

## TD 3BIS : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES (2)

**Exercice 1**

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires finies définies sur un même univers  $\Omega$ , à valeurs chacune dans  $\{-1, 0, 1\}$  et satisfaisant

$$\mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0,$$

et

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = -1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4}.$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .
3. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 2**

Soit  $n$  un entier et soient  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  des personnes qui se transmettent une information binaire (0 ou 1). La première personne,  $M_0$ , a la bonne information. Elle la transmet à la deuxième personne  $M_1$ , qui la transmet à  $M_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $M_n$ . Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité  $p$  que l'information soit changée en son contraire, indépendamment de ce qui s'est passé précédemment.

Pour  $k \geq 1$ , soient  $I_k$  l'évènement «  $M_k$  a la bonne information » et  $\bar{I}_k$  son complémentaire.

1. Modéliser cette expérience avec un arbre de probabilité.
2. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que  $M_2$  ait le bon message ?
3. Si 1 est la bonne information, quelle est la probabilité d'observer la suite des transmissions 010110 ?
4. Soit  $C_i$  l'évènement «  $M_i$  reçoit la bonne information ». On note  $p_i$  la probabilité  $\mathbb{P}(C_i)$ . Exprimer, pour  $i \geq 1$ , la probabilité  $p_i$  en fonction de  $p_{i-1}$ . En déduire  $p_n$ .  
Que se passe-t-il si  $p = 0$  ? si  $p = 1$  ? quand  $n$  tend vers l'infini ? Comment l'interpréter ?