de Bayes :

$$P\ (\overline{F}\ I\ D) = \frac{P(\overline{F})*P(D\ I \overline{F})}{P(\overline{F})*P(D\ I\ \overline{F})+P(F)*P(D\ I\ F)} = \frac{0.1*0.9}{0.1*0.9+0.9*0.6} = \frac{0.9*0.1}{0.9(0.1+0.6)} = 1/7.$$

D VRAI P($\overline{D}$) = P($F \cap \overline{D}$) + P($\overline{F} \cap \overline{D}$) = 0.36 + 0.01 = 0.37.

E FAUX *cf* item C.

Question 16 :

Une réponse photoparoxystique (RPP) à un stimulus lumineux est une maladie génétique autosomique dominante dont la probabilité d'expression varie avec l'âge : elle est de 25% à la naissance, puis devient maximale (50%) entre 5 et 15 ans, puis tombe à 10% après 20 ans. Il n'existe pas d'individus malades non porteurs de la mutation responsable de la pathologie.

Un couple de jeunes adultes âgés de 30 ans donne naissance à un enfant. Le grand-père maternel et la grand-mère paternelle de cet enfant sont tous deux porteurs hétérozygotes de la mutation, tandis que les autres grands-parents n'ont pas la mutation.
Il faut noter que les évènements (maladie ou mutation) du père et de la mère sont indépendants.

Aides au calcul :
0.05*0.95 = 0.0475 ; 1.75*0.25 = 0.4375 ; 1.75*0.5 ≈ 0.875 ; 0.4375 * 0.5 ≈ 0.22 ; 0.875*0.5 ≈ 0.44

A. La probabilité qu'aucun des parents de l'enfant ne soit porteur de la mutation est de 0.25.
B. La probabilité que le père soit malade est de 5%.
C. La probabilité qu'un seul parent soit malade est de 0.095.
D. La probabilité que l'enfant soit porteur de la mutation est de 0.4375.
E. L'enfant a 22% de chance d'être malade entre 5 et 15 ans.

Question 16 : ABCDE

Voici une façon de trouver en raisonnant plutôt qu'en utilisant les formules : c'est la méthode que l'on peut utiliser si on veut trouver la réponse facilement et surtout rapidement !!

A VRAI Le grand-parent porteur de la mutation est hétérozygote, donc il a un seul allèle muté et a donc 1 chance sur 2 de transmettre sa mutation à son enfant (qui est le parent de l'enfant de l'énoncé). Les parents homozygotes normaux ne peuvent pas transmettre la mutation puisqu'ils ne l'ont pas. Chaque parent a donc 1 chance sur 2 d'être porteur.
Il y a alors 1 chance sur 4 que les 2 parents soient porteurs, 1 chance sur 4 qu'aucun parent ne soit porteur et 2 fois 1 chance sur 4 = 2 chances sur 4 qu'un seul parent soit porteur (1/4 pour le père seul et ¼ pour la mère seule).

B VRAI Le père a 30 ans > 20 ans : la probabilité qu'il soit malade sachant qu'il est porteur est de 0.1 (10%). Or il a 1 chance sur 2 d'être porteur (proba = 0.5). Donc la probabilité qu'il soit malade est de 0.5 * 0.1 = 0.05.

C VRAI Les 2 parents sont dans le même cas : chacun a 1 parent hétérozygote pour la mutation. Donc la mère a aussi 5% de chance d'être malade. L'évènement « un seul parent est malade » correspond à l'intersection de « seul papa est malade » et de « seule maman est malade ».
L'événement contraire de « un seul parent est malade » est l'union des évènements « Papa et Maman sont malades » et « Aucun parent n'est malade ». La probabilité de « un seul parent est malade » est donc le complément à 1 de l'union des évènements « les 2 parents sont malades » et « aucun parent n'est malade ».

Donc P(« un seul parent est malade »).
= 1 – [P(« 2 parents malades ») + P(« aucun parent malade »)].
= 1 –[0.05*0.05 + 0.95*0.95].
= 1 – [$2.5*10^{-3}$+ 0.9025] .
= 1- 0.905.
= 0.095.

D VRAI Voir plus bas.

E VRAI La probabilité d'être malade entre 5 et 15 ans, sachant qu'on a la mutation est de 0.5. Donc l'enfant a 0.4375*0.5 ≈ 0.22 = 22% de chance d'être malade.

Voici maintenant la correction proposée par le Dr. Bardel, qui est beaucoup plus rigoureuse, mais beaucoup plus longue et qui pour moi n'est pas faisable en moins de 5 minutes.

Définition des évènements utiles pour modéliser le problème :

M : « être malade »

M_E : « l'enfant est malade » $\overline{M_E}$: « l'enfant n'est pas malade »

M_P : « le père est malade » $\overline{M_P}$: « le père n'est pas malade »

M_M : « la mère est malade » $\overline{M_M}$: « la mère n'est pas malade»

Mu : « être porteur de la mutation » (homozygote ou hétérozygote)

Mu_E : « l'enfant est porteur de la mutation »

$\overline{Mu_E}$: « l'enfant n'est pas porteur de la mutation »

Mu_P : « le père est porteur de la mutation »

$\overline{Mu_P}$: « le père n'est pas porteur de la mutation »

Mu_M : « la mère est porteuse de la mutation »

$\overline{Mu_M}$: « la mère n'est pas porteuse de la mutation »

Informations de l'énoncé :

1) Indépendance de la survenue des évènements chez le père et la mère
(par ex : $P(M_P \cap M_M) = P(M_P) * P(M_M)$)

2) La probabilité d'exprimer la maladie varie avec l'âge :

$$P(M \mid naissance\ et\ Mu) = 0.25$$
$$P(M \mid 5 - 15\ et\ Mu) = 0.5$$
$$P(M \mid > 20\ et\ Mu) = 0.1$$

A VRAI $P(\overline{Mu_P} \cap \overline{Mu_M}) = P(\overline{Mu_P}) * P(\overline{Mu_M})$ (du fait de l'indépendance).
Dans le cadre d'une transmission autosomique dominante, sachant qu'un des parents est hétérozygote et l'autre homozygote (cas des grands-parents), la probabilité que l'enfant soit hétérozygote vaut 0.5.
Soit G l'allèle sain et g l'allèle muté :

		Parent 1 homozygote	
		G	G
Parent 2 hétérozygote	G	GG	GG
	g	Gg	gG

Probabilité que l'enfant soit porteur (autrement dit GG) = 0.5

Probabilité que l'enfant soit porteur (avec un ou deux g) =0.5

$$P(\overline{Mu_P}) * P(\overline{Mu_M}) = 0.5 * 0.5 = 0.25.$$

B VRAI $P(un\ seul\ parent\ malade) = P[(\overline{M_M} \cap M_P) \cup (\overline{M_P} \cap M_M)]$ (mère malade/père sain OU père malade/mère saine).

$= P(\overline{M_M} \cap M_P) + (\overline{M_P} \cap M_M)$ (évènements incompatibles)

$= P(\overline{M_M}) * P(M_P) + P(\overline{M_P}) * P(M_M)$ (indépendance).

De façon générale :

On a affaire à une maladie autosomique (touche les 2 sexes) et chaque parent est dans la même situation : il a eu lui-même un parent hétérozygote et un parent homozygote non porteur.

Donc $P(M_P) = P(M_M) = P(M)$.

$P(M) = P(M \cap Mu) + P(M \cap \overline{Mu})$ $P(M \cap \overline{Mu}) = 0$ car il n'existe pas d'individus malades non porteurs de la mutation responsable de la pathologie.

$P(M) = P(Mu) * P(M|\ Mu)$.

Or les parents ont 30 ans (> 20 ans).

Donc $P_{>20}(M) = P_{>20}(Mu) * P_{>20}(M|\ Mu) = 0.5 * 0.1 = 0.05.$

C VRAI $P_{>20}(\overline{\overline{M}}) = 1 - P_{>20}(M) = 0.95$.

D'où $P(\overline{M}_M) * P(M_P) + P(\overline{M}_P) * P(M_M) = (0.95 * 0.05) + (0.95 * 0.05)$.

$= (0.95 * 0.05) * 2.$

$= 0.95 * 0.1.$

$= 0.095.$

D VRAI $P(Mu_E) = P(Mu_E \cap (Mu_M \cap \overline{Mu_P})) + P(Mu_E \cap (Mu_P \cap \overline{Mu_M})) + P(Mu_E \cap (Mu_M \cap Mu_P))$ transmission par la mère transmission par le père transmission à la fois par les 2

$= P(Mu_M \cap \overline{Mu_P}) * P(Mu_E|(Mu_M \cap \overline{Mu_P})) + P(Mu_P \cap \overline{Mu_M}) * P(Mu_E |(Mu_P \cap \overline{Mu_M})) + P(Mu_M \cap Mu_P) * P(Mu_E \mid (Mu_M \cap Mu_P))$

$= 0.5 * 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.5 * 0.75$

$= 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.75$

$= 0.25\ (0.5 + 0.5 + 0.75)$

$= 0.25 * 1.75$

$= 0.4375$

E VRAI $P_{5-15}(M_E) = P_{5-15}(Mu_E) * P_{5-15}(M_E|Mu_E) + 0 = 0.4375 * 0.5 \approx 0.22.$

Question 17 :

Dans un service de cardiologie, 20 % des patients vont subir une coronarographie. Cette dernière nécessite l'injection d'iode qui peut être néfaste pour le rein. Parallèlement, la créatinine est un marqueur fonctionnel du rein. Si son taux est trop élevé, le rein ne fonctionne pas bien. 60 % des patients ayant subi une coronarographie ont un taux de créatinine trop élevé, contre 15 % chez les personnes n'ayant pas eu de coronarographie. Soient C l'événement « avoir une coronarographie » et T l'événement « avoir une créatinine trop élevé ».

A. La probabilité qu'un patient du service de cardiologie ait une créatinine trop élevée ou une coronarographie est de 0,40.

B. La probabilité qu'un patient du service de cardiologie ait une créatinine trop élevée ou une coronarographie est 0,32.
C. Les événements C et T sont indépendants.
D. $P(C|\bar{T}) \approx 0{,}11$.
E. On peut affirmer que c' est un facteur causal de T.

Question 17 : BD

Ce genre d'exercice peut être résolu de manière calculatoire ou avec un tableau. Si l'énoncé vous donne des probabilités, il est encore possible de faire un tableau en utilisant comme effectif total : 1. Cependant, si l'énoncé vous donne des probabilités conditionnelles (comme c'est le cas ici), des calculs restent nécessaires pour le remplir, et c'est donc équivalent à l'utilisation de la manière calculatoire.
Si on le résout de manière calculatoire, il est important de cibler ce qu'on nous demande dans la question ainsi que d'écrire en langage mathématiques les données : ici on a $P(C)$; $P(T|C)$ *et* $P(T|\bar{C})$.

A FAUX Voir item B.

B VRAI Ici on nous demande $P(C \cup T)$:

$$P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$$
$$= P(C) + P(T|C) \times P(C) + P(T|\bar{C}) \times P(\bar{C}) - P(T|C) \times P(C)$$
Pour calculer P(T), on a utilisé ici la loi des probabilités totales.
D'où $P(C \cup T) = 0{,}20 + 0{,}60 \times 0{,}20 + 0{,}15 \times 0{,}80 - 0{,}60 \times 0{,}20 = 0{,}20 + 0{,}12 + 0{,}12 - 0{,}12 = 0{,}32$.

C FAUX On a $P(C \cap T) = 0{,}12$ (question précédente) $\neq P(C) \times P(T)$
En effet, $P(C) \times P(T) = 0.20 \times P(T|C) \times P(C) + P(T|\bar{C}) \times P(\bar{C}) = 0.20 \times 0.24 = 0.048$. On aurait aussi pu noter que P(T|C)≠P(T), ce qui nous aurait amené à la même conclusion.

D VRAI On a $P(C|\bar{T}) = \frac{P(C \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{T}|C) \times P(C)}{P(\bar{T})} = \frac{(1-P(T|C)) \times P(C)}{P(\bar{T})}$

Or, P(T) avait été calculé aux items A, B et C et donc $P(\bar{T})=0{,}76$.

