TD 5 : Probabilités discrètes

Nous rappelons tout d'abord les lois usuelles suivantes.

	notation	ensemble de réalisations	$\mathbb{P}(X=k)$	espérance	variance
loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$k \in [\![0,1]\!]$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
loi binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$k \in [\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
loi uniforme	$\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$	$k \in [\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

Exercice 1

1. Soit $p \in [0,1]$. Calculer l'espérance et la variance de la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme $\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$.
3. Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a. de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$, puis, en utilisant le théorème du transfert, $\mathbb{E}\big[X(X-1)\big]$. En déduire la variance de X.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une v.a. de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que la série de terme général $\lambda^k/(k-1)!$ est convergente. Idem pour la série de terme général $\lambda^k/(k-2)!$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}\big[X(X-1)\big]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2

Soit X une v.a. de loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ où $p \in [0,1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'espérance et la variance de X.

1. Justifier que X admet un moment de tout ordre.
2. Calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$, où G_X est la fonction génératrice de X.
3. Calculer, pour tout $t \in [-1,1]$, les dérivées $G'_X(t)$ et $G''_X(t)$.
4. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y suivant la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$). On note G_X et G_Y les fonctions génératrices de X et Y.

1. On définit $Z = XY$ et on note G_Z sa fonction génératrice. Exprimer, pour tout $t \in [-1,1]$, $G_Z(t)$ en fonction de $G_X(t)$.
2. En déduire, dans le cas où X est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, l'espérance et la variance de Z.

Exercice 4

Un boulanger réalise 100 petits pains aux pépites de chocolat. Il met 800 pépites dans sa pâte. Quelle est la loi du nombre X de pépites qui se trouve dans le pain que vous achetez ? Combien de pépites pouvez-vous espérer avoir (en moyenne) ?

Indication : un schéma de Bernoulli est caché dans cet énoncé.

Exercice 5

On lance un dé ordinaire non pipé jusqu'à obtenir 6. On note T le nombre de lancers.

1. Quelle est la loi de T ? Quelle est son espérance ?
2. Calculer $\mathbb{P}(T > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la fonction de répartition de T, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Application numérique : calculer $\mathbb{P}(2 < T < 8)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(T > 3)$ et $\mathbb{P}(T > 10 \mid T > 7)$.
4. Généralisation : montrer que pour tous entiers positifs i et j, on a $\mathbb{P}(T > i+j \mid T > i) = \mathbb{P}(T > j)$.
5. Quel est le nombre minimal de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à $1/2$?

Exercice 6

Soit X une v.a. discrète dont on connaît la fonction de répartition F_X.

1. Rappeler la définition de F_X.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, un point de continuité de F_X. Que vaut $\mathbb{P}(X = x)$?
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, un point où F_X n'est pas continue. Donne une expression simple de $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X < x)$ en fonction de F_X.
4. Soient deux réels x et y. Donner en fonction de F_X une expression des probabilités suivantes : $\mathbb{P}(x \leq X \leq y)$, $\mathbb{P}(x \leq X < y)$, $\mathbb{P}(x < X \leq y)$, $\mathbb{P}(x < X < y)$.

Exercice 7

Fonctions de répartition, suite. Comme à l'exercice précédent, on considère une v.a. X dont on connait la fonction de répartition F_X. Cette fonction est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[\ ; \\ \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1,2[\ ; \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [2,3[\ ; \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de cette fonction.
2. Écrire en fonction de la fonction de répartition F_X toutes les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}\big(X = \frac{3}{2}\big)$, $\mathbb{P}\big(X \in \,]0,2]\big)$, puis les calculer.
3. Donner la loi de X.

Exercice 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ et tel qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Quelle est la loi de $X + 1$?
4. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendants et de même loi.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2. En déduire que si X admet une espérance on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X > k).$$

3. Montrer de même que, si X admet un moment d'ordre 2 alors

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$

4. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne n tirages avec remise successifs indépendants d'une boule et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer l'espérance de X et déterminer la limite de $\mathbb{E}[X]/N$ lorsque N tend vers l'infini.