

Contrôle terminal

Lundi 4 mai 2026 – Durée : 2h.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Pour chacune des questions suivantes justifiez votre réponse.

1. Dans une classe de 30 élèves, 10 ont un chat, 13 ont un chien et 5 ont les deux. Combien y a-t-il d'élèves qui ont un chat ou un chien ?
2. Une personne achète 4 cadeaux différents, et décide d'offrir un de ces cadeaux à chacun de ses 4 enfants. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
3. Un tournoi sportif compte 15 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?
4. Un glacier propose des coupes contenant trois boules de glaces dont les parfums sont choisis parmi six parfums possibles (chocolat, vanille, fraise, framboise, pistache et café). Il est possible de choisir plusieurs fois le même parfum. Combien de coupes différentes propose-t-il (on ne s'intéresse pas à l'ordre des boules dans la coupe) ?

Exercice 2 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant

$X \setminus Y$	-2	0	1
-1	1/4	1/8	0
0	1/8	0	3/8
1	0	0	1/8

1. Donner les lois marginales de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* et satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) > 0.$$

On définit le *taux de panne* de X par la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geq 1)$? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}(X \geq n + 1) = \mathbb{P}(X \geq n)(1 - x_n).$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

4. En déduire une expression de $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de x_1, \dots, x_n . Si le taux de panne de X est une suite constante, quelle loi classique la variable aléatoire X suit-elle ?

Exercice 4 : On considère une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} et telle qu'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que

$$0 < \mathbb{P}(N = 0) < 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$ et $b > 0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0).$$

Quelle est dans ce cas la loi de N ?

2. On revient dans les questions suivantes au cas général : $a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$.

- (a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et en déduire que $a + b \geq 0$.
 (b) Montrer que pour tout entier $m \geq 2$ on a

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

(c) En déduire que la suite $\left((1 - a) \sum_{k=1}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 2}$ est majorée et donc que N admet une espérance.

(d) Montrer que $\mathbb{E}[N] = \frac{a + b}{1 - a}$.

(e) Montrer que pour tout $m \geq 2$ on a

$$\sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}(N = k) + (2a + b) \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

(f) En déduire que N admet un moment d'ordre 2 et que

$$\mathbb{E}[N^2] = \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}.$$

(g) Calculer $\text{Var}(N)$ et montrer que si $\text{Var}(N) = \mathbb{E}[N]$ alors N est de loi de Poisson.