**Université Claude Bernard**
RB35

Année 2024-2025
T. Lepoutre

# RB35: examen final de mathématiques

Dans ce devoir on va s'intéresser à des variables aléatoires. On pourra utiliser les notations suivantes pour une variable aléatoire :

— $\mathbb{E}[X]$ pour l'espérance,
— $\sigma^2(X)$ pour la variance
— $n!$ pour la factorielle de $n$ $(1 \times 2 \times \cdots \times n)$.

On rappelle deux formules utiles

— la loi binomiale pour $n$ essais et une probabilité de succès $p \in [0,1]$ la loi du nombre de succès $X \sim B(n,p)$ est une loi chargeant les entiers entre 0 et n.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots n.$$

— la formule qui définit l'exponentielle comme une série

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Lorsqu'on parle de nombre complexe, $i$ désigne la racine de $-1$ et $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On rappellera que les règles d'intégration et de dérivation de $t \mapsto e^{\lambda t}$ sont les même pour $\lambda$ réel ou complexe.

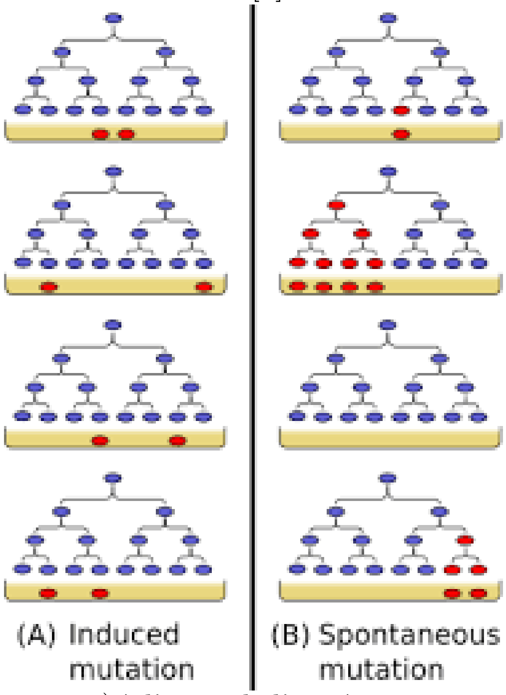
**Exercice 1** On va beaucoup s'intéresser à la loi de Poisson dans ce devoir. La loi de Poisson est une loi sur les entiers naturels dépendant d'un paramètre ($\lambda > 0$ ici)

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On va notamment explorer les liens avec la loi binomiale. On se fixe un paramètre $\lambda > 0$

1. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer $\mathbb{E}[X] = \lambda$
2. Toujours pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer $\sigma^2[X] = \lambda$
3. Déterminer l'espérance d'une binomiale $B(n, p)$ (par le calcul ou un autre argument).
4. En déduire que pour tout entier $n$ tel que $\frac{\lambda}{n} < 1$, si $Y_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, on a $\mathbb{E}[Y_n] = \lambda$
5. Justifier la limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x)}{x} = -1$$
(on pourra la voir comme une dérivée)
6. En déduire que pour $\lambda$ réel
$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to \exp(-\lambda).$$
(on pourra passer au log).
7. Pour n assez grand, on suppose $Y_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et on note $p_n(k) = P(Y_n = k)$. Montrer
$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n e^{\lambda}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$
8. Montrer que
$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \Pi_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$
9. Montrer que **à $k$ fixé**
$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} \to 1, n \to +\infty.$$
10. En déduire (chaque parenthèse peut être traitée séparément) qu'à $k$ **fixé**
$$p_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad n \to +\infty$$
Et donc qu'en un sens on a une convergence en loi
$$B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \to \mathcal{P}(\lambda)$$
Ainsi la loi du nombre de succès d'un événement rare mais avec un grand nombre d'essais peut se modéliser de façon satisfaisante par une loi de Poisson.

**Exercice 2** Nous allons nous intéresser ici à l'expérience de Luria et Dellbruck [1].




L'expérience de Luria et Dellbruck en 1943 consiste à considérer le protocole suivant pour étudier l'apparition de résistance à un virus :

- On cultive les bactéries hors exposition au virus
- On les met en confrontation au virus et la mise en culture des reliquats de l'expérience révèle l'existence de souches ayant résisté.

Deux hypothèses possibles :

$H_{adap}$ Soit la mutation apparait lors de la confrontation au virus. Ce sont les seules survivantes à la confrontation au virus.

$H_{spont}$ Soit la mutation apparaît aléatoirement lors de la phase de prolifération, se propage aux descendantes et les résistantes sont simplement les survivantes à la confrontation.

On note alors $X$ le nombre de bactéries survivantes (et donc résistantes) à l'issue de l'expérience. On peut modéliser ça de la façon suivante. On imagine une division des bactéries à durée fixe. Lors de la phase de prolifération, on va considérer (ce qui est une simplification) deux sources de bactéries résistantes :

- les descendantes de la génération précédente de résistantes (il y a transmission). Ceci représente le double de l'étape $n$.
- Les nouvelles mutations spontanées. On va considérer qu'à chaque étape c'est tiré selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ **indépendamment du reste**.

Ainsi, si on note $Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, le passage d'une génération à l'autre se décrit comme, $M_n$ étant le nombre de mutants à l'étape $n$ :

$$M_{n+1} = 2M_n + Y_n, \quad M_0 = 0. \tag{1}$$

Avec indépendance entre $M_n$ et $Y_n$.

1. En utilisant les propriétés des premières questions sur la loi de Poisson, donner les relations de récurrence vérifiées par
$$\mathbb{E}[M_n], \quad \sigma^2(M_n)$$
(on rappelle l'indépendance de $M_n$ et $Y_n$ à chaque temps)
2. Montrer
$$\frac{\sigma^2(M_1)}{E[M_1]} = 1.$$
3. En remarquant que $E[M_n]+\lambda$ et $\sigma^2(M_n)+\lambda/3$ vérifient des relations plus simples encore, montrer que
$$\frac{\sigma^2(M_n)}{\mathbb{E}[M_n]} = \frac{4^n - 1}{(2^n - 1).3}$$
Comment se comporte ce rapport pour un grand nombre de générations ?

4. L'expérience consiste donc à considérer ce ratio après confrontation au virus. Le raisonnement est le suivant :
   — Si $H_{adap}$ est vraie, l'observation doit correspondre à l'apparition de mutants lors d'une génération (celle de la confrontation)
   — Si $H_{spont}$ est vraie, l'observation doit correspondre à l'apparition de mutants lors des multiples générations pré-confrontation

   Le ratio estimé via la répétition d'expériences est grand (plus grand que 100). Que peut on conclure ?

**Exercice 3** On rappelle pour $f$ $2\pi-$ périodique, la formule du $k-$ième cofficient de Fourier pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

1. Justifier l'affirmation suivante : pour tout $a$ réel,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

2. Quelle relation existe entre les $c_k(f)$ et la quantité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt?$$

3. On considère la fonction créneau, $2\pi$-périodique, qu'on se contente de définir sur $[0, 2\pi[$

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in [0, \pi], \\ 0 \text{ pour } t \in ]\pi, 2\pi[ \end{cases}$$

   Calculer $c_0(f)$ puis $c_{2k}(f)$ pour $k \neq 0$ et enfin $c_{2k+1}$ ($k$ entier).
4. En déduire la formule suivante

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

# Références

[1] Salvador E Luria and Max Delbrück. Mutations of bacteria from virus sensitivity to virus resistance. *Genetics*, 28(6) :491, 1943.