D'où $P(C|\bar{T}) = \frac{0{,}4 \times 0{,}2}{0{,}76} = 0{,}11$

Remarque : Cela revient à appliquer la formule de Bayes dans laquelle certains termes ont été pré-calculés aux questions précédentes.

E FAUX Il semblerait que oui, si on a fait une coronarographie, on a plus de risque de voir notre taux de créatinine grimper. Cependant les probabilités conditionnelles n'ont pas de valeur statistique et ne nous permettent pas d'affirmer quoi que ce soit.

Question 18 :

Dans un service d'urgence en traumatologie, 1 personne sur 3 est sous anticoagulants. Le taux d'hémorragie parmi les patients du service est de 5%. La proportion de patients qui sont sous anticoagulants et qui font une hémorragie est de 2% dans ce service.

Soit A l'évènement « être sous anticoagulant ».
Soit B l'évènement « faire un choc hémorragique ».

Les calculs seront réalisés sans aucune approximation.

A. $P(AUB) = \frac{109}{300}$.
B. $P(\overline{B}|A) = 0.95$.
C. Les évènements A et B ne sont pas indépendants.
D. L'évènement B est un facteur causal de l'évènement A.
E. La probabilité d'être sous anticoagulants quand on a fait un choc hémorragique est de $\frac{6}{300}$.

<u>Question 18 :</u> AC

<u>Traduction de l'énoncé</u>

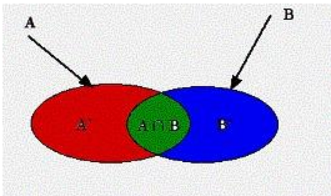
Soit A l'évènement « être sous anticoagulants ».
Soit B l'évènement « faire un choc hémorragique ».

Dans un service d'urgence en traumatologie → Ω est l'univers sur lequel on travaille dans cet exercice, notre population. Donc ici, Ω = les patients du service d'urgence.

1 personne sur 3 est sous anticoagulants → $P(A) = \frac{1}{3}$

Le taux d'hémorragie parmi les patients du service est de 5% → $P(B) = \frac{5}{100}$.
La proportion de patients qui sont sous anticoagulants et qui font une hémorragie est de 2% dans ce service →Présence du « et » donc il s'agit d'une intersection d'intervalle. Donc $P(A \cap B) = \frac{2}{100}$.
On met toutes nos probabilités sous le même dénominateur pour faciliter les calculs, on obtient donc :

$P(A) = \frac{1}{3} = \frac{100}{300}$.
$P(B) = \frac{5}{100} = \frac{15}{300}$.
$P(A \cap B) = \frac{2}{100} = \frac{6}{300}$.



A VRAI $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ par définition (rappel du théorème) :

$= \frac{100}{300} + \frac{15}{300} - \frac{6}{300}$.
$= \frac{109}{300}$.

B FAUX $P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)}$ par définition

$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$ où $P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B)$ et correspond à la partie en rouge sur le schéma (ensemble A – partie verte).

$= \frac{\frac{100}{300} - \frac{6}{300}}{\frac{100}{300}} = \frac{94}{100}$.

C VRAI $P(A \cap B) = \frac{2}{100}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{100} = \frac{5}{300}$.
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$
Donc A et B ne sont pas indépendants.

D FAUX Attention à ne pas confondre la notion de dépendance de deux évènements (qui veut dire qu'ils sont « interdépendants », que leurs causes sont imbriquées), avec la notion de cause. On ne peut en aucun cas déduire lequel est la cause de l'autre uniquement par des méthodes probabilistes ou statistiques, ni s'ils ont en fait une cause commune. Ici on voit bien qu'il est impossible que l'événement B cause l'événement A, car ce n'est pas parce qu'on fait une hémorragie qu'on est sous anticoagulants. Les données médicales suggèrent évidemment l'inverse, mais on ne peut pas le conclure non plus à l'aide des seules données de l'exercice ! Attention donc à ne pas faire de raccourci …

E FAUX Il s'agit de la probabilité conditionnelle de A, sachant B. En réalité, quand on cherche une probabilité conditionnelle comme ici, on cherche la probabilité de l'évènement A, non dans l'ensemble Ω, mais dans l'ensemble B. En clair, sur le schéma on se place dans le cercle de B (vert + bleu), et on cherche dans cet ensemble, la probabilité d'être dans le cercle vert.

$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ d'après la définition d'une probabilité conditionnelle.

$= \frac{6}{15} = 0{,}4.$

Question 19 :

Tous les hôpitaux sont le lieu d'infections nosocomiales. On suppose qu'elles touchent chaque année en moyenne 35 % des patients hospitalisés, et qu'il n'existe pas d'immunité acquise, c'est-à-dire que le fait d'avoir eu une infection nosocomiale une année ne modifie pas le risque d'en avoir une l'année suivante.

Aides aux calculs : $0{,}35^2 = 0{,}12$ 0,35= 0,37

A. Les événements « avoir une infection nosocomiale en 2012 » et « avoir une infection nosocomiale en 2013 » sont des événements indépendants.
B. Pour un sujet hospitalisé pendant 2 ans, la probabilité d'avoir eu une infection nosocomiale en 2012 et à nouveau une infection nosocomiale en 2013 est 0,7.
C. Pour un sujet hospitalisé pendant 2 ans, la probabilité d'avoir eu une infection nosocomiale en 2012 ou en 2013 est 0,35.
D. Pour un sujet hospitalisé pendant 2 ans, la probabilité d'avoir eu une infection nosocomiale en 2012 ou en 2013 est 0,58.
E. Les sujets ayant eu infection nosocomiale en 2012 et restant hospitalisés l'année suivante avaient 65 chances sur 100 de ne pas en avoir en 2013.

Question 19 : ADE

A VRAI On nous dit dans l'énoncé que le fait d'avoir eu une infection nosocomiale une année ne modifie pas le risque d'en avoir une l'année suivante. C'est bien la définition de deux évènements indépendants.

B FAUX Soit A l'évènement "avoir une infection nosocomiale en 2012", et B l'évènement "avoir une infection nosocomiale en 2013". L'évènement "avoir eu une infection nosocomiale en 2012 et à nouveau une infection nosocomiale en 2013" correspond donc à l'évènement A∩B. Or les évènements A et B sont indépendants (cf. item A). Donc = P(A)*P(B) = 0,35*0,35 = 0,12.

C FAUX Voir item D.

D VRAI Cette fois-ci, l'évènement "avoir eu une infection nosocomiale en 2012 ou en 2013" correspond à l'évènement AUB. Donc P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B) = 0,35 + 0,35 - 0,1225 = 0,58.

E VRAI Le fait d'avoir eu une infection nosocomiale en 2012 ne modifie pas la probabilité d'en avoir une en 2013 (A et B sont indépendants). Donc = 1 – P(B) = 1 – 0,35 = 0,65.

Question 20 - Bigleux :

La myopie est un défaut de la vision répandu.

On s'intéresse à la probabilité pour un enfant d'être myope, en connaissant la présence ou l'absence de cette caractéristique chez ses parents.

- si la mère et le père sont myopes, alors la probabilité que l'enfant soit myope vaut 0,2
- si la mère est myope **mais pas** le père, alors la probabilité que l'enfant soit myope vaut 0,15
- si père est myope **mais pas** la mère, alors la probabilité que l'enfant soit myope vaut 0,04
- si **aucun** des 2 parents n'est myope, alors la probabilité que l'enfant soit myope vaut 0,02
- si le père est myope, alors la probabilité que la mère soit myope aussi vaut 0,6
- si le père **N'EST PAS** myope, alors la probabilité que la mère soit myope vaut 0,6
- la probabilité que le père soit myope vaut 0,6

Aides aux calculs :

0,2*0,36 = 0,072 0,15*0,24=0,036 0,04*0,24=0,0096 0,02*0,16=0,0032

A. La probabilité que les 2 parents soient myopes vaut 0,36
B. Le fait que la mère soit myope est indépendant du fait que le père soit myope.
C. La probabilité qu'aucun parent ne soit myope vaut 0,64.
D. La probabilité qu'un enfant soit myope est supérieure à 20%.
E. La probabilité que la mère d'un enfant myope soit myope vaut environ 5/6.

Question 20 : ABE

On définit les évènements suivants :
« P : le père est myope »
« M : la mère est myope »
« E : l'enfant est myope »
Données de l'énoncé traduites en langage mathématiques :
$P_{P\cap M}(E) = 0{,}2$
$P_{\bar{P}\cap M}(E) = 0{,}15$
$P_{P\cap \bar{M}}(E) = 0{,}04$
$P_{\bar{P}\cap \bar{M}}(E) = 0{,}02$
$P_P(M) = 0{,}6$
$P_{\bar{P}}(M) = 0{,}6$
$P(P) = 0{,}6$

A VRAI On cherche $P(P \cap M)$. D'après les données, une seule relie les 2 évènements :
$P_P(M) = 0{,}6$
Or, d'après la définition d'une proba conditionnelle, on a :
$P_P(M) = \frac{P(P\cap M)}{P(P)}$
Donc $P(P \cap M) = P_P(M) * P(P) = 0{,}6 * 0{,}6 = 0{,}36$.

B VRAI D'après le cours, l'indépendance se définit par

- $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
  OU
- $P_B(A) = P(A)$

Vérifions les 2 formules :

- $P(P \cap M) = 0{,}36$ cf item A et $P(P) = 0{,}6$

On cherche $P(M)$
D'après la démonstration des probas totales, $P(M) = P(P \cap M) + P(\bar{P} \cap M)$
Or $P(\bar{P} \cap M) = P_{\bar{P}}(M) * P(\bar{P}) = 0{,}6 * \left(1 - P(P)\right) = 0{,}6 * 0{,}4 = 0{,}24$

Donc : $P(M) = P(P \cap M) + P(\bar{P} \cap M) = 0{,}36 + 0{,}24 = 0{,}6$

Ainsi, $P(P \cap M) = 0{,}36$ et $P(M) * P(P) = 0{,}6 * 0{,}6 = 0{,}36$
Donc les évènements « le père est myope » et « la mère est myope » sont indépendants.
OU

- $P_P(M) = 0{,}6$ et $P(M) = 0{,}6$ donc $P_P(M) = P(M)$ donc les évènements « le père est myope » et « la mère est myope » sont indépendants.

C FAUX On cherche $P(\bar{P} \cap \bar{M})$
D'après les probas composées, on a :
$P_{\bar{P}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{P}\cap\bar{M})}{P(\bar{P})}$ soit $P(\bar{P} \cap \bar{M}) = P_{\bar{P}}(\bar{M}) * P(\bar{P})$
Or $P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
Calculons $P_{\bar{P}}(\bar{M})$.
Or dans l'énoncé, on donne l'évènement complémentaire $P_{\bar{P}}(M)$. (c'est l'évènement complémentaire car sachant que le père N'EST PAS myope, la mère peut soit être myope soit ne pas l'être)
Donc : $P_{\bar{P}}(\bar{M}) = 1 - P_{\bar{P}}(M) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
Ainsi, $P(\bar{P} \cap \bar{M}) = P_{\bar{P}}(\bar{M}) * P(\bar{P}) = 0{,}4 * 0{,}4 = 0{,}16$

N.B : comme les évènements P et M sont indépendants alors leurs complémentaires le sont aussi, d'où $P(\bar{P} \cap \bar{M}) = P(\bar{P}) * P(\bar{M}) = [1 - P(P)] * [1 - P(M)] = 0{,}4 * 0{,}4 = 0{,}16$

D FAUX On cherche $P(E)$
D'après la formule des probas totales, en utilisant le système complet d'évènements, on a :
$P(E) = P(E \cap P \cap M) + P(E \cap \bar{P} \cap M) + P(E \cap P \cap \bar{M}) + P(E \cap \bar{P} \cap \bar{M})$
$= P_{P\cap M}(E) * P(P \cap M) + P_{\bar{P}\cap M}(E) * P(\bar{P} \cap M) + P_{P\cap\bar{M}}(E) * P(P \cap \bar{M}) + P_{\bar{P}\cap\bar{M}}(E) * P(\bar{P} \cap \bar{M})$

Il nous manque $P(P \cap \bar{M})$

- $P(P \cap \bar{M})$:

