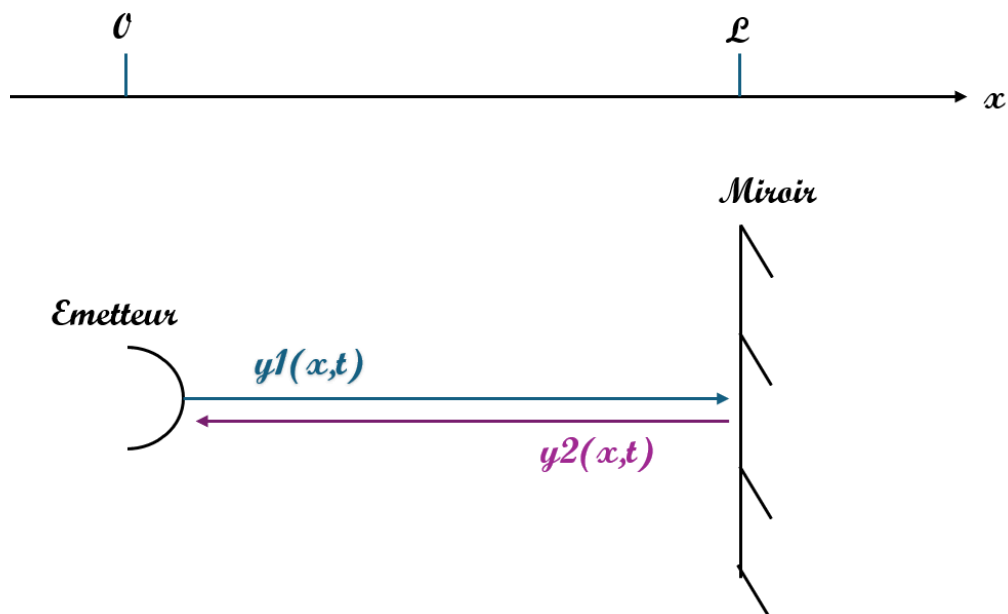


Théorie : Ondes stationnaires

Cas 1 : émetteur - miroir



On considère un émetteur placé en $x=0$ et un miroir parfait en $x=L$.
L'émetteur envoie une onde acoustique propagative en direction du miroir notée y_1 . Sa réflexion sur le miroir qui se propage en direction de l'émetteur est notée y_2 avec φ le déphasage à l'origine.

On considère que les deux ondes ont la même amplitude A .

- $y_1(x,t) = A \cos(k(x - \frac{\omega}{k}t))$
 $= A \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x)$
 $y_1(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$
- $y_2(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$
 $= A \cos(\omega t + kx - 2kL + \pi)$
 $= A \sin(\omega t + kx - 2kL)$

Superposition de deux ondes

Le calcul part de la somme de deux ondes progressives :

$$y_{tot}(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$y_{tot}(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Application de la formule trigonométrique

En utilisant la formule : $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$

Avec :

- $a = \omega t - kx$
- $b = \omega t + kx + \varphi$

On obtient :

$$y(x, t) = 2A \cos \left(\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx + \varphi)}{2} \right) \cos \left(\frac{(\omega t - kx) - (\omega t + kx + \varphi)}{2} \right)$$

$$y(x, t) = 2A \cos \left(\frac{2\omega t + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{-2kx - \varphi}{2} \right)$$

Comme la fonction cosinus est paire ($\cos(-\theta) = \cos \theta$) :

$$y(x, t) = 2A \cos \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(kx + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Condition aux limites

On cherche la condition pour avoir un nœud en $x = L$, soit $y(L, t) = 0$:

$$2A \cos \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(kL + \frac{\varphi}{2} \right) = 0$$

Cela impose :

$$\cos \left(kL + \frac{\varphi}{2} \right) = 0$$

$$\implies kL + \frac{\varphi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \text{ (avec } n \text{ un entier)}$$

Résolution pour φ

$$\frac{\varphi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - kL$$

$$\varphi = \pi(2n + 1) - 2kL$$

Ainsi, le déphasage entre les ondes dépend de la hauteur du système.

