

Contrôle terminal

Lundi 4 mai 2026 – Durée : 2h.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Pour chacune des questions suivantes justifiez votre réponse.

1. Dans une classe de 30 élèves, 10 ont un chat, 13 ont un chien et 5 ont les deux. Combien y a-t-il d'élèves qui ont un chat ou un chien ?

Solution: Si A est l'ensemble des élèves ayant un chat et B celui des élèves ayant un chien, on s'intéresse à

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 13 - 5 = 18.$$

2. Une personne achète 4 cadeaux différents, et décide d'offrir un de ces cadeaux à chacun de ses 4 enfants. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

Solution: Il s'agit du nombre de permutations de l'ensemble des 4 cadeaux. Il y a en $4! = 24$.

3. Un tournoi sportif compte 15 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution: On s'intéresse ici au nombre de couple d'équipes. Il y en a $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

4. Un glacier propose des coupes contenant trois boules de glaces dont les parfums sont choisis parmi six parfums possibles (chocolat, vanille, fraise, framboise, pistache et café). Il est possible de choisir plusieurs fois le même parfum. Combien de coupes différentes propose-t-il (on ne s'intéresse pas à l'ordre des boules dans la coupe) ?

Solution: Il s'agit ici d'un tirage avec remise sans conserver l'ordre. Il y a $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$.

Exercice 2 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant

$X \backslash Y$	-2	0	1
-1	1/4	1/8	0
0	1/8	0	3/8
1	0	0	1/8

1. Donner les lois marginales de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution: X est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{8}$. Y est à valeurs dans $\{-2, 0, 1\}$, avec $\mathbb{P}(Y = -2) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Comme $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.

Solution: $\mathbb{E}[Y] = -\frac{1}{4}$, $\text{Var}(Y) = \frac{31}{16}$.

3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Solution: Z est à valeurs dans $\{-3, -2, -1, 1, 2\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = -3) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -2) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(Z = -2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -2) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{8},$$

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}.$$

On remarque que $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* et satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) > 0.$$

On définit le *taux de panne* de X par la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n, X \geq n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)},$$

puisque $\{X = n\} \subset \{X \geq n\}$.

2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geq 1)$? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(X \geq n + 1) = \mathbb{P}(X \geq n)(1 - x_n).$$

Solution : Puisque X est à valeurs dans \mathbb{N}^* on a $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(X \geq n + 1) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - x_n \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n)(1 - x_n).$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

Solution : On le montre par récurrence. D'après la question précédente on a bien

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X \geq 1)(1 - x_1) = \prod_{k=1}^{2-1} (1 - x_k).$$

Soit maintenant $n \geq 2$. On suppose que

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

Alors, en appliquant à nouveau la question précédente,

$$\mathbb{P}(X \geq n + 1) = \mathbb{P}(X \geq n)(1 - x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) \right) (1 - x_n) = \prod_{k=1}^{n+1-1} (1 - x_k).$$

On a donc bien $\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$ pour tout $n \geq 2$.

4. En déduire une expression de $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de x_1, \dots, x_n . Si le taux de panne de X est une suite constante, quelle loi classique la variable aléatoire X suit-elle ?

Solution: Puisque $\mathbb{P}(X = n) = x_n \mathbb{P}(X \geq n)$ on en déduit $\mathbb{P}(X = 1) = x_1 \mathbb{P}(X \geq 1) = x_1$ et pour tout $n \geq 2$

$$\mathbb{P}(X = n) = x_n \mathbb{P}(X \geq n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

Si le taux de panne est constant égal à $p > 0$ ($p = 0$ est impossible puisque cela impliquerait $\mathbb{P}(X = n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1},$$

et donc X est de loi géométrique de paramètre p .

Exercice 4: On considère une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} et telle qu'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que

$$0 < \mathbb{P}(N = 0) < 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$ et $b > 0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0).$$

Quelle est dans ce cas la loi de N ?