$P_P(\bar{M}) = \frac{P(P\cap\bar{M})}{P(P)}$, d'après la définition d'une proba conditionnelle.
$P(P \cap \bar{M}) = P_P(\bar{M}) * P(P)$
$= [1 - P_P(M)] * 0{,}6$ cf item C pour l'explication des évènements contraires
$= (1 - 0{,}6) * 0{,}6 = 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}24$

Dans la grosse formule cela donne :
$P(E) = P(E \cap P \cap M) + P(E \cap \bar{P} \cap M) + P(E \cap P \cap \bar{M}) + P(E \cap \bar{P} \cap \bar{M})$
$= P_{P\cap M}(E) * P(P \cap M) + P_{\bar{P}\cap M}(E) * P(\bar{P} \cap M) + P_{P\cap\bar{M}}(E) * P(P \cap \bar{M}) + P_{\bar{P}\cap\bar{M}}(E) * P(\bar{P} \cap \bar{M})$
$= 0{,}2 * 0{,}36 + 0{,}15 * 0{,}24 + 0{,}04 * 0{,}24 + 0{,}02 * 0{,}16$
$= 0{,}072 + 0{,}036 + 0{,}0096 + 0{,}0032$
$= 0{,}108 + 0{,}0128 = 0{,}1208 < 0{,}2$
Jaune voir item A, Vert voir item B, Bleu voir item ci-dessus, Rose voir item C

E VRAI On cherche $P_E(M)$
$P_E(M) = \frac{P(E\cap M)}{P(E)}$, d'après la définition d'une proba conditionnelle
Or $P(E) = 0{,}1208$, cf item D
Cherchons $P(E \cap M)$:
$P(E \cap M) = P(E \cap M \cap P) + P(E \cap M \cap \bar{P})$
$= P_{P\cap M}(E) * P(P \cap M) + P_{\bar{P}\cap M}(E) * P(\bar{P} \cap M)$, d'après les probas totales.
$= 0{,}2 * 0{,}36 + 0{,}15 * 0{,}24 = 0{,}072 + 0{,}036 = 0{,}108$
Jaune voir item A, Vert voir item B

Donc $P_E(M) = \frac{P(E\cap M)}{P(E)} = \frac{0{,}108}{0{,}1208} \approx \frac{0{,}10}{0{,}12} \approx \frac{5}{6}$

Question 21 - BB :

Le virus de la Toxoplasmose est un virus que peut attraper une maman pendant sa grossesse et dont les effets sont délétères pour le développement de l'embryon/fœtus.
Ci-dessous, les probabilités, en fonction de l'âge du de l'embryon/fœtus, d'être infecté par le virus de la toxoplamose.

Âge du futur bébé	Probabilité d'infection
<1Mois	0,5%
1Mois-2Mois	2%
>2Mois	6%

Soient 3 mamans enceintes.

- La maman 1 est enceinte du bébé A qui a 16 jours
- La maman 2 est enceinte du bébé B qui a 1,5 mois
- La maman 3 est enceinte du bébé C qui a 6 mois

On note A (respectivement B et C) l'évènement « Le bébé A (respectivement B et C) est infecté par le virus de la toxoplasmose »
Les évènements A,B et C sont mutuellement indépendants.

Aides aux calculs :

$0{,}5 * 98 * 6 = 288$; $99{,}5 * 2 * 6 = 1200$; $99{,}5 * 98 * 94 = 9212 * 10^2$

A. La probabilité que les 3 bébés soient infectés par le virus vaut 0,0006%.
B. La probabilité que le bébé A ou le bébé B soit infecté par le virus vaut exactement 2,5%.
C. La probabilité que 2 des 3 bébés au moins soient infectés par le virus vaut environ 0,16%.
D. Mais non ! La probabilité que 2 des 3 bébés au moins soient infectés par le virus vaut environ 16%.
E. La probabilité qu'aucun des 3 bébés ne soit infectés vaut environ 92%.

Question 21 : ACE

Pour ce QCM, l'énoncé est long. Il est primordial de le lire jusqu'au bout et de récolter les infos importantes pour les « traduire » en langage mathématiques afin de pouvoir résoudre l'exercice.

A VRAI On cherche $P(A \cap B \cap C)$
Or il est dit dans l'énoncé que les évènements A,B et C sont mutuellement indépendants.
Or, d'après la formule du cours : si les évènements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
On a donc l'égalité suivante : $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

$$= \frac{0{,}5}{100} * \frac{2}{100} * \frac{6}{100} = 6 * 10^{-6} = 6 * 10^{-4} * 10^{-2} = 0{,}0006\%$$

B FAUX On cherche $P(A \cup B)$
D'après la formule du cours $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
ATTENTION ! Indépendance =/= Incompatibilité (le résultat écrit dans l'item B est celui qu'on trouve si on prend A et B incompatible soit $P(A \cap B) = \emptyset$)
Ici comme les évènements A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

On calcule : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{0{,}5}{100} + \frac{2}{100} - \frac{0{,}5}{100} * \frac{2}{100}$$
$$= 2{,}5 * 10^{-2} - 1 * 10^{-4}$$
$$= 0{,}0249 = 2{,}49\%$$

C VRAI On cherche la proba qu'au moins 2 des 3 bébés soient infectés. Cela revient à dire soit 2 soit 3 bébés infectés. On dénombre tous les cas possibles :

- A et B infectés sans C
- A et C infectés sans B
- B et C infectés sans A
- A, B et C infectés

P(au moins 2 bébés infectés)= $P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$= \frac{0{,}5}{100} * \frac{2}{100} * \frac{94}{100} + \frac{0{,}5}{100} * \frac{98}{100} * \frac{6}{100} + \frac{99{,}5}{100} * \frac{2}{100} * \frac{6}{100} + \frac{0{,}5}{100} * \frac{2}{100} * \frac{6}{100}$$
$$= 94 * 10^{-6} + 288 * 10^{-6} + 1200 * 10^{-6} + 6 * 10^{-6}$$
$$= 1588 * 10^{-6}$$
$$= 0{,}1588\%$$

D FAUX Cf item C. C'est ce que l'on trouvait si on considérait seulement 2 évènements.

E VRAI On cherche $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$.
Or il est dit dans l'énoncé que les évènements A,B et C sont indépendants deux à deux.
Or, d'après la formule du cours : si les évènements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
Pour cet item cela donne : $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(\bar{C})$

$$= \frac{99{,}5}{100} * \frac{98}{100} * \frac{94}{100} = [10^2 * (100 - 2) * (100 - 6)] * 10^{-6}$$
$$= [10^2 * (10^4 - 600 - 200 - 12)] * 10^{-6}$$
$$= [10^2 * (10000 - 788)] * 10^{-6}$$
$$= 9212 * 10^2 * 10^{-6}$$
$$= 9212 * 10^{-4}$$

Question 22 – Ca papillonne :

Le médecin généraliste doit proposer aux jeunes filles vers l'âge de 14 ans de se faire vacciner contre le papillomavirus. Soit 2 laboratoires, L1 et L2, qui commercialisent dans les pharmacies, des lots de vaccins constitués de 2 types de vaccins : le vaccin V4 et le vaccin V9, qui protègent respectivement contre 4 et 9 souches virales.
Les types de vaccins V4 et V9 sont préparés et contrôlés indépendamment par les laboratoires. Le laboratoire L1 fournit 70% des pharmacies et le laboratoire L2 fournit 30% des pharmacies.

Des contrôles ont montré que, parmi les lots produits par les laboratoires L1 et L2 respectivement 99% et 98% des lots présentent un type de vaccin V9 qui protège entièrement contre les 9 souches virales du papillomavirus.
Dans le laboratoire L1, des contrôles additionnels ont montré que dans 4 lots sur 10 000, les 2 types de vaccins V4 et V9 ne protègent pas entièrement contre les 4 et 9 souches virales du papillomavirus.

A Lyon, les pharmacies se fournissent exclusivement dans le laboratoire L1.

Aides aux calculs : $0{,}99 * 0{,}96 = 0{,}9504$; $0{,}99 * 0{,}04 = 0{,}0396$; $0{,}96 * 0{,}04 = 0{,}0384$; $0{,}99 * 7 = 6{,}93$; $0{,}98 * 3 = 2{,}94$; $\frac{2{,}94}{9{,}87} = 0{,}298$; $0{,}99 * 0{,}99 = 0{,}9801$

A. Dans une pharmacie Lyonnaise, la probabilité que le type de vaccin V4 protège entièrement contre les 4 souches virales du papillomavirus vaut 96%.
B. Dans une pharmacie Lyonnaise, la probabilité qu'au moins un des deux types de vaccin V4 et V9 protègent entièrement contre les 4 et 9 souches virales du papillomavirus vaut 97%.
C. Au niveau national, on choisit aléatoirement un lot. La probabilité que dans ce lot, le type de vaccin V9 protège entièrement contre les 9 souches virales du papillomavirus vaut 0,987.

D. Au niveau national, on choisit aléatoirement un lot, dont le type de vaccin V9 protège parfaitement contre les 9 souches virales du papillomavirus. La probabilité que ce lot provienne du laboratoire L2 vaut exactement 30%.

Pour l'item E, on s'intéresse au schéma vaccinal. Celui-ci prévoit de réaliser 3 injections, avec 3 lots différents, à 0, 2 et 6 mois pour le type de vaccin V9 :

E. Une jeune fille lyonnaise a suivi le schéma vaccinal pour le papillomavirus. La probabilité qu'elle soit entièrement protégée contre les 9 souches virales du papillomavirus avec le type de vaccin V9 vaut exactement 98%.

Question 22 : AC

Traduction & explication de l'énoncé

Soient les évènements :

L1 : la pharmacie se fournit dans le laboratoire L1.
L2 : la pharmacie se fournit dans le laboratoire L2.
V4 : le type de vaccin V4 protège entièrement contre les 4 souches virales du papillomavirus.
$\overline{V4}$: le type de vaccin V4 NE protège PAS entièrement contre les 4 souches virales du papillomavirus.
V9 : le type de vaccin V9 protège entièrement contre les 9 souches virales du papillomavirus.
$\overline{V9}$: le type de vaccin V9 NE protège PAS entièrement contre les 9 souches virales du papillomavirus.

Les données de l'énoncé sont :
$P(L1) = 0{,}7$
$P(L2) = 0{,}3$
$P_{L1}(V9) = 0{,}99$ donc on déduit que $P_{L1}(\overline{V9}) = 0{,}01$
$P_{L2}(V9) = 0{,}98$ donc on déduit que $P_{L2}(\overline{V9}) = 0{,}02$
$P_{L1}(\overline{V4} \cap \overline{V9}) = \frac{4}{10000}$

On dit également que les types de vaccin sont préparés et contrôlés INDEPENDAMENT ce qui signifie que $P(V4 \cap V9) = P(V4) * P(V9)$ et que $P(\overline{V4} \cap \overline{V9}) = P(\overline{V4}) * P(\overline{V9})$.
Autrement dit le caractère entièrement protecteur du type de vaccin V4 n'influence aucunement le caractère entièrement protecteur du type de vaccin V9 et réciproquement.

A VRAI On cherche $P_{L1}(V4)$ car on est à Lyon (qui se fournit exclusivement dans le labo L1).
On sait que $P_{L1}(\overline{V4} \cap \overline{V9}) = \frac{4}{10000}$.
Or, comme les types de vaccins sont préparés INDEPENDAMMENT ; on peut écrire

$$P_{L1}(\overline{V4} \cap \overline{V9}) = P_{L1}(\overline{V4}) * P_{L1}(\overline{V9})$$

$$P_{L1}(\overline{V4}) = \frac{P_{L1}(\overline{V4} \cap \overline{V9})}{P_{L1}(\overline{V9})} = \frac{4 * 10^{-4}}{1 * 10^{-2}} = 4 * 10^{-2} = 0{,}04$$

Ainsi, $P_{L1}(V4) = 1 - P_{L1}(\overline{V4}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

B FAUX Toujours dans **le labo L1** (puisqu'on parle toujours des pharmacies Lyonnaises), on cherche la probabilité d'avoir AU MOINS 1 des 2 types de vaccin entièrement protecteur contre ses souches virales. C'est donc la probabilité que soit l'un le soit, soit l'autre, soit les deux.

