

TD 6 : THÉORÈMES LIMITES, STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Exercice 1

Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poissons de paramètres respectifs λ et μ ?

Exercice 2

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Peut-on estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est de 5 pièces ?

Exercice 3

On suppose qu'une usine produit des pièces qui sont défectueuses, indépendamment les unes des autres, avec une probabilité θ . On suppose que l'on observe n pièces produites par cette usines et l'on définit les variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) où X_i vaut 1 si la $i^{\text{ième}}$ pièce est défectueuse et 0 si elle est en bon état. Le but de cet exercice est d'estimer θ .

1. Quelle est la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$? Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq \theta \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}.$$

3. En déduire que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} \leq \theta \leq \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}\right) \geq 1 - \alpha.$$

On dit que l'intervalle (aléatoire) $I_n = \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}\right]$ est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de θ (souvent on fait le choix $\alpha = 0.05$ ou $\alpha = 0.01$).

Exercice 4

On considère le jeu de données suivant, correspondant aux notes de 10 étudiants à une évaluation :

$$x = (0, 12.5, 8, 19, 7, 15.5, 11, 9, 11, 9.5).$$

1. Calculer la moyenne empirique, la variance empirique et l'écart type de x .
2. Tracer la fonction de répartition empirique F_{10} de x .
3. Déterminer les quantiles $Q(0.5)$, $Q(0.25)$ et $Q(0.75)$, où

$$Q(r) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F_{10}(t) \geq r\}.$$

4. Tracer la boîte à moustaches correspondante.