

Contrôle partiel

Mardi 3 mars 2026 – Durée : 1h30.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Pour chacune des questions suivantes justifiez votre réponse.

1. Un tournoi sportif compte 15 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution: Chaque match correspond à une combinaison à deux éléments de l'ensemble des équipes. On doit donc organiser $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ matchs.

2. Pierre aimerait acheter 8 fruits. Dans son magasin préféré il y a des pommes, des poires et des bananes. Combien a-t-il de choix possibles ?

Solution: Pour choisir ses fruits, Pierre effectue un tirage avec remise, sans conserver l'ordre de 8 fruits parmi les trois sortes disponibles. Il a donc $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ choix possibles.

3. Une finale de course de 100 mètres oppose 2 coureurs d'un club de Lyon, 3 d'un club de Saint-Etienne et 3 d'un club de Valence. Combien y a-t-il de podiums possibles avec au moins un coureur de Lyon (un podium correspond à la liste dans l'ordre des trois premiers arrivés, on suppose qu'il ne peut pas y avoir de coureurs ex aequo) ?

Solution: Un podium correspond à un élément de l'ensemble Ω des arrangements de 3 éléments de l'ensemble des 8 participants à la finale. On a $|\Omega| = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Si l'on note A l'ensemble des podiums ayant au moins un coureur de Lyon, $|A| = |\Omega| - |B|$ où B est l'ensemble des podiums n'ayant aucun coureur Lyonnais. Le cardinal de B est le cardinal des arrangements de 3 éléments de l'ensemble formé par les coureurs de Saint-Etienne et Valence, donc $|B| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. On en déduit $|A| = 336 - 120 = 216$.

4. On suppose qu'une urne contient 14 jetons indiscernables au toucher, dont 5 jetons verts numérotés de 1 à 5, 6 jetons rouges numérotés de 1 à 6 et 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3. On tire trois jetons sans remise sans conserver l'ordre. Combien y a-t-il de tirages avec des jetons d'au moins deux couleurs différentes ?

Solution: On effectue ici des tirages avec remise sans conserver l'ordre, un tirage correspond à un élément de l'ensemble Ω des combinaisons à 3 éléments de l'ensemble des jetons. On a $|\Omega| = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2} = 364$. Si l'on note A l'ensemble des tirages avec au moins deux couleurs différentes, alors $|A| = |\Omega| - |B|$ où B est l'ensemble des tirages avec une seule couleur. Puisque $|B| = \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 20 + 1 = 31$, on en déduit que $|A| = 364 - 31 = 333$.

5. On considère 3 DVDs notés a, b et c, et leurs boîtes de rangement respectives A, B et C. Combien y a-t-il de rangements possible avec exactement un disque bien rangé ?

Solution: Un rangement correspond à une permutation de l'ensemble des disques, ou de manière équivalente à un mot formé des trois lettres a, b et c. Supposons que la configuration où les disques sont rangés est abc . Alors la seule configuration où a est rangé mais pas les autres est acb , la seule configuration où b est rangé mais pas les autres est cba , la seule où c est rangé mais pas les autres est bac . Il y a donc 3 rangements possibles avec exactement un disque bien rangé.

Exercice 2 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/8	3/8	0
0	1/4	0	1/8
2	0	0	1/8

1. Donner les lois marginales de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution: X est à valeurs dans $\{-1, 0, 2\}$, avec $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{8}$. Y est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$. Comme $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}[X]$.

Solution: $\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{4}$, $\text{Var}(X) = \frac{15}{16}$.

3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = X^2Y$.

Solution: Z est à valeurs dans $\{-1, 0, 4\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbb{P}(X^2Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) = \frac{3}{4},$$

et

$$\mathbb{P}(X^2Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8}.$$

Exercice 3 : On lance n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in]0, 1[$. On appelle X_n la v.a.r. correspondant au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de X_n ?

Solution: On est dans la situation d'un schéma de Bernoulli de n expériences indépendantes de probabilité de succès p . X_n correspond au nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli et donc $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2. En déduire $\mathbb{E}[(-1)^{X_n}]$. *Indication : on pourra utiliser le binôme de Newton.*

Solution: $\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n$.

3. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $Y_n = (-1)^{X_n}$? Déterminer sa loi et son espérance, en fonction de $I_n = \mathbb{P}(X_n \text{ est impair})$.

Solution: Y prend les valeurs -1 et 1 et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = I_n = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1)$. On obtient $\mathbb{E}[Y_n] = 1 - 2I_n$.

4. Déduire des questions précédentes la valeur de I_n .

Solution: Comme $\mathbb{E}[Y_n] = (1-2p)^n = 1 - 2I_n$, on déduit $I_n = \frac{1}{2} - \frac{(1-2p)^n}{2}$.

Exercice 4 : Soit n un entier strictement positif. On considère n boîtes numérotées de 1 à n et l'on suppose que la $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à k . On choisit uniformément au hasard une boîte, puis on tire une boule de cette boîte. On note X le numéro de la boîte tirée et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer, pour tout $(p, k) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $\mathbb{P}(X = p, Y = k)$.

Solution: Le numéro de la boule tirée est toujours inférieur à celui de la boîte, donc $\mathbb{P}(X = p, Y = k) = 0$ si $1 \leq p < k \leq n$. Supposons maintenant $1 \leq k \leq p \leq n$. On a

$$\mathbb{P}(X = p, Y = k) = \mathbb{P}(Y = k | X = p) \mathbb{P}(X = p) = \frac{1}{pn}.$$

2. En déduire, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de k et n .

Solution: Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(X = p, Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{p=k}^n \frac{1}{p}.$$

3. Déterminer $\mathbb{E}[Y]$.

Solution: On a

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{p=k}^n \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p k = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{p+1}{2} = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+3}{4}.$$