On cherche $P_{L1}(V4 \cup V9)$

$$P_{L1}(V4 \cup V9) = P_{L1}(V4) + P_{L1}(V9) - P_{L1}(V4 \cap V9)$$
$$= 0{,}96 + 0{,}99 - 0{,}96 * 0{,}99 = 1{,}95 - 0{,}9504 = 0{,}9996$$

C VRAI On cherche $P(V9)$
$\mathrm{P(V9) = P(V9 \cap L1) + P(V9 \cap L2)}$, d'après la formule des probabilités totales.
$= P_{L1}(\mathrm{V9}) * P(L1) + P_{L2}(\mathrm{V9}) * P(L2)$
$= \frac{99}{100} . \frac{7}{10} + \frac{98}{100} . \frac{3}{10}$

$= \frac{693+294}{1000}$
$= \frac{987}{1000} = 0{,}987$

D FAUX On cherche $P_{V9}(L2) = \frac{P(V9 \cap L2)}{P(V9)}$.
Or on ne connaît pas $P(V9 \cap L2)$.
D'après l'énoncé, on a : $P_{L2}(V9) = \frac{98}{100}$.
Or : $P_{L2}(V9) = \frac{P(V9 \cap L2)}{P(L2)} = \frac{98}{100}$.
On en déduit que : $P(V9 \cap L2) = P_{L2}(V9).P(L2) = \frac{98}{100}.\frac{3}{10} = \frac{294}{1000}$.

Donc :
$P_{V9}(\mathrm{L2}) = \frac{P(V9 \cap L2)}{P(V9)}$
$= \frac{294}{1000}.\frac{1000}{987} \approx 0{,}298$

E FAUX On cherche la probabilité qu'une jeune fille lyonnaise soit entièrement protégée contre les 9 souches virales du papillomavirus avec le type de vaccin V9. Cette fille fait 3 injections. Cela revient à chercher la probabilité qu'elle soit tombée 3 fois sur un lot V9 qui protège entièrement contre les 9 souches virales du papillomavirus.

On cherche $P_{L1}(V9 \cap V9 \cap V9)$.
Comme les lots sont indépendants, cela revient à faire $P_{L1}(V9) * P_{L1}(V9) * P_{L1}(V9)$

$$P_{L1}(V9) * P_{L1}(V9) * P_{L1}(V9) = 0{,}99 * 0{,}99 * 0{,}99 = 0{,}9801 * (1 - 0{,}01)$$
$$= 0{,}9801 - 0{,}009801 = 0{,}970299$$

Question 23 - <3 :

L'arrêt cardiaque est le motif le plus fréquent d'appel téléphonique au SAMU.
On découpe la population en 3 catégories : les enfants, les jeunes adultes et les personnes âgées. Parmi les sujets faisant un arrêt cardiaque, 80% sont des personnes âgées et 15% des adultes jeunes.
Chez les personnes âgées, on considère que les deux causes majoritaires d'arrêt cardiaque sont le syndrome coronarien aigu (SCA) et l'hypotension orthostatique.
Chez les jeunes adultes, on considère que les deux causes majoritaires d'arrêt cardiaque sont le syndrome coronarien aigu (SCA) et les toxiques.
Chez les enfants, on considère que les deux causes majoritaires d'arrêt cardiaque sont les toxiques et l'hypothermie.
On considèrera négligeables les probabilités d'avoir un arrêt cardiaque pour des causes autres que celles listées ci-dessus.

La probabilité chez un adulte jeune de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA vaut 0,35.
La probabilité chez un enfant de faire un arrêt cardiaque à cause de toxiques vaut 0,4.
La probabilité de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA vaut 0,65.

Aides aux calculs : $0{,}35 * 0{,}15 \approx 0{,}05$ $\quad\quad$ $0{,}65 * 0{,}15 \approx 0{,}1$

A. La probabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA vaut 0,75.
B. La probabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA est 3 fois supérieure à la probabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'hypotension orthostatique.
C. La probabilité de faire un arrêt cardiaque à cause de toxiques vaut moins de 15%.
D. Lorsqu'un sujet est pris en charge par le SAMU pour arrêt cardiaque pour cause toxique, il s'agit d'un enfant dans moins de 20% des cas.

E. Le SAMU prend plus souvent en charge des personnes âgées en arrêt cardiaque par hypotension orthostatique que des jeunes adultes en arrêt cardiaque pour cause toxique.

Question 23 : ABCDE

Soient les évènements
« A : La personne faisant un arrêt cardiaque est une personne âgée »
« B : La personne faisant un arrêt cardiaque est un adulte jeune »
« C : La personne faisant un arrêt cardiaque est un enfant »
« SCA : La personne fait un arrêt cardiaque à cause d'un syndrôme coronarien aigu »
« T : La personne fait un arrêt cardiaque à cause de toxiques »
« O : La personne fait un arrêt cardiaque à cause d'une hypotension orthostatique »
« F : La personne fait un arrêt cardiaque à cause d'une hypothermie (F comme froid) »

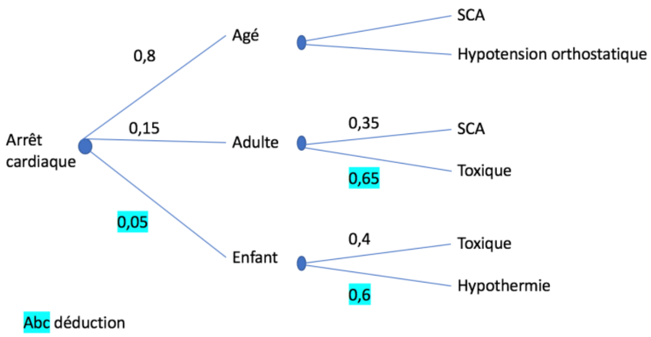
L'énoncé nous donne :

$$P(A) = 0{,}8$$

$P(B) = 0{,}15$ donc on déduit que $P(C) = 0{,}05$

$$P_B(SCA) = 0{,}35$$
$$P_C(T) = 0{,}4$$
$$P(SCA) = 0{,}65$$

Sur un arbre ça donne :



A VRAI On cherche $P_A(SCA)$
En utilisant la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(SCA) = P(SCA \cap A) + P(SCA \cap B)$$
$$P(SCA) = P_A(SCA) * P(A) + P_B(SCA) * P(B)$$

Donc

$$P_A(SCA) = \frac{P(SCA) - P_B(SCA) * P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}65 - 0{,}35 * 0{,}15}{0{,}8} = 0{,}75$$

La probabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA vaut 0,75

B VRAI Chez les personnes âgées, on considère que les deux causes majoritaires d'arrêt cardiaque sont le syndrôme coronarien aigu (SCA) et l'hypotension orthostatique. Donc les évènements SCA (« La personne fait un arrêt cardiaque à cause d'un syndrôme coronarien aigu ») et O (« La personne fait un arrêt cardiaque à cause d'une hypotension orthostatique ») sont complémentaires, la somme de leur probabilité vaut 1.
D'après la question A, $P_A(SCA) = 0{,}75$ donc $P_A(O) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
Donc laprobabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'un SCA est 3 fois supérieure à la probabilité chez une personne âgée de faire un arrêt cardiaque à cause d'hypotension orthostatique.

C VRAI On cherche $P(T)$
En utilisant les probabilités totales, on peut écrire :

$$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap C)$$

$$= P_B(T) * P(B) + P_C(T) * P(C)$$
$$= 0{,}65 * 0{,}15 + 0{,}4 * 0{,}05$$
$$= 0{,}1 + 0{,}02$$
$$= 0{,}12$$

Abc voir arbre de probabilité pour explications de la valeur.
La probabilité de faire un arrêt cardiaque à cause de toxiques vaut moins de 15%.

D VRAI On cherche $P_T(C)$
D'après la formule des probas conditionnelles : $P_T(C) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)} = \frac{P_C(T) * P(C)}{P(T)}$

$$= \frac{0{,}4 * 0{,}05}{0{,}12} = \frac{0{,}02}{0{,}12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

Lorsqu'un sujet est pris en charge par le SAMU pour arrêt cardiaque pour cause toxique, il s'agit d'un enfant dans moins de 20% des cas.

E VRAI On compare $P(A \cap O)$ et $P(B \cap T)$

$$P(A \cap O) = P_A(O) * P(A) = [1 - P_A(SCA)] * P(A) = [1 - 0{,}75] * 0{,}8 = 0{,}25 * 0{,}8 = 0{,}2$$

$$P(B \cap T) = P_B(T) * P(B) = [1 - P_B(SCA)] * P(B) = [1 - 0{,}35] * 0{,}15 = 0{,}65 * 0{,}15 = 0{,}1$$

Donc $P(A \cap O)$>$P(B \cap T)$
Le SAMU prend plus souvent en charge des personnes âgées en arrêt cardiaque par hypotension orthostatique que des jeunes adultes en arrêt cardiaque pour cause toxique.

Question 24 – « Do I speak Alcoholish » ? :

La soirée d'intégration est l'événement le plus attendu de 500 néo-P2. Comme pour la veille des examens, ils se préparent. Ils pensent à leur déguisement, à des boissons qu'ils vont prendre, à des plans de folie qu'ils vont faire à 4h58 du mat… Cependant, ils ont oublié que les cours d'Anglais commencent à 8h du matin le lendemain.
Nous savons que 400 étudiants ont réussi à avoir une place à la soirée.

On définit :
« S » : l'événement « l'étudiant va en soirée »
« C » : l'événement « l'étudiant assiste au cours d'Anglais »

Voici un petit tableau qui résume la situation :

	S	$\bar{S}$
C	0,16	0,18
$\bar{C}$	0,64	0,02

A. La probabilité qu'un étudiant n'aille pas en cours d'Anglais est de 0,34.
B. Sachant que l'étudiant ne va pas en soirée d'intégration, la probabilité qu'il soit absent le lendemain est de 0,1.
C. $P(S \cup C) = 0{,}98$
D. Les événements « S » et « C » sont indépendants.
E. Les événements « S » et « C » sont incompatibles.

Question 24 – « Do I speak Alcoholish » ? : BC

A FAUX À l'aide des données du tableau :

	S	$\bar{S}$

C	0,16	0,18
$\bar{C}$	0,64	0,02

$P(\bar{C}) = P(S \cap \bar{C}) + P(\bar{S} \cap \bar{C})$ = 0,64 + 0,02 = 0, 66

B VRAI

$$P(\bar{C}|\bar{S}) = \frac{P(\bar{C} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})}$$

Avec : $P(\bar{S}) = P(\bar{S} \cap C) + P(\bar{S} \cap \bar{C}) = 0{,}18 + 0{,}02 = 0{,}20$

	S	$\bar{S}$
C	0,16	0,18
$\bar{C}$	0,64	0,02

$$P(\bar{C}|\bar{S}) = \frac{0{,}02}{0{,}2}$$

$$P(\bar{C}|\bar{S}) = \frac{2}{20} = 0{,}1$$

C VRAI

$$P(S \cup C) = P(S) + P(C) - P(S \cap C)$$

$$P(S \cup C) = (1 - P(\bar{S})) + \left(1 - P(\bar{C})\right) - P(S \cap C)$$

On utilise ici la probabilité complémentaire : $P(S) + P(\bar{S}) = 1$

$$P(S \cup C) = 0{,}2 + (1 - 0{,}66) - 0{,}16$$

$$P(S \cup C) = 0{,}98$$

D FAUX Pour savoir si les événements sont indépendants, il y a deux manières de traiter la question :
Soit on peut démontrer que :

$$P\ (C|S) = P(C)$$

Ou encore :

$$P(C \cap S) = P(S)\ \times P(C)$$

- **Première méthode**

On a :

$$P(C \cap S) = 0{,}16$$

Et :

$$P(C) \times P(S) = 0{,}34\ \times 0{,}8 = 0{,}272$$

On constate que :

$$P(C \cap S) \neq P(C)\ \times P(S)$$

Les événements ne sont donc pas indépendants.

- **Une deuxième méthode était possible** :

On sait que P(C) = 0,34 on va chercher la valeur de $P(C|S)$.

P(C|S) = $\frac{P(S \cap C)}{P(S)} = \frac{0{,}16}{0{,}8} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$$P(C|S) \neq P(C)$$

E FAUX Pour voir si 2 événements sont incompatibles, il faut vérifier si leur intersection est vide.
Ici $P(C \cap S) \neq 0$, donc l'intersection n'est pas vide, les événements ne sont pas incompatibles.

