

Contrôle partiel

Mardi 3 mars 2026 – Durée : 1h30.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Pour chacune des questions suivantes justifiez votre réponse.

1. Un tournoi sportif compte 15 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?
2. Pierre aimerait acheter 8 fruits. Dans son magasin préféré il y a des pommes, des poires et des bananes. Combien a-t-il de choix possibles ?
3. Une finale de course de 100 mètres oppose 2 coureurs d'un club de Lyon, 3 d'un club de Saint-Etienne et 3 d'un club de Valence. Combien y a-t-il de podiums possibles avec au moins un coureur de Lyon (un podium correspond à la liste dans l'ordre des trois premiers arrivés, on suppose qu'il ne peut pas y avoir de coureurs ex aequo) ?
4. On suppose qu'une urne contient 14 jetons indiscernables au toucher, dont 5 jetons verts numérotés de 1 à 5, 6 jetons rouges numérotés de 1 à 6 et 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3. On tire trois jetons sans remise sans conserver l'ordre. Combien y a-t-il de tirages avec des jetons d'au moins deux couleurs différentes ?
5. On considère 3 DVDs notés a, b et c, et leurs boîtes de rangement respectives A, B et C. Combien y a-t-il de rangements possible avec exactement un disque bien rangé ?

Exercice 2 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est donnée par le tableau suivant

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/8	3/8	0
0	1/4	0	1/8
2	0	0	1/8

1. Donner les lois marginales de X et Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}[X]$.
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = X^2Y$.

Exercice 3 : On lance n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in]0, 1[$. On appelle X_n la v.a.r. correspondant au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. En déduire $\mathbb{E}[(-1)^{X_n}]$. *Indication : on pourra utiliser le binôme de Newton.*
3. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $Y_n = (-1)^{X_n}$? Déterminer sa loi et son espérance, en fonction de $I_n = \mathbb{P}(X_n \text{ est impair})$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de I_n .

Exercice 4 : Soit n un entier strictement positif. On considère n boîtes numérotées de 1 à n et l'on suppose que la $k^{\text{ième}}$ boîte contient k boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à k . On choisit uniformément au hasard une boîte, puis on tire une boule de cette boîte. On note X le numéro de la boîte tirée et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer, pour tout $(p, k) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $\mathbb{P}(X = p, Y = k)$.
2. En déduire, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de k et n .
3. Déterminer $\mathbb{E}[Y]$.