RB35: Examen bis

Dans cette feuille, on note

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1 On considère le processus de dynamique de population suivant. On a un nombre initial d'individus X_0 (éventuellement aléatoire). La population change en temps discret par génération. Le passsage du temps n à $n+1$ se fait de la façon suivante:

- Chaque individu i de la génération n présent se reproduit ou meurt.
- L'individu est remplacé par un nombre aléatoire d'individus $Y_{n,i}$. Les $Y_{n,i}$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées à valeurs entières positives. Ne pas avoir peur des doubles indices c'est juste pour dire qu'on ne réutilise jamais deux fois la même variable.

On notera X_n la variable aléatoire désignant le nombre d'individus au temps n.
On commence par un modèle de division cellulaire. L'individu donne naissance à 0 ou 2 descendants et on peut donc résumer cela en

$$P(Y_{n,i} = 0) = (1-p), \quad P(Y_{n,i} = 2) = p.$$

1. Si $X_0 = 1$, quelle est la loi de X_1?
2. Même question pour la loi de X_2.
3. Exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = 2j | X_n = k)$ pour $j \leqslant k$.

   Dans le cas général, on ne peut pas faire ces calculs à la main. Il faut étudier X_n via d'autres outils.
4. Justifier l'affirmation suivante $P(X_n = 0)$ est croissant.
5. On rappelle que

   $$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i}.$$

   Justifier l'écriture suivante

   $$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1_{X_n=k} \sum_{i=1}^{k} Y_{n,i})$$

6. En s'appuyant sur le fait que les variables considérées sont indépendantes, déduire de cette écriture que

   $$\mathbb{E}[X_{n+1}] = m\mathbb{E}[X_n].$$

   où $m = \mathbb{E}(Y_{n,i}$

7. Justifier l'affirmation suivante

$$P(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}[X_n]$$

8. En déduire que $P(X_n = 0) \to 1)$ quand $n \to +\infty$ si $m < 1$ Dans la suite, on va utiliser ce qu'on appelle la fonction génératrice:

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)s^k = \mathbb{E}[s^{X_n}], \quad s \in [0,1]$$

9. Que représente la valeur $G_n(0)$?

10. Combien vaut $G_n(1)$?

11. Si on note $g(s) = \mathbb{E}[s^{Y_{n,i}}]$ (qui ne dépend ni de n ni de i), en utilisant l'écriture de la question 5 et l'indépendance, montrer qu'on a

$$G_{n+1}(s) = G_n\left(g(s)\right)$$

12. Si on part de $X_0 = 1$, on a $G_0(s) = s, G_1(s) = g(s)$ et par récurrence rapide, $G_{n+1}(s) = g(G_n(s))$. A partir de cette remarque, justifier que la probabilité d'extinction vérifie

$$q = g(q).$$

CORRECTION

1. Par construction, la loi de X_1 va être donnée par

$$P(X_1 = 0) = 1 - p, P(X_1 = 2) = p, P(X_1 = i) = 0 \text{ sinon}$$

2. On traite ensuite au cas par cas (on peut faire un arbre par exemple. Dans le cas où il y a deux à la génération 1, ils sont indépendants. On se retrouve donc dans la configuration du jeu de pile ou face

$$P(X_2 = 0|X_1 = 2) = (1-p)^2, P(X_2 = 2|X_1 = 2) = (1-p)p), P(X_2 = 4|X_1 = 2) = p^2$$

Par ailleurs

$$P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 1.$$

Au final, on a

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(X_2 = 0||X_1 = 0).P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0||X_1 = 2).P(X_1 = 2)\\
&= 1 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = (1-p)(1 + (1-p)p)\\
P(X_2 = 2) &= P(X_2 = 2||X_1 = 0).P(X_1 = 0) + P(X_2 = 2||X_1 = 2).P(X_1 = 2)\\
&= 0 \times (1-p) + 2(1-p)p \times p = 2p^2(1-p)\\
P(X_2 = 4) &= P(X_2 = 4||X_1 = 0).P(X_1 = 0) + P(X_2 = 4|X_1 = 2).P(X_1 = 2)\\
&= 0 \times (1-p) + p^2 \times p = p^3
\end{aligned}$$