Question 25 – Le pique-nique parfait ?

L'équipe de Biostats adore le sport et la nature. Après un semi-marathon, elle décide d'organiser un gigantesque pique-nique au Parc de la Tête d'Or avec tout le Tutorat. Didou, intéressée par la bouffe qu'on apporte, s'amuse à dresser une petite liste. A la fin, elle remarque que les gens n'apportent que des biscuits, des brioches et des chips.
On considère qu'une personne amène soit des biscuits, soit des brioches, soit des chips. Ainsi, il est impossible que l'étudiant apporte à la fois des chips et des brioches.
Un participant sur dix apporte des biscuits.

- ¼ des biscuits ne sont pas au chocolat
- ¾ des brioches ne sont pas au chocolat
- 70% des participants apportent des chips qui ne sont pas au chocolat.

Elle part sur le principe que les chips au chocolat n'existent pas !

A. La probabilité qu'un participant choisi aléatoirement ramène des biscuits au chocolat est de 0,075%.
B. La probabilité qu'un participant choisi aléatoirement apporte des chips est de 0,7.
C. La probabilité que les aliments ne contiennent pas du chocolat est de 0,875.
D. Si l'aliment contient du chocolat, la probabilité que cela soit des brioches est de 0,4.

Didou a également noté qu'il y a 3 retardataires parmi les participants qui ont acheté indépendamment leur nourriture.

E. La probabilité qu'un seul d'entre eux n'achète pas de biscuits est de 0,243.

<u>Question 25 – Le pique-nique parfait ?</u> BCD

On définit les événements :

B : l'événement « le participant apporte des biscuits »
Br : l'événement « le participant apporte des brioches »
Ch : L'événement « le participant apporte des chips »
C : l'événement « l'aliment est au chocolat »

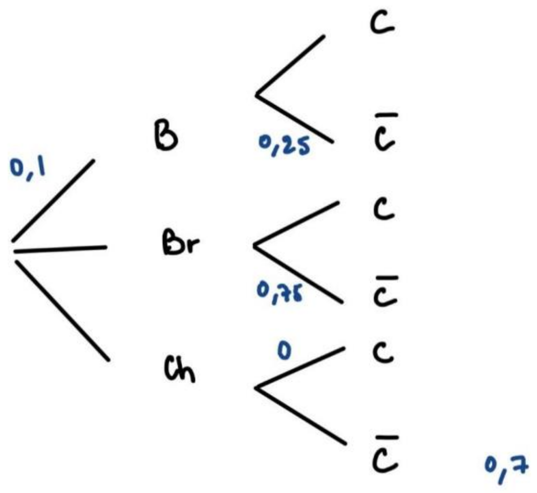
On peut traduire les probabilités de l'énoncé :

$$P(B) = 0{,}1$$
$$P(\bar{C}|B) = 0{,}25$$
$$P(C|Br) = 0{,}75$$
$$P(Ch \cap \bar{C}) = 0{,}7$$

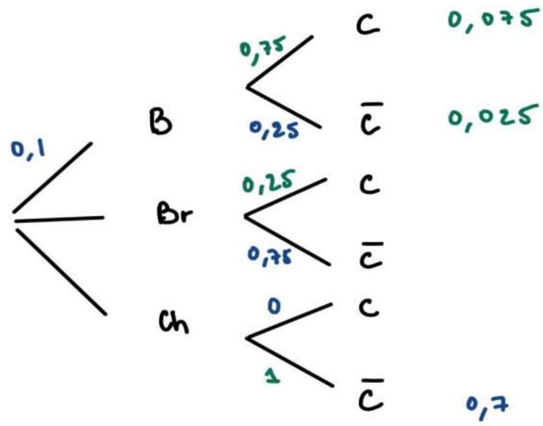
Enfin, le fait que les chips au chocolat n'existe pas signifie que sachant qu'une personne amène des chips, elles ne peuvent pas être au chocolat et donc :

$$P(C|Ch) = 0$$

Pour cet exercice, on peut commencer à faire un arbre avec les données de l'énoncé :



Et on déduit les probabilités des événements complémentaires et les probabilités composées (en vert) :



A FAUX

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C|B) = P(B) \times (1 - P(\bar{C}|B) = 0{,}1 \times (1 - 0{,}25) = 0{,}1 \times 0{,}75$$
$$P(B \cap C) = 0{,}075$$

Soit : 7,5%

B VRAI

$$P(Ch) = \frac{P(Ch \cap \bar{C})}{P(\bar{C}|Ch)} = \frac{0{,}7}{1} = 0{,}7$$

(Je vous rappelle la formule des probabilités composées : $P(Ch \cap \bar{C}) = P(Ch) \times P(\bar{C}|Ch)$)

C VRAI On utilise la formule de la probabilité totale :

$$P(\bar{C}) = P(B \cap \bar{C}) + P(Br \cap \bar{C}) + P(Ch \cap \bar{C})$$

Pour résoudre cette question, on vous propose de décomposer les 3 termes :

- $P(B \cap \bar{C})$:

$$P(B \cap \bar{C}) = P(B) \times P(\bar{C}|B) = 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}025$$

Ce sont les données de l'énoncé.

- $P(Br \cap \bar{C})$:

$$P(Br \cap \bar{C}) = P(Br) \times P(\bar{C}|Br)$$

Dans un premier temps, on cherche $P(Br)$:

$$P(Br) = 1 - \big(P(B) + P(Ch)\big)$$

$$P(Br) = 1 - \left(P(B) + P(Ch)\right) = 1 - (0{,}1 + 0{,}7)$$
$$P(Br) = 0{,}2$$

On peut alors calculer :

$$P(Br \cap \bar{C}) \ = P(Br) \times P(\bar{C}|Br) = 0{,}2 \times \ 0{,}75 = 0{,}15$$

- $P(Ch \cap \bar{C}) = 0{,}7$ (Donnée de l'énoncé)

Pour conclure :

$$P(\bar{C}) = P(B \cap \bar{C}) + P(Br \cap \bar{C}) + P(Ch \cap \bar{C})$$
$$P(\bar{C}) = 0{,}025 + 0{,}15 + 0{,}7$$
$$P(\bar{C}) = 0{,}875$$

D VRAI

$$P(Br|C) = \frac{P(Br \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|Br) \times P(Br)}{1 - P(\bar{C})} = \frac{0{,}25 \ \times 0{,}2}{1 - 0{,}875} = \frac{0{,}05}{0{,}125} = \frac{50}{125} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$
$$P(Br|C) = 0{,}4$$

E FAUX On cherche à calculer la probabilité qu'un seul des 3 retardataires n'apporte pas de biscuits. Imaginons qu'il s'agisse du retardataire numéro 1. Dans ce cas, les retardataires 2 et 3 amènent des biscuits. La probabilité de cet événement est :

$$P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) = P(\overline{B_1}) \times P(B_2) \times P(B_3) = 0{,}9 \ \times 0{,}1 \times 0{,}1$$
$$P(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) = 0{,}009$$

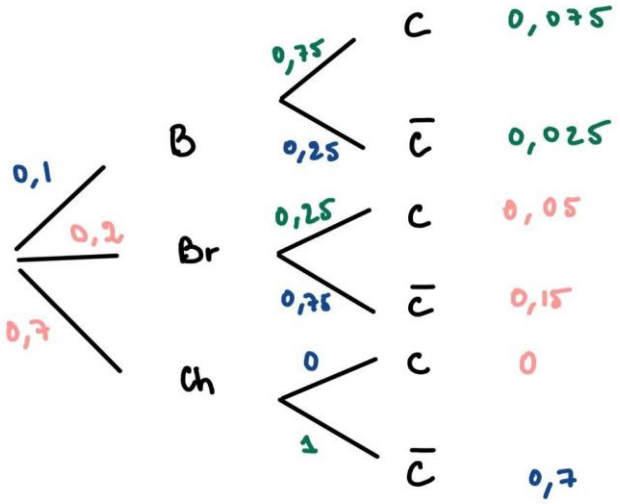
Or, parmi ces trois retardataires, il y a trois possibilités pour choisir le retardataire qui n'apporte pas de biscuits :

Soit : $\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$; $B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$; $B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$

De ce fait, il faut multiplier notre résultat par 3. La probabilité qu'un seul d'entre eux n'achète pas de biscuits est alors de :

$$P = \ 0{,}009 \ \times 3 = 0{,}027$$

À la fin, on obtient :



Question 26 – une petite faim ? :

D'après une étude américaine en 2014, 80% des femmes enceintes ont des fringales. Ces dernières sont de fortes envies d'aliments, plus spécifiques que la simple faim, et auxquelles il est très difficile de résister. Cela peut s'expliquer par les variations hormonales, notamment de la progestérone qui est sécrétée en abondance pendant la grossesse ou en période post-ovulatoire. Par conséquent, beaucoup de femmes rapportent des fringales, similaires à celles de la grossesse. Parmi les femmes qui ne sont pas enceintes, les chercheurs ont noté que 30% d'entre elles ne faisaient pas état d'envies alimentaires.

De plus, on souhaite savoir si les aliments consommés sont toujours sains. Si la femme est enceinte, ¾ des aliments consommés sont sains. On sait également que 0,28% des femmes sont à la fois enceintes, n'ont pas de fringales et mangent sainement.

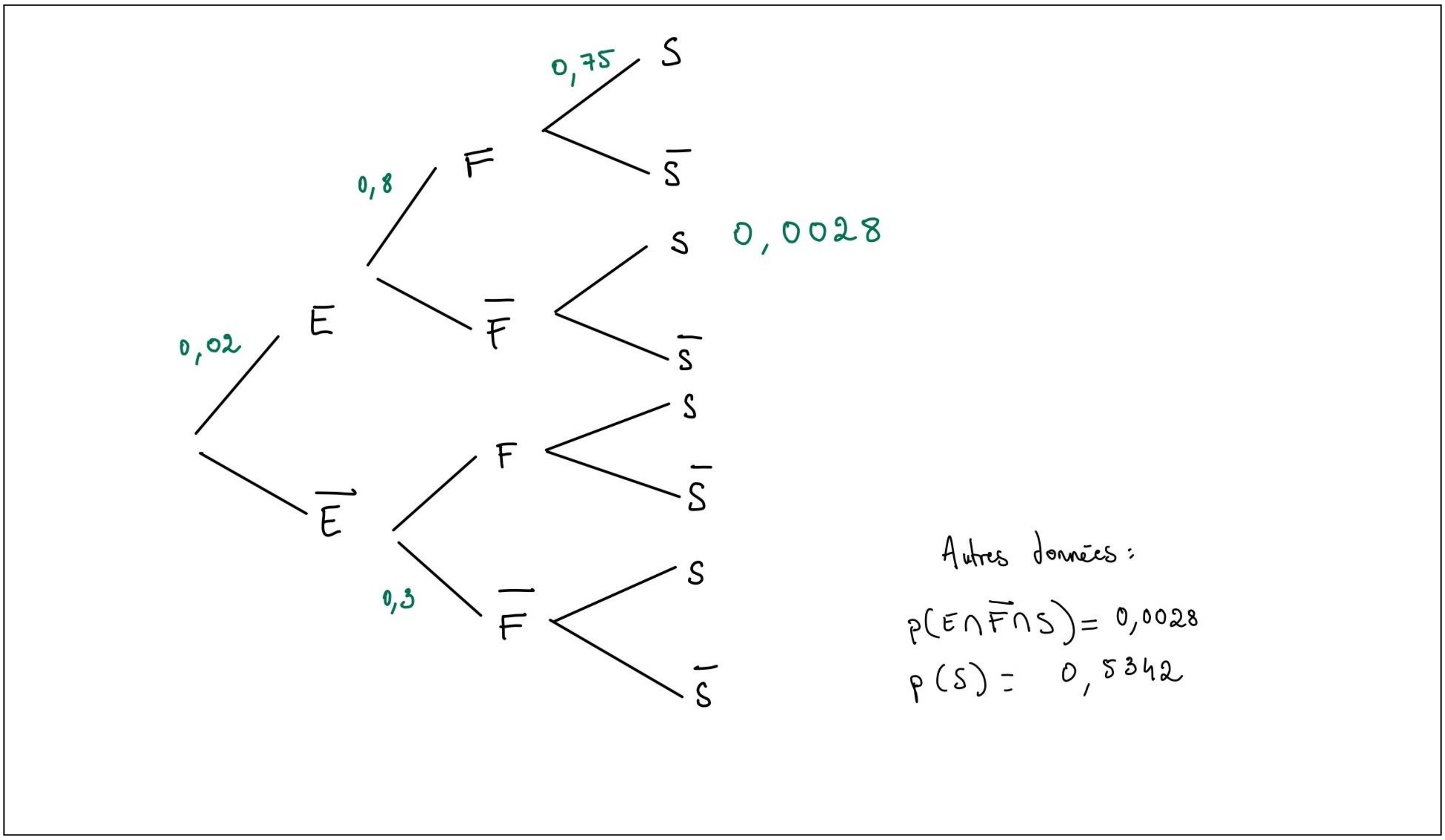
Pour cette étude, on compte environ 2 grossesses sur 100 parmi les femmes américaines en 2014 et la probabilité qu'une femme consomme des aliments sains est de 0,5342.