Solution: On le montre par récurrence. On a bien $\mathbb{P}(N = 0) = \frac{b^0}{0!} \mathbb{P}(N = 0)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0)$. On a alors

$$\mathbb{P}(N = k + 1) = \frac{b}{k + 1} \mathbb{P}(N = k) = \frac{b}{k + 1} \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0) = \frac{b^{k+1}}{(k + 1)!} \mathbb{P}(N = 0).$$

On a donc bien $\mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, puisque

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N = 0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = e^b \mathbb{P}(N = 0),$$

on a $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-b}$ et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N = k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$. N est donc de loi de Poisson de paramètre b .

2. On revient dans les questions suivantes au cas général : $a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et en déduire que $a + b \geq 0$.

Solution: On a

$$\mathbb{P}(N = 1) = \left(a + \frac{b}{1}\right) \mathbb{P}(N = 0) = (a + b) \mathbb{P}(N = 0),$$

et comme $\mathbb{P}(N = 0) > 0$ et $\mathbb{P}(N = 1) \geq 0$ on a bien $a + b \geq 0$.

(b) Montrer que pour tout entier $m \geq 2$ on a

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

Solution: On a, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) &= \sum_{k=1}^m k \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1) \left(a + \frac{b}{k + 1}\right) \mathbb{P}(N = k) \\ &= a \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + a \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k) \\ &= a \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k). \end{aligned}$$

- (c) En déduire que la suite $\left((1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) \right)_{m \geq 2}$ est majorée et donc que N admet une espérance.

Solution: D'après la question précédente, pour tout $m \geq 2$ on a

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) = (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N=k) - m\mathbb{P}(N=m) \leq (a+b),$$

où l'on a utilisé le fait que $m\mathbb{P}(N=m) \geq 0$, $a+b \geq 0$ et $0 \leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N=k) \leq 1$. Puisque $1-a > 0$ la famille de termes positifs $(k\mathbb{P}(N=k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc sommable, et donc N admet bien une espérance.

- (d) Montrer que $\mathbb{E}[N] = \frac{a+b}{1-a}$.

Solution: On a

$$\sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N=k) = \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(N=k) - \frac{a}{1-a} m\mathbb{P}(N=m),$$

En passant à la limite on obtient

$$\mathbb{E}[N] = a\mathbb{E}[N] + a + b,$$

ce qui implique le résultat.

- (e) Montrer que pour tout $m \geq 2$ on a

$$\sum_{k=1}^m k^2\mathbb{P}(N=k) = a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\mathbb{P}(N=k) + (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N=k).$$

Solution: On a, pour tout $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^2\mathbb{P}(N=k) &= \sum_{k=1}^m k^2 \left(a + \frac{b}{k} \right) \mathbb{P}(N=k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 \left(a + \frac{b}{k+1} \right) \mathbb{P}(N=k) \\ &= a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\mathbb{P}(N=k) + (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N=k). \end{aligned}$$

- (f) En déduire que N admet un moment d'ordre 2 et que

$$\mathbb{E}[N^2] = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

Solution: D'après la question précédente

$$(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\mathbb{P}(N=k) = (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N=k) - m^2\mathbb{P}(N=m) \leq (2a+b)\mathbb{E}[N] + a + b,$$

ce qui implique que la famille $(k^2\mathbb{P}(N=k))_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable et donc que N admet un moment d'ordre 2. De plus, en passant à la limite,

$$\mathbb{E}[N^2] = \frac{2a+b}{1-a} \mathbb{E}[N] + \frac{a+b}{1-a} = \frac{(2a+b)(a+b) + (1-a)(a+b)}{(1-a)^2} = \frac{(a+b+1)(a+b)}{(1-a)^2}.$$

(g) Calculer $\text{Var}(N)$ et montrer que si $\text{Var}(N) = \mathbb{E}[N]$ alors N est de loi de Poisson.

Solution: On a

$$\text{Var}(N) = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2 = \frac{(a+b+1)(a+b) - (a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Ainsi, $\text{Var}(N) = \mathbb{E}[N]$ implique $a = 0$. Mais si $a = 0$ l'égalité $\mathbb{P}(N = 1) = b\mathbb{P}(N = 0)$ implique que $b \geq 0$ et $b \neq 0$ (si $b = 0$ alors $\mathbb{P}(N = k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et donc $\mathbb{P}(N = 0) = 1$, ce que est exclus par hypothèse). D'après la première question de l'exercice N est donc de loi de Poisson.