Position des noeuds :

★ **Nœuds pour** $\cos\left(kx_n + \frac{\varphi}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(kx_n + \frac{\varphi}{2}\right) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow kx_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{k} \left[(2n + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right]$$

★ $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{k} \left[(2n + 2)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{k} \left[(2n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \frac{(n+1)\pi}{k} - \frac{\pi}{2k}(2n + 1)$$

$$= \frac{n\pi}{k} + \frac{\pi}{k} - \frac{n\pi}{k} - \frac{\pi}{2k}$$

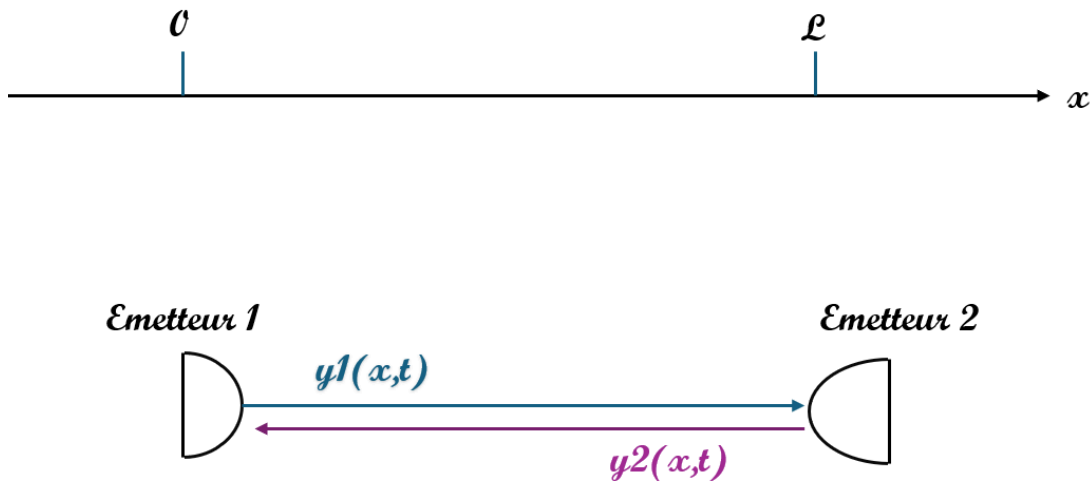
$$= \frac{2\pi - \pi}{2k}$$

$$= \frac{\pi}{2k}$$

$$= \frac{\lambda}{4} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Un nœud et un ventre sont espacés de $\frac{\lambda}{4}$ donc deux nœuds sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$

Cas 2 : émetteur - émetteur



On considère un émetteur placé en $x=0$ et un deuxième émetteur en $x=L$. L'émetteur envoie une onde acoustique propagative en direction du deuxième émetteur notée y_1 . L'onde envoyée par l'émetteur 2 qui se propage en direction de l'émetteur 1 est notée y_2 avec φ le déphasage à l'origine.

- $$y_1(x, t) = A \cos(k(x - \frac{\omega}{k}t))$$

$$= A \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x)$$

$$y_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

- $$y_2(x, t) = y_2(L, t - \frac{L - x}{c})$$

$$= y_2 = A \cos \omega(t - \frac{L - x}{c})$$

$$= A \cos(\omega t + \frac{\omega x}{c} - \frac{\omega L}{c})$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx - kL)$$

Onde résultante : $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx - kl)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx - kl}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx + kl}{2}\right)$$

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{2\omega t - kl}{2}\right) \cos\left(\frac{-2kx + kl}{2}\right)$$

Noeuds :

$$y(x_n, t) = 0 \Rightarrow 2A \cos\left(\frac{2\omega t - kl}{2}\right) \cos\left(\frac{-2kx_n + kl}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{kl - 2kx_n}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{kl - 2kx_n}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow kl - 2kx_n = (2n + 1)\pi$$

$$\Rightarrow -2kx_n = (2n + 1)\pi - kl$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{-2k}((2n + 1)\pi - kl)$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{kl}{2k} - \frac{(2n+1)\pi}{2k}$$

$$x_n = \frac{l}{2} - \frac{(2n+1)\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$x_n = \frac{l}{2} - (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

★ Position des noeuds

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}(2n + 1 + 1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} + (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

$$= \frac{\lambda}{4} - (2n + 2)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} + (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

$$= \frac{\lambda}{4}(2n + 1 - 2n + 2)$$

$$= \frac{\lambda}{4}$$

Ainsi un noeud et un ventre sont espacés de $\frac{\lambda}{4}$ donc deux noeuds consécutifs sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$ -