Aide au calcul : 0,016/0,702 = 0,0228 0,016/0,3 = 0,053 0,98 x 0,7 = 0,686

A. La probabilité que la femme soit enceinte et n'ait pas de fringales est de 0,016
B. La probabilité que la femme ait des fringales est égale à 0,702
C. Sachant que la femme a des fringales, la probabilité qu'elle soit enceinte est de 0,053
D. La probabilité que la femme soit enceinte ou ait des fringales est de 0,738
E. Les événements « Consommer des aliments sains » et « Être enceinte » ne sont pas indépendants.

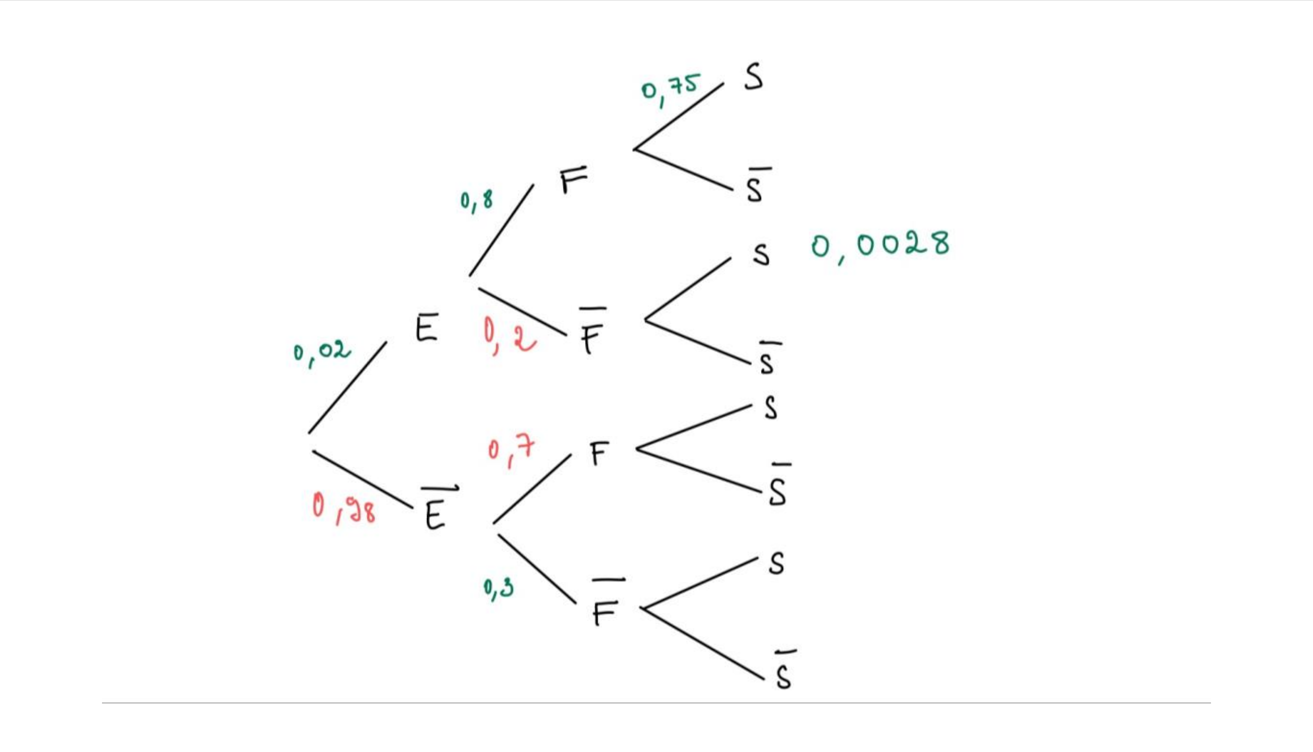
Question 26 – une petite faim ? : BE

Analyse du sujet : On commence par définir nos événements
Soient :
« E » : l'événement « Être enceinte »
« F » : l'événement « Avoir des fringales »
« S » : l'événement « Avoir un régime alimentaire sain »
Avec les données de l'énoncé, on construit un arbre :



Et on le complète avec les **probabilités complémentaires** (Ex : $P(\acute{E}) = 1 - P(E)$)

:



A FAUX Il s'agit d'une probabilité composée

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E).P(\bar{F}|E) = 0{,}02.0{,}2 = 0{,}004$$

B VRAI On utilise la formule de la probabilité totale :

$$P(F) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)$$
$$P(F) = P(E).P(F \vee E) + P(\bar{E}).P(F \vee \bar{E})$$
$$P(F) = 0{,}02 \times 0{,}8 + 0{,}98.0{,}7$$
$$P(F) = 0{,}016 + 0{,}686$$
$$P(F) = 0{,}702$$

C FAUX

Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle :

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$
$$P(E|F) = \frac{0{,}016}{0{,}702}$$

Avec l'aide au calcul, on trouve :

$$P(E|F) = 0{,}0228$$

D FAUX

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$
$$P(E \cup F) = 0{,}02 + 0{,}702 - 0{,}016$$
$$P(E \cup F) = 0{,}706$$

E VRAI

- 1ère méthode :

Pour prouver que deux événements sont indépendants, on peut vérifier que :

$$P(E \cap S) = P(E).P(S)$$
$$P(E).P(S) = 0{,}02.0{,}5342 = 0{,}010684$$

Et :

$$P(E \cap S) = P(E \cap F \cap S) + P(E \cap \bar{F} \cap S)$$
$$P(E \cap S) = P(S \vee E \cap F).P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F} \cap S)$$
$$P(E \cap S) = 0{,}016\ \times 0{,}75 + 0{,}0028$$
$$P(E \cap S) = 0{,}012 + 0{,}0028$$
$$P(E \cap S) = 0{,}0148$$

On observe que :

$$P(E \cap S) \neq P(E).P(S)$$

On peut donc conclure que les événements ne sont pas indépendants.

- Autre méthode : On regarde si :

$$P(S \vee E) = P(S)$$

On sait que P(S) = 0,5342
On calcule : Idem, revoir l'application numérique le numérateur est faux

$$P(S|E) = \frac{P(E \cap S)}{P(E)} = \frac{P(E \cap F \cap S) + P(E \cap \bar{F} \cap S)}{P(E)} = \frac{0{,}0148}{0{,}02} = 0{,}74$$

On voit que :

$$P(S|E) \neq P(S)$$

On peut donc conclure que les événements ne sont pas indépendants.

Question 27 – Vamos a la playa :

Juste après leurs examens, les 400 P1 réfléchissent à ce qu'ils vont faire le premier jour de leurs vacances. D'après un sondage, deux principales tendances se démarquent de l'ensemble des propositions. On considère que 40% des P1 souhaitent aller à la plage pour fuir la canicule tandis que le reste préfère se reposer chez eux.

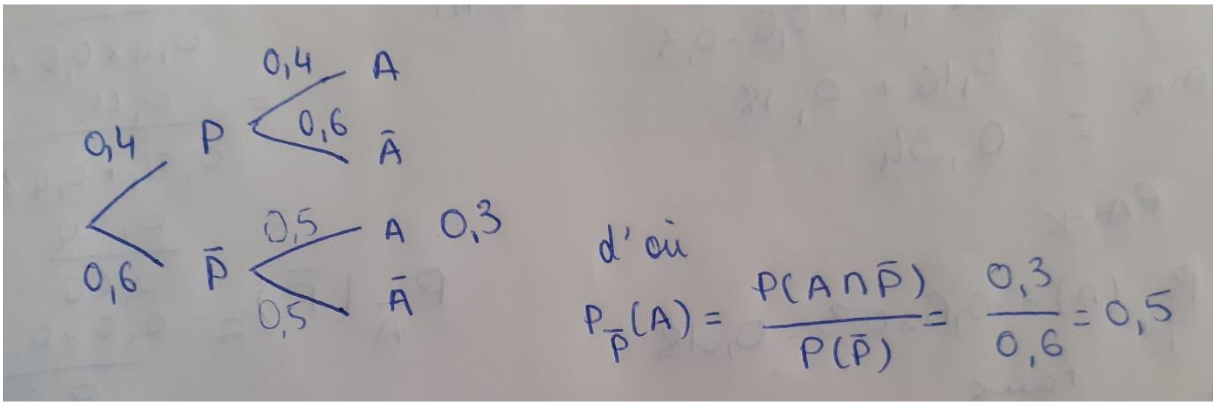
Les deux cinquièmes de P1 qui partent à la plage vont se regrouper pour faire les activités (BBQ, jeux de société, karaoke…). La proportion des P1 qui restent chez eux et qui font aussi des activités semblables à ceux qui sont partis est de 3/10.

A. On compte 64 P1 qui vont partir à la plage et qui ne font rien.
B. Il y a plus de personnes qui vont à la plage sachant qu'elles ne font rien que de personnes qui restent chez eux sachant qu'elles ne font rien.
C. La probabilité qu'une P1 quelconque fasse quelque chose pendant le premier jour des vacances est de 46 pour mille.
D. On peut considérer que l'événement « Faire les activités » est indépendant de l'événement « Partir à la plage ».
E. La probabilité qu'un P1 choisi aléatoirement fasse des activités le premier jour sachant qu'il reste chez lui est de 0,5.

Question 27 – Vamos a la playa : E

Analyse du sujet :

N = 400 P1
On définit les événements :
« P » : l'événement « Partir à la plage »
« A » : l'événement « Faire les activités »



A FAUX Le nombre de P1 qui vont à la plage et qui ne font rien correspond à :

$$N\,.\,p(P \cap \bar{A})$$

Avec :

$p(P \cap \bar{A})$ la probabilité qu'un P1 quelconque aille à la plage et ne fasse rien.

$$p(P \cap \bar{A}) = p(\bar{A}|P).\,p(P) = 0{,}4.\,0{,}6 = 0{,}24$$

Donc :

$$N\,.\,p(P \cap \bar{A}) = 400\,.\,0{,}24 = 96$$

B FAUX Ici, on applique le même raisonnement que la question précédente.

Le nombre de personnes qui vont à la plage sachant qu'elles ne font rien :

$$N\,.\,p(P|\bar{A})$$

Avec :

$$p(P|\bar{A}) = \frac{p(P \cap \bar{A})}{p(\bar{A})}$$

Pour trouver $p(\bar{A})$, on applique la formule de la probabilité totale :

$$p(\bar{A}) = \; p(P \cap \bar{A}) + p(\bar{P} \cap \bar{A}) = p(P).\,p(\bar{A}|P) + p(\bar{P}).\,p(\bar{P}|\bar{A})$$

On connaît déjà : $p(P \cap \bar{A})$

On peut calculer : $p(\bar{P} \cap \bar{A}) = p(\bar{P}).\,p(\bar{P}|\bar{A}) = 0{,}6.0{,}5 = 0{,}30$

Donc : $p(\bar{A}) = 0{,}24 + 0{,}30 = 0{,}54$

Soit :

$$p(P|\bar{A}) = \frac{p(P \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0{,}24}{0{,}54} = \frac{0{,}12}{0{,}27} = \frac{4}{9}$$

De même, le nombre de personnes qui restent chez eux sachant qu'elles ne font rien correspond à :

$$N\,.\,p(\bar{P}|\bar{A})$$

Or :

$$p(\bar{P}|\bar{A}) = 1 - p(P|\bar{A}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

On peut en déduire que :

$$N.\,p(P|\bar{A}) < N.\,p(\bar{P}|\bar{A})$$

Le nombre de personnes qui partent à la plage sachant qu'elles ne font rien est inférieur au nombre de personnes qui restent chez eux sachant qu'elles ne font rien.