3. Comme annoncé précédemment, cette probabilité revient à tirer k pile ou face biaisés et donc c'est la loi binomiale qui régit ça.

$$P(X_{n+1} = 2j|X_n = k) = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$$

4. On peut tout simplement remarquer que

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1,$$

et donc

$$P(X_{n+1} = 0) \geqslant P(X_{n+1} = 0 \text{ ET } X_n = 0) = P(X_{n+1} = 0|X_n = 0).P(X_n = 0) = P(X_n = 0).$$

En particulier

$$P(X_{n+1} = 0) \geqslant P(X_n = 0)$$

5. Cette question peut faire peur mais c'est juste un jeu d'écriture. Il est basée sur le fait que X_n prend une valeur entière (par exemple k) et une seule à la fois. Donc si $X_n = k$, on a $\sum_1^{X_n} Y_{n,i} = \sum_1^k$. On cumule alors toutes les possibilités avec les indicatrices.

NB: si vous êtes perdus sur un énoncé, vous pouvez passer à la suite!!!

6. Premier point: l'espérance est linéaire

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(1_{X_n=k} \sum_{i=1}^{k} Y_{n,i}\right)$$

Pour k fixé, calculons

$$
\begin{aligned}
E\left(1_{X_n=k}\sum_{i=1}^{k} Y_{n,i}\right) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} & E\left(1_{X_n=k}\right)\times E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_{n,i}\right)\\
&= P(X_n=k)\times \underbrace{k\times E(Y_{n,1})}_{vaiid}\\
&= P(X_n=k)\times k\times m
\end{aligned}
$$

Ensuite on somme

$$E[X_{n+1}] = m\times \sum_k kP(X_n=k) = mE[X_n]$$

7. Plusieurs preuves possibles. La plus classique: comme $X_n \geqslant 0$, on a $X_n 1_{X_n\geqslant 1} \leqslant X_n$

   $$P(X_n\geqslant 1) = E[1_{X_n\geqslant 1}] \leqslant E[X_n]$$

   Sinon, à la main

   $$P(X_n\geqslant 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n=k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_n=k) = \sum_{0}^{\infty} kP(X_n=k) = E[X_n]$$

8. La question 6 permet d'affirmer

   $$E[X_n] = m^n E[X_0]$$

   Donc si $m<1$, on a

   $$P(X_n=0) = 1-P(X_n\geqslant 1) \geqslant 1-E[X_n] = 1-m^nE[X_0]\to 1.$$

   Comme en plus $P(X_n=0)\leqslant 1$, c'est bon.

9. $$G_n(0) = \sum_{0}^{\infty} P(X_n=k)0^k$$

   Les termes valent 0 sauf le premier

   $$G_n(0) = P(X_n=0)$$

10. Calculons

    $$G_n(1) = \sum_{0}^{\infty} P(X_n=k)1^k = \sum_{0}^{\infty} P(X_n=k) = 1.$$

    Les entiers couvrent tous les possibles.

11. Ici c'est plus dur mais indépendance et la référence à l'indicatrice suggère l'utilisation de produits d'espérance.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= E[s^{X_{n+1}}] \\
&= E[s^{\sum 1_k \sum_1^k Y_{n,i}}] \\
&= E[\sum_k 1_{X_n=k} \times s^{\sum_1^k Y_{n,i}}] \\
&= \sum_1^k E[1_{X_n=k}] \underbrace{\times}_{ind} E[s^{\sum_1^k Y_{n,i}}] \\
&= \sum_k P(X_n = k) \times E[s^{Y_{n,1}} \times s^{Y_{n,2}} \dots s^{Y_{n,k}}] \\
&= \sum_k P(X_n = k) \times E[s^{Y_{n,1}}]^k \\
&= \sum_k P(X_n = k) \times g(s)^k \\
&= G_n(g(s)).
\end{aligned}$$

12. On rappelle que $G_n(0) = P(X_n = 0)$. De plus on a donc $G_{n+1}(0) = g(G_n(0))$. Si on laisse tendre vers $+\infty$ on aboutit à $q = G_\infty = G_{\infty+1}(0) = g(G_\infty(0)) = g(q)$.