C FAUX La probabilité qu'une P1 quelconque fasse quelque chose pendant le premier jour des vacances est de :

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}54 = 0{,}46$$

Soit : 46%

D FAUX Pour démontrer l'indépendance de deux événements, on va regarder :

$$p(A).p(P) = 0{,}46.0{,}4 = 0{,}184$$
$$p(A \cap P) = 0{,}4.0{,}4 = 0{,}16$$

Donc :

$$p(A \cap P) \neq p(A).p(P)$$

Les deux événements « Faire des activités » et « Partir à la plage » ne sont pas indépendants.
Ou alors on peut regarder si $P(A) = P_P(A)$ or ici ce n'est pas le cas.

E VRAI La probabilité qu'un P1 choisi aléatoirement fasse des activités le premier jour sachant qu'il reste chez lui est de :

$$p(A|\bar{P}) = \frac{p(A \cap \bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$$

Question 28 – Le grand Conseil :

Vos chers tuteurs de Biostatistiques hésitent sur le choix des exercices pour l'examen blanc. Ils décident donc de convoquer le Grand Conseil regroupant tous les responsables et les tuteurs du Tutorat. Il y a 70 membres au total qui assistent à la réunion, dont 30 responsables du Tutorat.
Chez les tuteurs du Conseil, 60% souhaitent faire les exercices sur les probabilités et 20% souhaitent les exercices sur les variables aléatoires. Par ailleurs, 10% souhaitent à la fois les exercices sur les probabilités et sur les variables aléatoires.
En revanche, chez les responsables, la probabilité qu'un responsable souhaite mettre les 2 exercices est égale à 1/3 et la probabilité qu'il ne souhaite mettre aucun des deux est égale à 2/3.
Aide aux calculs : $\frac{1}{7} \approx 0{,}14$; $\frac{3{,}4}{7} \approx \frac{3{,}5}{7}$

A. Dans cet exercice, l'événement « Faire les exercices sur les probabilités » définit un ensemble fini.
B. Parmi les tuteurs, 30% ne souhaitent préparer ni les exos sur les probabilités, ni les exos sur les variables aléatoires.
C. Les tuteurs qui souhaitent faire les exos de variables aléatoires mais pas les exos de probabilités constituent à peu près 56% du Grand Conseil.
D. Si un membre du conseil veut faire les exercices sur les probabilités, la probabilité qu'il soit un responsable est d'environ 0,28.
E. Dans le conseil, vouloir qu'il y ait des exercices sur les probabilités est indépendant du fait d'être tuteur.

Question 28 – Le grand Conseil : ABD

Analyse du sujet :
On commence par définir tous les événements :

- « R » : l'événement « être responsable »
- « T » : l'événement « être tuteur »
- « V » : l'événement « faire les exos sur les variables aléatoires »
- « P » : l'événement « faire les exos sur les probabilités »

Puis, on peut noter les probabilités données dans l'énoncé :

- $p(R) = \frac{4}{7}$
- $p(T) = \frac{3}{7}$
- $p(P|T) = 0{,}6$
- $p(V|T) = 0{,}2$
- $p(V \cap P|T) = 0{,}1$
- $p(P|R) = \frac{1}{3}$

- $p(V|R) = \frac{1}{3}$
- $p(V \cap P|R) = \frac{1}{3}$

On peut traduire l'énoncé à l'aide des tableaux ci-dessous.
Pour les Tuteurs :
(Les valeurs surlignées sont celles données dans l'énoncé)

	P	$\bar{P}$	
V	0,1	0,1	0,2
$\bar{V}$	0,5	0,3	0,8
	0,6	0,4	1

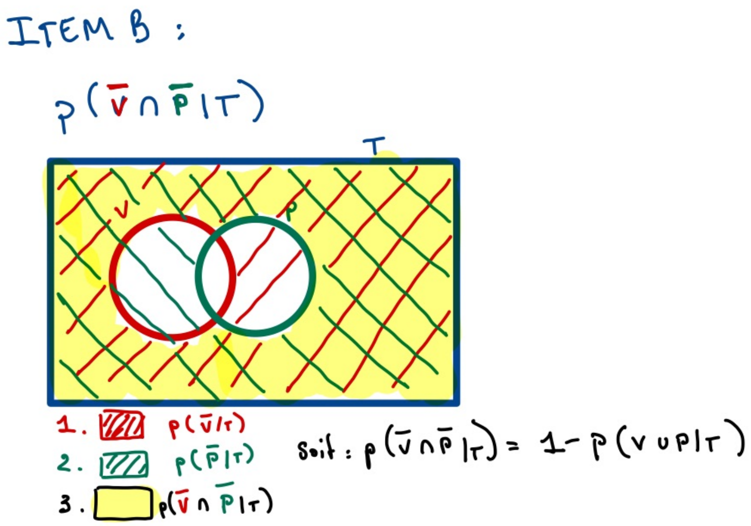
Pour les Responsables :

	P	$\bar{P}$	
V	1/3	0	1/3
$\bar{V}$	0	2/3	2/3
	1/3	2/3	1

A VRAI Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'événements (comme le statut vis-à-vis de la maladie définie comme étant « malade » ou « témoin »).

Dans notre cas, il s'agit du choix des exercices sur les probabilités avec 2 issus « oui » et « non ».

B VRAI On cherche ici : $p(\bar{V} \cap \bar{P}|T)$
Avant d'entamer les calculs, on vous met un petit schéma de la situation :



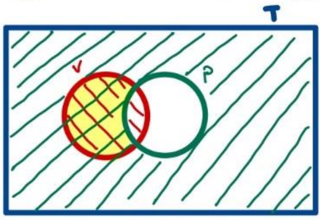
Alors :

$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = p(\overline{V \cup P}|T)$$
$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = 1 - P(V \cup P|T)$$
$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = 1 - \big(P(V|T) + P(P|T) - P(V \cap P|T)\big)$$
$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = 1 - (0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}1)$$
$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = 1 - 0{,}7$$
$$p(\bar{V} \cap \bar{P}|T) = 0{,}3$$

C FAUX On cherche $p(T \cap V \cap \bar{P})$
De même, avec un schéma, ça paraît plus clair :

ITEM C :

$p(T \cap V \cap \bar{P}) = p(V \cap \bar{P} | T) \times p(T)$ → probabilité composée



Soit : $p(V \cap \bar{P} | T) = p(V | T) - p(V \cap P | T)$

1. : $p(V|T)$
2. : $p(\bar{P}|T)$
3. $p(V \cap \bar{P}|T)$

$$p(T \cap V \cap \bar{P}) = P(V \cap \bar{P}|T) \times P(T)$$
$$p(T \cap V \cap \bar{P}) = \big(P(V|T) - P(V \cap P|T)\big) \times P(T)$$
$$p(T \cap V \cap \bar{P}) = (0{,}2 - 0{,}1) \times \frac{4}{7}$$
$$p(T \cap V \cap \bar{P}) = 0{,}1 \times \frac{4}{7} = 0{,}1 \times 4 \times 0{,}14 = 0{,}056$$

Soit : 5,6% et non 56%

- Il y a une deuxième méthode pour trouver $P(V \cap \bar{P}|T)$ sans passer par le schéma :

Ici, on vous a donné les effectifs dans l'énoncé. Avec le tableau, chez les tuteurs, on a 10% des 40 tuteurs, soit 4 tuteurs sur les 70 membres du conseil.
On retombe bien sur le même résultat.

D VRAI On a ici une probabilité conditionnelle à calculer :

- Soit : On peut procéder étape par étape, en manipulant la formule des probabilités composées

$$P(R \cap P) = P(R|P) \times P(P)$$
$$P(R|P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)}$$
$$P(P) = P(T \cap P) + P(R \cap P)$$
$$P(P) = P(P|T) \times P(T) + P(P|R) \times P(R)$$
$$P(P) = 0{,}6 \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$$
$$P(P) = \frac{2{,}4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3{,}4}{7} \approx \frac{3{,}5}{7} \approx \frac{1}{2}$$

Donc : $p(R|P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|R) \times P(R)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1}{7} \approx 2 \times 0{,}14 \approx 0{,}28$

- Soit on peut directement appliquer la formule du théorème de Bayes, qui nous donne le même résultat :

$$P(R|P) = \frac{P(R) \times P(P|R)}{P(R) \times P(P|R) + P(T) \times P(P|T)}$$

E FAUX On se demande si l'événement « faire des exercices sur les probabilités » et l'événement « être tuteur » sont indépendants.
On peut montrer que $P(P \cap T) = P(P) \times P(T)$ ou $P(P|T) = P(P)$
Dans notre cas, la deuxième méthode est plus rapide car nous avons déjà calculé les probabilités de $P(P|T)$ et $P(P)$.

On a : $P(P|T) = 0{,}6$ et $\mathrm{P(P)} = 0{,}5$
Ainsi, les événements P et T ne sont pas indépendants.

Question 29 – GAFAS : GOOGLE APPLE FACEBOOK AMAZON & SANTABRIK :

Connaissez-vous la firme transnationale Santabrik ?
Afin de fabriquer tous les cadeaux en un temps très limité, Santa Claus est à la tête de plusieurs milliers d'usines de production.
Le 4 décembre, il décide de passer par Santagrad pour faire un compte-rendu sur la qualité des jouets fabriqués dans deux usines, Santabrik A et Santabrik B. Sachant que l'usine A assure la production de 7/10 des jouets fabriqués dans les 2 usines, voici les notes de Santa Claus concernant les caractéristiques respectives des 2 usines :

	A	B
Proportion de jouets conformes	0,85	0,99
Parmi les conformes, proportions de jouets non-distribués	0,1	0,02
Parmi les non-conformes, proportions de jouets distribués	0,25	0,1

Aide aux calculs : 85 x 90 = 7650 ; 15 x 75 = 1125 ; 15 x 25 = 375 ; 99 x 98 = 9702 ; $\frac{375}{8025} = 0.0467$; 0,9702 x 0,3 = 0,2910 ; 0,7650 x 0,7=0,5355 ; 2910/5355 = 0,543 ; 2910/ 8265 = 0,352

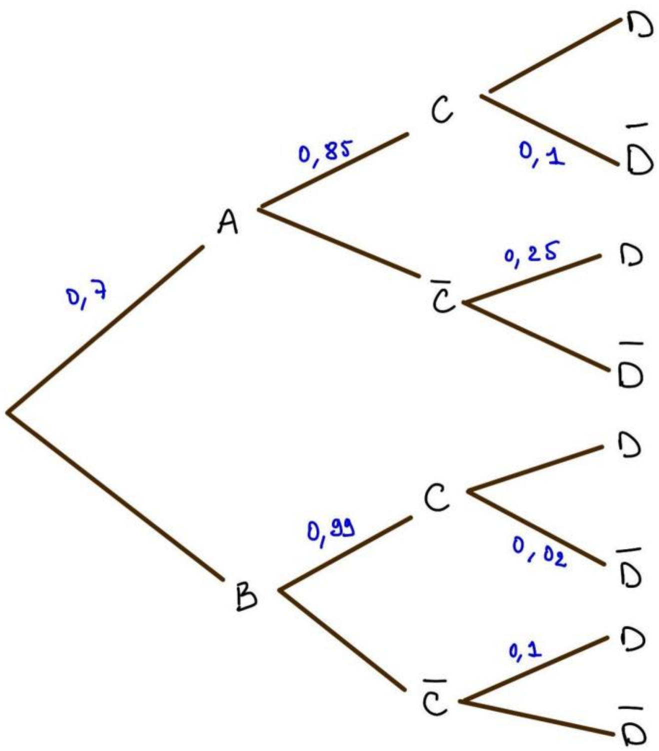
A. La probabilité qu'un jouet tiré au hasard dans l'usine A soit à la fois non-conforme et non-distribué est de 11,25%.
B. Pour un jouet tiré au hasard, la probabilité d'avoir été fabriqué dans l'usine B, d'être non-conforme et non-distribué est de 9 pour mille.
C. Plus de 5% des jouets issus de l'usine A qui sont distribués ne sont pas conformes aux normes de fabrication.
D. Un jouet tiré au hasard dans l'usine B a 97,12% de probabilité d'être distribué.
E. Parmi les jouets qui sont conformes et distribués, la majorité est fabriquée par l'usine B.

Question 29 – GAFAS : GOOGLE APPLE FACEBOOK AMAZON & SANTABRIK : AD

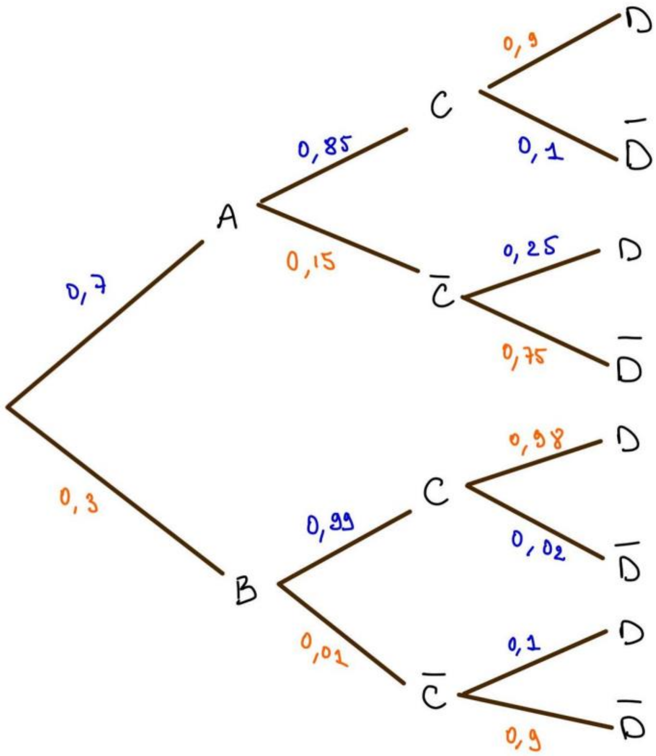
Analyse du sujet :
On peut commencer par définir tous les événements :

- « A » : l'événement « être fabriqué par l'usine A »
- « B » : l'événement « être fabriqué par l'usine B »
- « C » : l'événement « être conforme »
- « D » : l'événement « être distribué »

Puis, on peut faire un arbre illustrant les informations tirées de l'énoncé :



On le complète avec les informations manquantes en utilisant la complémentarité de chaque probabilité :

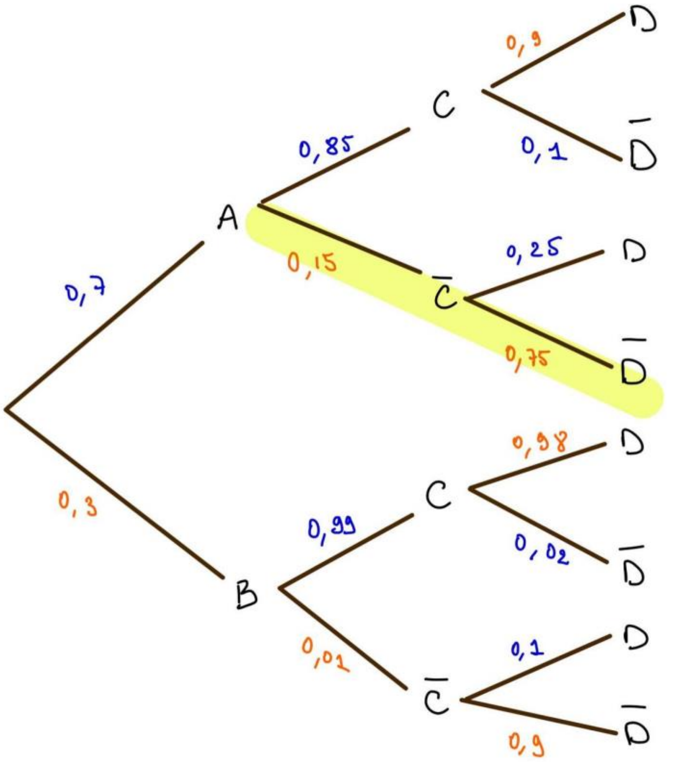


Une fois que l'arbre est dessiné, on peut résoudre l'exercice.

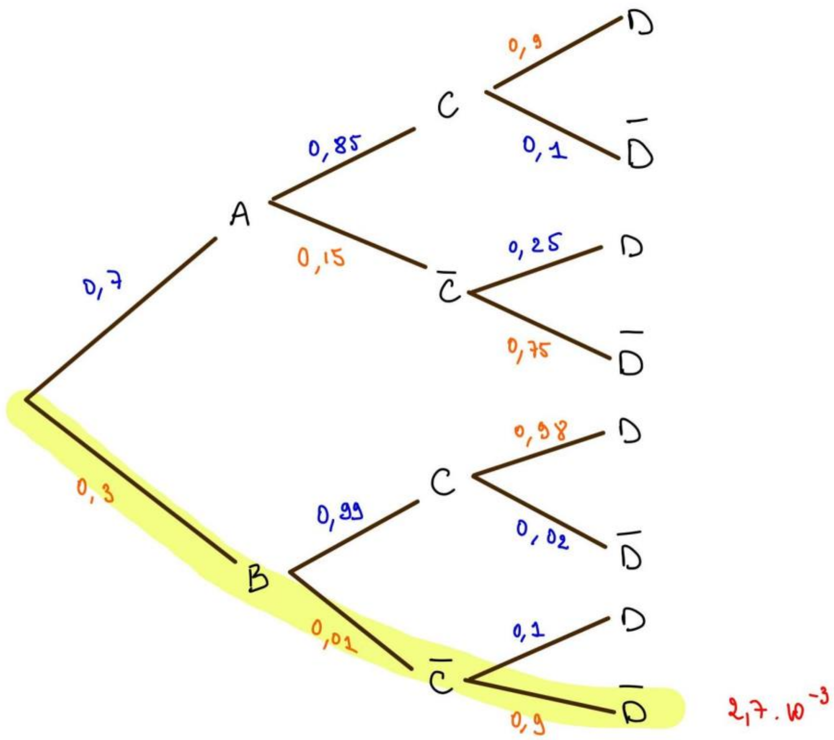
A VRAI

$$p\ (\bar{C} \cap \bar{D}|A) = \frac{p(\bar{C} \cap \bar{D} \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}15 \times 0{,}75}{0{,}7} = 0{,}15 \times 0{,}75 = 11{,}25\%$$

Sur l'arbre on s'intéresse à cette branche :



B FAUX On cherche : $p\ (B \cap \bar{C} \cap \bar{D})$:
Soit :



Il s'agit de la formule des probabilités composées dans le cas de 3 événements :

$$p\ (B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) = p\ (B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) = p(\bar{D}|\bar{C}\ \cap B) \times p(\bar{C}|B) \times p(B) =\ 0{,}3\ \times\ 0{,}01 \times\ 0{,}9 = \frac{27}{10000}$$

C FAUX Dans cette question, on ne considère que l'usine A. Pour simplifier l'écriture, on ne notera pas le conditionnement par A dans les différentes probabilités :

On cherche : $p(\bar{C}|D) = \frac{p(\bar{C} \cap D)}{p(D)}$

Avec : $p(D) = p(C \cap D) + p(\bar{C} \cap D)$

Et :

$$p(\bar{C} \cap D) = p(\bar{C}) \times p(D|\bar{C})$$

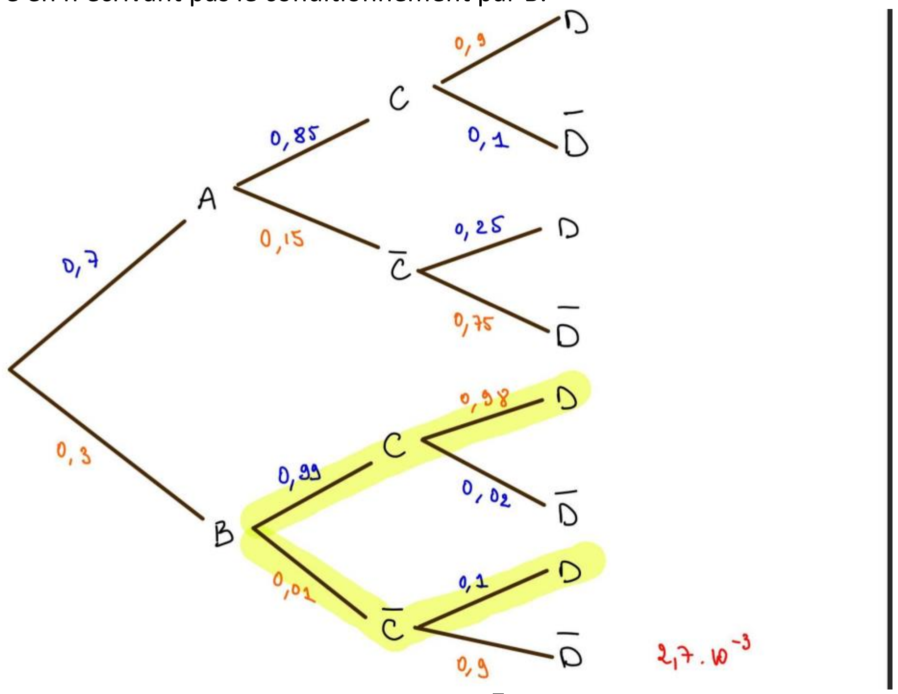
Donc :

$$p(\bar{C}|D) = \frac{p(\bar{C} \cap D)}{p(D)}$$
$$p\ (\bar{C}|D) = \frac{p(\bar{C}) \times p(D|\bar{C})}{p(C \cap D) + p(\bar{C} \cap D)}$$
$$p\ (\bar{C}|D) = \frac{0{,}15 \times 0{,}25}{0{,}85 \times 0{,}9 + 0{,}15 \times 0{,}25}$$
$$p\ (\bar{C}|D) = \frac{375\,.\,10^{-4}}{7650.\,10^{-4} + 375.\,10^{-4}}$$
$$p\ (\bar{C}|D) = \frac{375.\,10^{-4}}{8025.\,10^{-4}} = \frac{375}{8025} = 0.0467$$

Alors : $p(\bar{C}|D) < 5\%$.

Moins de 5% des jouets issus de l'usine A qui sont distribués ne sont pas conformes aux normes de fabrication.

D VRAI On se place dans l'usine B et on cherche : $p(D)$. De même qu'à la question précédente, on simplifiera l'écriture en n'écrivant pas le conditionnement par B.



$$p\ (D) = p(C \cap D) + p(\bar{C} \cap D)$$
$$p(D) = p(C) \times p(D|C) + p(\bar{C}) \times p(D|\bar{C})$$
$$p(D) = 0{,}99 \times 0{,}98 + 0{,}01 \times 0{,}1$$
$$p\ (D) = 9702.\,10^{-4} + 10.\,10^{-4}$$
$$p\ (D) = 9712.\,10^{-4}$$

Soit :

$$p(D) = 97{,}12.\,10^{-2}$$
$$p(D) = 97{,}12\%$$

E FAUX On cherche à comparer $p(B|C \cap D)$ et $p(A|C \cap D)$:

On peut commencer par calculer :

$$p(B|C \cap D) = \frac{p(B \cap C \cap D)}{p(C \cap D)}$$
$$p(B|C \cap D) = \frac{p(B \cap C \cap D)}{p(B \cap C \cap D) + p(A \cap C \cap D)}$$

$$p(B|C \cap D) = \frac{0,3 \times 0,99 \times 0,98}{0,99 \times 0,98 \times 0,3 + 0,7 \times 0,85 \times 0,9} = \frac{0,3 \times 0,9702}{0,3 \times 0,9702 + 0,7 \times 0,765}$$
$$= \frac{0,2910}{0,2910 + 0,5355}$$
$$p\ (B|C \cap D) = \frac{0,2910}{0,8265} = 0,352$$

Remarque : On peut finir le calcul, mais ce n'est même pas nécessaire : on voit ici que cette fraction sera inférieure à 0,5.

Donc : l'usine B assure uniquement 35% de la production des jouets. Ce n'est pas la majorité !